

Keck-Hotopp

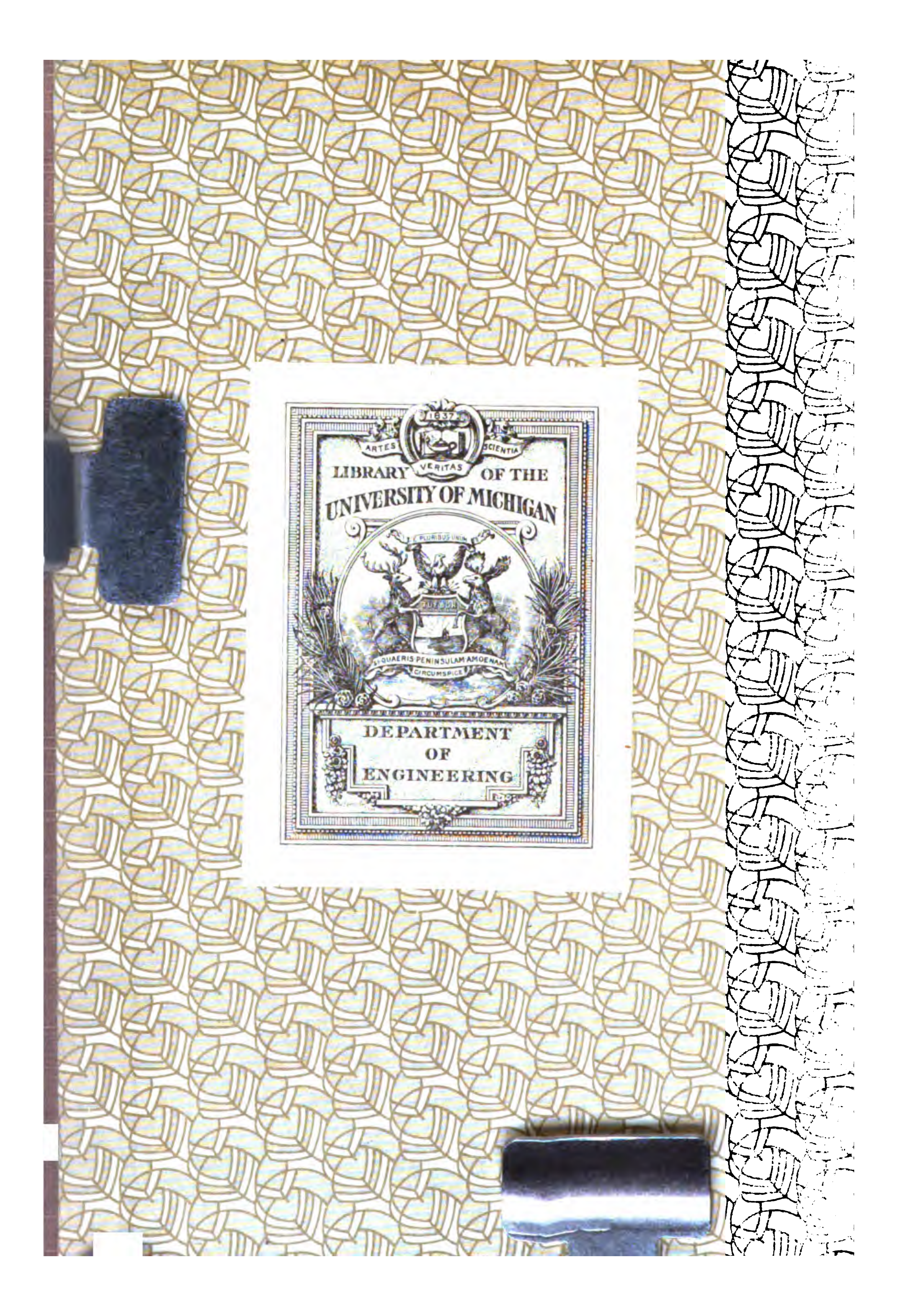
Elastizitäts-Lehre

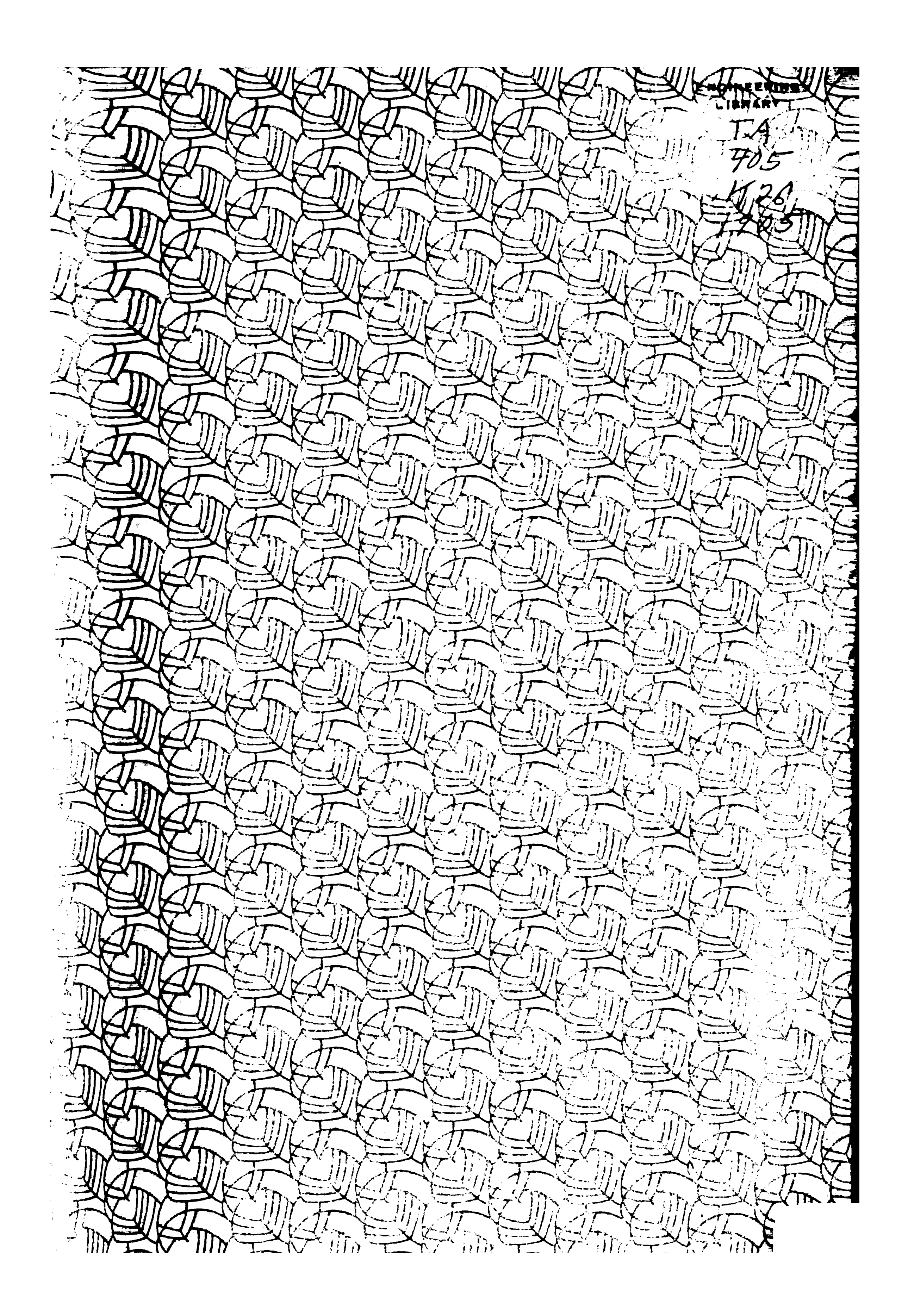
Zweiter Teil.





Hannover
Helwingsche Verlagsbuchhandlung


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING



Vorträge
über
Elastizitäts-Lehre
als Grundlage für die
Festigkeits-Berechnung der Bauwerke

von

Wilh. Keck,
weil. Geh. Regierungsrat,
Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

Zweite vermehrte Auflage,

neu bearbeitet von

Dr. Ing. **Ludwig Hotopp,**
Baurat,
Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

Zweiter Teil.

Mit 214 Holzschnitten.



Hannover.
Helwingsche Verlagsbuchhandlung.
1908.

Druck von Th. Schäfer, Hannover.

Vorwort zur ersten Auflage.

Das vorliegende Buch enthält im wesentlichen dasjenige, was als das Lehrfach „Elastizitätslehre" im zweiten Studienjahr an der technischen Hochschule zu Hannover vorgetragen wird. Das Hauptgewicht ist hierbei auf Leichtverständlichkeit und Anschaulichkeit gelegt; daher wird fast durchweg mit einfachen Sonderfällen, die dem Vorstellungsvermögen des Studierenden nahe liegen, begonnen und dann erst zu verwickelteren Aufgaben übergegangen. Ganz allgemeine Untersuchungen sind überhaupt vermieden, da diese Vorträge besonders die Einführung in die Elastizitätslehre bezwecken. In den Beispielen haben solche Fälle vorwiegend Berücksichtigung gefunden, die in den Baufächern von Wichtigkeit sind.

Die graphische Statik kann infolge besonderer Umstände in meinen mündlichen Vorträgen über Elastizitätslehre nicht benutzt werden, (abgesehen von den einfachsten Grundbegriffen); vielmehr erfolgt die zeichnerische Behandlung der Balken, Fachwerke, Stützmauern und Gewölbe in einem getrennten Lehrfache. Aus diesem Grunde habe ich auch im vorliegenden Buche die graphische Statik nicht in gröſserem Umfange verwendet, weil ich zu Gunsten meiner Hörer wesentliche Abweichungen zwischen den mündlichen und den gedruckten Vorträgen vermeiden wollte.

Die Bedeutung der in Formeln vorkommenden Buchstaben findet sich am Schlusse des Buches in alphabetischer Ordnung angegeben und zwar unter Hinweis auf diejenigen Stellen, wo die betreffende Gröſse in die Entwicklung eingeführt wurde. Mit Hülfe dieses Verzeichnisses kann der Leser jede Formel leicht verstehen, ohne erst im Texte nach der Bedeutung der einzelnen Zeichen suchen zu müssen.

Die neueren einschlägigen Arbeiten wurden benutzt, soweit es dem Plane des Buches entsprach; dabei sind die betreffenden Quellen

angeführt. Erschöpfende Quellennachweise für das ganze Gebiet der behandelten Wissenschaft habe ich aber nicht gegeben, weil dieses dem Hauptzwecke des Buches nicht zu entsprechen schien.

Hannover, im März 1893.

Keck.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Der hier vorliegende zweite Teil der Vorträge über Elastizitätslehre umfaßt den dritten bis fünften Abschnitt des Werkes und behandelt darin grundlegend die Elastizität und Festigkeit einfach gekrümmter Stäbe und ebener Fachwerke, sowie die Lehre vom Erddruck.

Der im Vorwort zum ersten Teile ausgesprochene Grundgedanke, dem Anfänger eine bequeme und sicher leitende Einführung in die Elastizitäts- und Festigkeitslehre zu bieten, ist auch bei Bearbeitung dieses Teiles leitend geblieben.

Wie der erste, so hat namentlich auch dieser zweite Teil gegenüber der ersten Auflage eine erhebliche Erweiterung erfahren müssen. Im dritten Abschnitt ist die genauere Untersuchung der Spannungen in gekrümmten Stäben, umfassend auch diejenigen in Gefäßwänden hinzugekommen. In den Kapiteln über den Zwei- und Dreigelenkbogen wurden neben der Ableitung der bei der Berechnung flacherer Bögen in der Anwendung meist benutzten abgekürzten analytischen Regeln, auch für jede Bogenform grundsätzlich genaue, wenn auch in der Benutzung umständlichere graphische Ermittelungsmethoden entwickelt. Das schien geboten, um den Leser in den Stand zu setzen, sich einerseits davon zu überzeugen, inwieweit die bequemeren analytischen Annäherungsregeln bei Berechnung steilerer Bögen noch anwendbar sind, und andererseits die tunlichst genaue Untersuchung solcher Bogenträger vorzunehmen.

Der vierte das ebene Fachwerk behandelnde Abschnitt hat namentlich durch Aufnahme der graphischen Verfahren zur Bestimmung der Stabspannkräfte und Formänderungen, sowie des Kapitels über kinematische Untersuchung von Fachwerken gegenüber dem entsprechenden Teile der ersten Auflage eine erhebliche

Erweiterung erfahren. Von einer Benutzung des Begriffes der sogen. lotrechten Geschwindigkeiten bei der kinematischen Untersuchung ebener Fachwerke ist abgesehen, die statischen Eigenschaften derselben, insbesondere die kleine Beweglichkeit nicht steifer Fachwerke von $2n - 3$ Streben, vielmehr ausschliefslich mit Hülfe des Begriffes der augenblicklichen Drehpole zu erklären versucht, weil dieser und seine statische Bedeutung dem Verständnis und dem statischen Gefühl des Anfängers zugänglicher sind und sich auch in den Entwicklungen ungezwungener ergeben.

Während im ersten Teile die Biegung gerader Stäbe ausschliefslich mit Hülfe der Biegungslinie untersucht wurde, mufste hier die Verfolgung der Formänderung beliebiger einfach gekrümmter Stäbe und ebner Fachwerke mit auf der breitern Grundlage der Arbeitsgesetze geschehen. Besonderes Gewicht wurde bei Bearbeitung dieser Materie aber wieder darauf gelegt, dem Anfänger das Wesen des Kampfes zwischen den äufseren und inneren Kräften während der Formänderung, die statische Bedeutung des Begriffes der virtuellen, im Gleichgewicht der äufseren und inneren Kräfte entstehenden Formänderungsarbeit möglichst klar vor Augen zu führen. Daraus erklärt sich auch die für den eingeweihten Leser vielleicht etwas breite textliche Behandlung des Gegenstandes.

Zum Schlufs will ich nicht unterlassen, den Herren Dipl.-Ing. Bohne, jetzt in Schanghai, und Regierungsbauführer W. Quantz für die freundlichst übernommene Nachprüfung der Rechnungsergebnisse und Unterstützung bei Ausführung der Korrekturen meine dankbare Anerkennung auszusprechen.

Hannover, im Oktober 1907.

L. Hotopp.

Inhalt.

Seite

II. Teil.

Dritter Abschnitt.

Elastizität und Festigkeit einfach gekrümmter Stäbe; ebene vollwandige Balken und Bogenträger.

I. Allgemeines, äufseres Gleichgewicht; statisch bestimmte und statisch unbestimmte Stützung 1
II. Formänderungsarbeit, Arbeitsgesetze 8
a) Formänderungsarbeit im allgemeinen 8
b) Grundregeln für die Berechnung der Formänderungs- und Verschiebungsarbeit für die wichtigsten Angriffsarten äufserer Kräfte 12
c) Arbeitsgesetze in der Elastizitätslehre 20
Anwendungen 23
d) Maxwells Satz von der Gegenseitigkeit der Verrückungen . 32
III. Spannungen durch beliebige Kräfte in der Krümmungsebene des Stabes 35
a) Allgemeine Beziehungen zwischen den äufseren Kräften und den Normalspannungen 35
Anwendungen 46
b) Formänderung, Dehnung und Biegung 50
IV. Der ringförmig geschlossene Stab unter der Wirkung von Radialkräften 55
a) Radiale Einzelkräfte 55
b) Gleichmäfsig verteilte Radialkräfte, Spannungen in Gefäfswänden 58
IVa. Der vollwandige Dreigelenk-Bogenträger 66
a) Allgemeines und Angriff beliebiger Kräfte in der Bogenebene 66
b) Lotrechte Kräfte in der Bogenebene, feste und bewegliche Lasten 71
c) Einflufslinien; Gröfstwerte der Stützkräfte, Momente, Normal- und Querkräfte 76
Anwendungen 93
V. Der Zweigelenk-Bogenträger 97
a) Allgemeines 97
b) Berechnung des Horizontalschubes, Einflufslinie desselben . 98
c) Bestimmung der Kämpferdrucklinie 119
d) Einflufslinien und Gröfstwerte des Biegungsmomentes, der Normal- und Querkräfte 121
Anwendungen 132

Seite

VI. Der Bogenträger ohne Gelenke . . . 135
a) Allgemeines . . . 135
b) Bestimmung der Stützkräfte und Stützmomente für eine lotrechte Einzellast . . . 136
c) Bestimmung der Kämpferdrucklinie und der Kämpferdruckeinhüllungslinie . . . 145
d) Stützkräfte und Stützmomente für beliebige lotrechte Belastung . . . 150
Anwendungen . . . 156

VII. Das Gewölbe als Bogenträger . . . 160
a) Allgemeines . . . 160
b) Grundgleichung der Kettenlinie für lotrechte Belastung . . . 166
c) Die gemeine Kettenlinie . . . 168
d) Kettenlinie für überall gleiche Anstrengung . . . 172
e) Belastungslinie der kreisförmigen Drucklinie . . . 174
f) Hagen'sche Drucklinie für wagerechte Belastungslinie . . . 176
g) Kettenlinie und Drucklinie für unsymmetrische Belastung . . . 179
h) Ermittelung der wirklichen Drucklinie eines Gewölbes mit lotrechter Belastung . . . 183
i) Anwendung auf Brückengewölbe . . . 191
k) Drucklinie für Erdbelastung . . . 200

VIII. Besondere Formen des vollwandigen Trägers auf zwei Stützen . . . 206
a) Innere Kräfte eines Trägers mit nicht parallelen Gurtungen . . . 206
b) Einflufslinien eines einfachen Trägers mit nicht parallelen Gurtungen . . . 208
c) Parabolischer Träger . . . 210
d) Pauli'scher Träger . . . 214

Vierter Abschnitt.

Elastizität und Festigkeit ebener Fachwerke, der Fachwerksbalken.

I. Begriffserklärung, Entstehung und allgemeine statische Eigenschaften ebener Fachwerke . . . 216
a) Begriffserklärung und Voraussetzungen . . . 216
b) Entstehung und allgemeine statische Eigenschaften ebener Fachwerke . . . 219

II. Bestimmungen der Stabkräfte in einem Dreiecksfachwerk . . . 231
a) Allgemeines Verfahren . . . 231
b) Anwendung auf den einfachen Fachwerkbalken mit lotrechter Belastung . . . 237
c) Kräftepläne . . . 242

Seite

III. Stabkräfte für ständige und bewegliche Lasten . . 257
a) Einflufslinien der Stabkräfte 257
b) Ermittelung der gröfsten Stabkräfte 261

IV. Besondere Formen des Fachwerkträgers auf zwei Stützen 277
a) Parallelträger 277
b) Der parabolische Träger 283
c) Der Schwedler'sche (hyperbolische) Träger 289
d) Der Halbparabelträger 296
e) Der Fachwerkbogenträger mit drei Gelenken 301

V. Grundzüge einer Kinematik des Fachwerks 308
a) Einige Grundbegriffe der Kinematik 308
b) Beziehung der Pole einer zwangläufigen Kette in ihrer Lage gegeneinander; „Sätze der drei Pole" 312
c) Bestimmung der Pole einiger zwangläufiger Ketten . . . 316
d) Kinematisches Merkmal für die Steifheit und statische Bestimmtheit eines Fachwerks 321
e) Bestimmung der Stabkräfte 326

VI. Formänderung ebener statisch bestimmter Fachwerke 333
a) Allgemeines; Formänderungsarbeit; Arbeitsgesetze. . . . 333
b) Verschiebungspläne 342
c) Die Biegungslinie als Seileck 350
d) Die Biegungslinie als Einflufslinie für elastische Verschiebungen 361
e) Anwendungen auf statisch unbestimmte Fachwerke . . . 362

Fünfter Abschnitt.

Erddruck und Stützmauern 378
a) Allgemeines und Voraussetzungen 378
b) Normaldruck einer wagerecht begrenzten Erdmasse gegen eine lotrechte Ebene 380
c) Normaldruck eines Erdkörpers mit abfallender Oberfläche gegen eine lotrechte Ebene 386
d) Druck eines überhöhten Erdkörpers gegen eine Stützmauer 389
e) Zeichnerische Bestimmung des Erddruckes 397
f) Anwendung auf die Berechnung von Stützmauern 402
g) Spannungen in einem Punkte eines Erdkörpers 406
h) Spannungen in einem unbegrenzten Erdkörper 409
i) Richtung des Erddruckes gegen eine feste Wand. 412

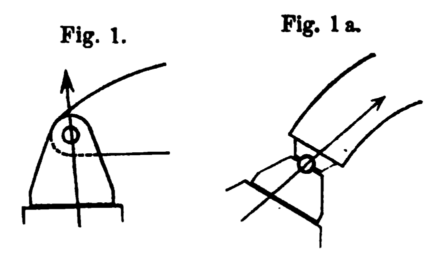
Dritter Abschnitt.

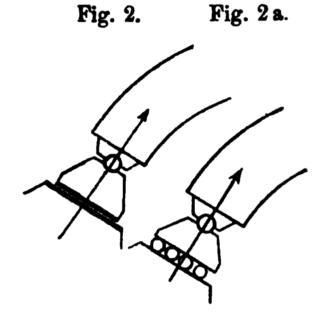
Elastizität und Festigkeit einfach gekrümmter Stäbe; ebene vollwandige Balken und Bogenträger.

I. Allgemeines, äufseres Gleichgewicht; statisch bestimmte und statisch unbestimmte Stützung.

Im zweiten Abschnitt wurden die unter der Wirkung äufserer Kräfte entstehenden Spannungen und Formänderungen in stabförmig geraden Körpern untersucht. Die gewonnenen Ergebnisse sollen nun für einfach, d. h. eben gekrümmte stabförmige Körper verallgemeinert werden. Unter einem einfach gekrümmten Stabe wollen wir in folgendem einen Stab verstehen, dessen Mittellinie in spannungslosem Zustande eine ebene Kurve oder auch im Grenzfalle — Krümmungshalbmesser ∞ — eine gerade Linie bildet. Auch werde angenommen, dafs die Ebene dieser Kurve, die Krümmungsebene des Stabes, oder kurz Stabebene genannt, eine Symmetrieebene desselben sei und alle sich am Stabe das Gleichgewicht haltenden äufseren Kräfte in dieser Ebene liegen, die Kraftebene also mit der Stabebene zusammenfalle. Unter dieser Voraussetzung kann angenommen werden, dafs die Mittellinie des Stabes auch nach der durch den äufsern Kräfteangriff herbeigeführten elastischen Formänderung noch eine ebene Kurve von im allgemeinen geänderter Krümmung bildet. Bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen ist es in den in der Anwendung meist vorkommenden Fällen zulässig, den Einflufs dieser und der etwa durch Temperaturänderung erzeugten Formänderungen auf die Richtung und Lage der wirkenden Kräfte zu vernachlässigen und den Stab als starr anzusehen.

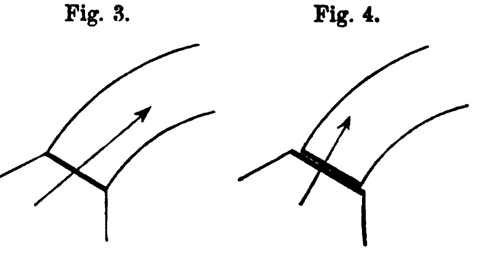
Wird ein derartiger, von äufseren Kräften (Lasten) ergriffener Stab in einer Geraden, senkrecht zu seiner Krümmungs- bezw. Kraftebene drehbar fest gehalten, so entsteht ein sog. festes Stützgelenk (Fig. 1 u. 1a), dessen Drehungsachse jene Gerade ist. Geschieht die Befestigung so, dafs die Achse des Stützgelenks sich in einer zur Stabebene senkrechten Ebene parallel verschieben kann, so ergibt sich ein bewegliches (verschiebbares) Stützgelenk (Fig. 2). Die in Fig. 2 und in folgenden durch eine Doppellinie bezeichnete Verschiebbarkeit des Lagerkörpers auf seiner Stützebene ist so gedacht, dafs eine Trennung der aufeinander gleitenden Ebenen durch äufsere, etwa auf Trennung gerichtete Kräfte ausgeschlossen erscheint.


Fig. 1. Fig. 1a.


Fig. 2. Fig. 2a.

In den meisten Fällen der Anwendung wird die Verschiebbarkeit durch Einfügung zylindrischer Walzen herbeigeführt (Fig. 2a) und die Anordnung so getroffen, dafs auf Trennung des Lagers von seiner Stützebene gerichtete Kräfte nicht auftreten.

Wird der Stab in einer Ebene unverschiebbar festgehalten (Fig. 3), so nennt man eine derartige Befestigung eine feste Einspannung. Geschieht diese Einspannung derart, dafs der Stab sich in der Richtung der Einspannungsebene verschieben kann, (in Fig. 4 angedeutet durch eine Doppellinie), so erhält man eine bewegliche (verschiebbare) Einspannung.


Fig. 3. Fig. 4.

Durch ein festes Stützgelenk wird ein Punkt der Stabebene drehbar festgehalten, durch ein bewegliches Stützgelenk die Bewegung des Punktes auf eine Gerade beschränkt. Durch eine feste Einspannung wird die

Stabebene in einer in ihr gelegenen Geraden unverschiebbar festgehalten, durch eine verschiebbare Einspannung die Bewegung dieser Geraden auf eine Verschiebung in ihrer Richtung beschränkt. So betrachtet, kann man den einfach gekrümmten Stab bezügl. seines äufsern Gleichgewichtes als eine ebene Scheibe ansehen.

Wird ein von unter sich nicht im Gleichgewicht befindlichen Kräften (Lasten) ergriffener Stab in einer oder mehreren der vorbezeichneten Arten festgehalten — gestützt —, so haben diese „Stützen“ gewisse, der Bewegung des Stabes widerstehende Kräfte, die sog. Stützkräfte, zu leisten. Bei den gemachten Voraussetzungen können diese nur in der Stabebene auftreten; sie sind also wie Kräfte in einer Ebene durch drei Bestimmungsstücke, nämlich ihre Richtung, Lage und Gröfse als gegeben bezw. festgelegt anzusehen.

Man erkennt leicht, dafs die an einem festen Stützgelenk tätige Stützkraft ihrer Lage nach — sie mufs durch die Stützachse gehen — stets bekannt ist, ihrer Richtung und Gröfse nach aber im allgemeinen unbekannt sein kann.

Ein verschiebbares Stützgelenk kann, unter der Voraussetzung völlig reibungsloser Verschiebbarkeit, einen Stützwiderstand, eine Stützkraft nur in der Richtung senkrecht zu seiner Verschiebungsebene leisten; die an ihm auftretende Stützkraft ist also stets nach Richtung und Lage bekannt und kann nur ihrer Gröfse nach unbekannt sein.

Bei jeder festen Einspannung kann die auftretende Stützkraft im allgemeinen nach Richtung, Lage und Gröfse unbekannt sein; sie kann je nach den sonst am Stabe tätigen Kräften in jedem Punkte der festgehaltenen Ebene, in jeder Richtung und, innerhalb der durch die Festigkeit des Stoffes bedingten Grenzen, in jeder Gröfse auftreten. Bei der reibungslos verschiebbaren Einspannung kann die Stützkraft nur senkrecht zur Einspannungsebene wirken, ist somit im allgemeinen nur nach Lage und Gröfse unbekannt.

Für die Beurteilung des äufseren Gleichgewichts eines festgehaltenen und belasteten Stabes stehen zunächst nur die drei Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte in einer Ebene (vergl. Keck, Mechanik I, 3. Aufl. S. 111), zur Verfügung. Läfst sich die zuerst auftretende Frage nach den bei gegebener Belastung tätigen Stützkräften lediglich mit Hilfe dieser drei statischen Gleichgewichtsbedingungen, bezw. der ihnen entsprechenden drei Gleichungen eindeutig beantworten, was immer möglich ist, wenn die Stützkräfte

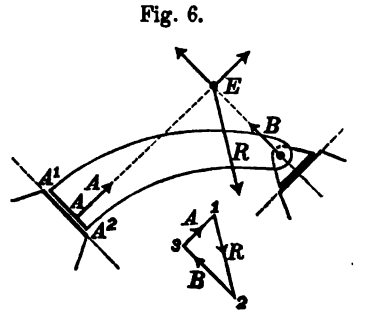
insgesamt nur drei Unbekannte aufweisen, so nennt man den Zustand des Stabes „statisch bestimmt". Reichen jene drei Bedingungen zur Bestimmung der Stützkräfte allein nicht aus, ist die Zahl der diese festlegenden Unbekannten größer als drei, so sind weitere Bestimmungsgleichungen aus dem elastischen Verhalten des Stabes oder Balkens herzuleiten; der Zustand desselben heißt in diesem Falle „statisch unbestimmt". Hiernach läßt sich im allgemeinen leicht beurteilen, welche Befestigungs- bezw. Lagerungsarten den statisch bestimmten und welche den statisch unbestimmten Zustand eines Stabes bedingen.

Statisch bestimmt ist der Zustand des Stabes in folgenden Fällen:

1. Es besteht ein festes und ein bewegliches Stützgelenk (Fig. 5). Die Stützkraft an ersterem weist zwei Unbekannte (Richtung und Größe), an letzterer eine (Größe) auf. Überhaupt sind drei Unbekannte vorhanden. Die Stützkräfte A und B ergeben sich aus der Mittelkraft R der Lasten, wie in Fig. 5 angedeutet. Die Richtungslinie von A ist bekannt; durch ihren Schnittpunkt E mit R muß auch B gerichtet sein. Danach lassen sich mit Hilfe des Kraftecks 1, 2, 3 die Stützkräfte A und B bestimmen. Sind R und A parallel, wie beim gewöhnlichen geraden Träger auf zwei Stützen mit lotrechten Lasten, so rückt E in unendliche Ferne und B wird auch lotrecht.

Fig. 5.

Fig. 6.

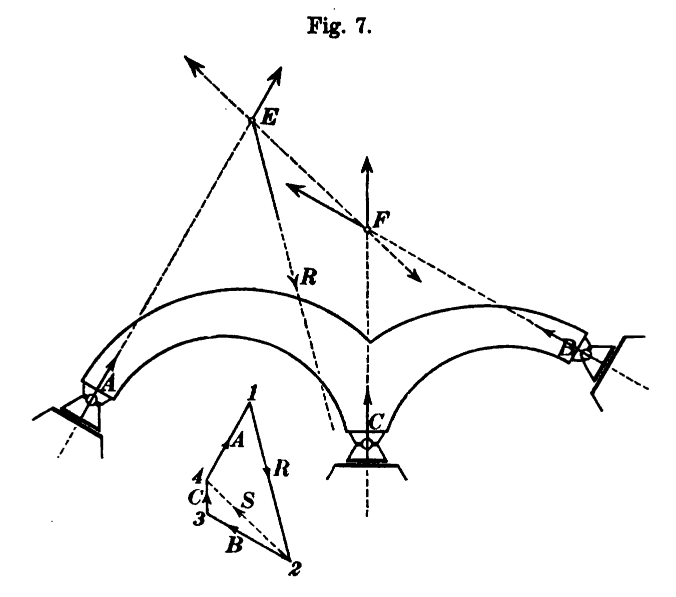


2. Es ist ein verschiebbares Stützgelenk und eine verschiebbare Einspannung vorhanden (Fig. 6). Von der Stützkraft an ersterem ist nur die Größe, von derjenigen an letzterem sind Lage (Angriffspunkt)

und Gröfse, im ganzen also drei Bestimmungsstücke unbekannt. Die Bestimmung der Stützkräfte A und B ist aus Fig. 6 ersichtlich. Durch den Schnittpunkt E der bekannten Richtungslinie von B mufs auch A gehen und aufserdem senkrecht zur Stützebene $A_1 A_2$ gerichtet sein. Je nach der Lage ihres Schnittpunktes A innerhalb der Stützebene verteilt sich der Stützwiderstand A über die Fläche $A_1 A_2$ (vergl. Teil I S. 225).

3. Die Befestigung erfolgt mit drei verschiebbaren Stützgelenken (Fig. 7). An jedem derselben ist nur die Gröfse der

Fig. 7.



Stützkraft unbekannt, die Zahl der Unbekannten ist also wieder gleich drei. Hier ist zu beachten, dafs drei nach Richtung und Lage gegebene Stützkräfte mit den bekannten Lasten, bezw. mit deren Mittelkraft R sich das Gleichgewicht zu halten haben. Soll daher in diesem Unterstützungsfalle ein statisch bestimmter Zustand des Stabes erreicht werden, so müssen die Auflager so angeordnet werden, dafs die zu den Stützebenen oder Auflagerbahnen senkrechten Richtungslinien der Stützkräfte sich nicht in einem Punkte schneiden. (Vergl. Keck, Mechanik I, dritte Aufl. S. 117.)

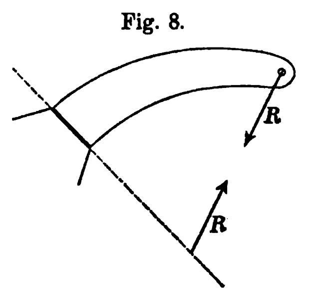
Sind beispielsweise die Stützbahnen und damit auch die Richtungslinien der Stützkräfte einander parallel (Schnitt in ihrem

unendlich fernen Punkte), so würde das Gleichgewicht bedingen, dafs auch die Mittelkraft aller Lasten den Stützkräften parallel sei. Es handelt sich also in diesem Falle um das Gleichgewicht eines Systems von Parallelkräften. Für ein solches aber gelten bekanntlich nur zwei Gleichgewichtsbedingungen und zur Bestimmung der Gröfsen der drei Stützkräfte stehen somit nur zwei Gleichungen zur Verfügung, der Zustand des Stabes ist statisch unbestimmt. (Vergl. Bd. I S. 126 unter e Ziffer 1).

Bei den in Fig. 7 angenommenen, bezw. durch die Anordnung der Stützen gegebenen Kraftrichtungen gestaltet sich die Ermittelung der Stützkräfte wie in der Figur angedeutet. Die Mittelkräfte von A und R und von B und C müssen einander entgegengesetzt gleich sein und in dieselbe Gerade EF fallen. Dadurch ist die Zeichnung des Kraftecks 1, 2, 3, 4, in dem $\overline{24} \parallel EF$, $\overline{23} = B$, $\overline{34} = C$ und $\overline{41} = A$ ist, ermöglicht. Die Stützkräfte A, B und C lassen sich auch leicht durch Rechnung bestimmen, indem man wechselweise die Momentengleichung in Bezug auf die Schnittpunkte der Richtungslinien je zweier Stützkräfte bildet.

4. Die Unterstützung erfolgt durch eine feste Einspannung (Fig. 8). Die einzige Stützkraft mufs der Mittelkraft R der Lasten entgegengesetzt gleich sein und ist dadurch bekannt.

Fig. 8.



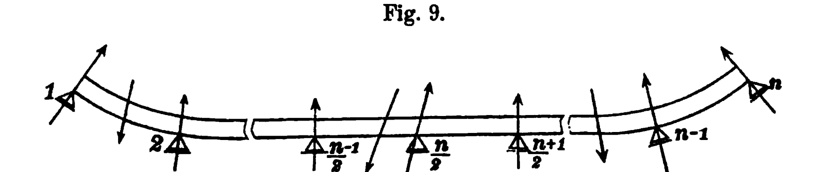
Einem statisch unbestimmten Zustande des Stabes begegnen wir beispielsweise in folgenden Unterstützungsfällen:

Die Unterstützung erfolgt durch zwei feste Stützgelenke. Hierbei ist jede Stützkraft nach Richtung und Gröfse unbekannt; zur Bestimmung von vier Unbekannten sind aber nur drei Bestimmungsgleichungen vorhanden; es fehlt also e i n e; der Zustand ist einfach statisch unbestimmt.

Der Stab erhält — etwa an beiden Enden — zwei feste Einspannungen. Die beiden Stützkräfte sind je nach Richtung, Lage und Gröfse unbekannt. Es fehlen also zu ihrer Bestimmung $2 \cdot 3 - 3 = 3$ Gleichungen, der Zustand des Stabes ist 3fach statisch unbestimmt.

Die Unterstützung geschieht durch n Stützgelenke, wovon eins fest und $n-1$ verschiebbar (Fig. 9). Von den n Stützkräften ist eine nach Richtung und Gröfse, $n-1$ nur nach ihrer Gröfse

Fig. 9.



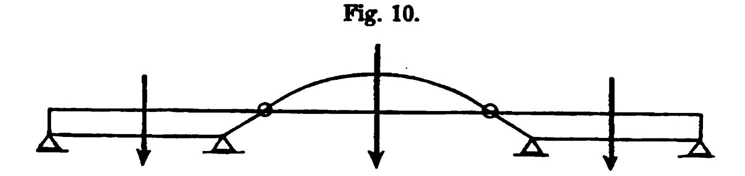
unbekannt; es sind also $2+n-1=n+1$ Unbekannte und zu deren Bestimmungen nur drei Gleichungen vorhanden; es fehlen somit $n+1-3=n-2$ Gleichungen; der Zustand des Stabes ist $(n-2)$ fach statisch unbestimmt. U. s. w.

Jeder Stab mit r-fach statisch unbestimmter Unterstützung läfst sich durch Einfügung von r reibungslosen Gelenken derart, dafs er dadurch in $r+1$ gelenkartig miteinander verbundenem Teile zerfällt, stets in einen statisch bestimmten Zustand überführen. Denn das Gleichgewicht verlangt, dafs in Bezug auf die Achse eines jeden Gelenkes die Summe der Momente aller links oder rechts desselben angreifenden Kräfte gleich Null sei, weil die Gelenkquerschnitte Drehungs- oder Biegungswiderstand nicht leisten, sondern nur Querkräfte übertragen können. Dadurch werden die fehlenden r Gleichungen zur Bestimmung der das äufsere Gleichgewicht herstellenden Stützkräfte gewonnen. Die in den Gelenken zusammentretenden Teile stützen sich hier gegenseitig, üben Stütz- oder Querkräfte aufeinander aus. Um diesen Zweck zu erfüllen, bedarf es nicht immer der Ausbildung wirklicher Gelenke, sondern es genügt meist eine solche Verbindung der Stabteile, dafs an der Verbindungsstelle der Übergang von Momenten ausgeschlossen, derjenige von Querkräften aber gesichert ist. Letzteres Erfordernis, die sichere gegenseitige Unterstützung der einzelnen Stabteile bedingt, wie leicht ersichtlich, dafs zwischen je zwei Auflagern nicht mehr als zwei Gelenke angeordnet werden dürfen.

Die wichtigste Anwendungsform einfach gekrümmter oder (im Grenzfalle $\varrho=\infty$) gerader Stäbe im mechanisch-statischen Sinne stellen die vollwandigen Balken oder Bogenträger dar, deren Lagerung

bezw. Unterstützung eine statisch bestimmte oder unbestimmte sein kann. Wird ihr statisch bestimmter Zustand durch Einfügung von

Fig. 10.



Zwischengelenken herbeigeführt, so nennt man sie Gelenkbalken oder Gelenkträger. (Vergl. Fig. 10.)

II. Formänderungsarbeit, Arbeitsgesetze.

a) Formänderungsarbeit im allgemeinen.

Zur Beurteilung des äufseren Gleichgewichts gerader prismatischer Stäbe oder Balken mit statisch unbestimmter Unterstützung, insbesondere zur Ermittelung der das äufsere Gleichgewicht gegenüber den wirkenden Lasten herstellenden Stützkräfte wurde im ersten Abschnitt bereits das elastische Verhalten, die Formänderung bezw. Biegung der Balken benutzt. Durch Einführung des Begriffes der Formänderungsarbeit lassen sich allgemeinere und in ihrer Handhabung vielfach bequemere Regeln zur Lösung vorbezeichneter Aufgabe auch für einfach gekrümmte Stäbe oder Balken gewinnen.

Denkt man sich einen beliebigen elastisch festen Körper von äufseren unter sich im Gleichgewicht befindlichen Kräften ergriffen, etwa einen festgehaltenen oder gestützten Stab oder Balken von den Lasten und Stützkräften, so ändert derselbe seine Form so lange, bis auch zwischen den mit der Formänderung im Körper wachgerufenen und sich ihr widersetzenden inneren Spannkräften und den äufseren Kräften Gleichgewicht eingetreten ist.

Während der Formänderung legen die äufseren Kräfte in ihrer Richtung mit den von ihnen ergriffenen Teilen des Körpers gewisse Wege zurück, verrichten also eine im allgemeinen positive Arbeit. Die inneren Spannkräfte folgen den sich bewegenden Körperteilen, suchen deren Bewegung zu hindern und verrichten dabei Negativarbeit. In dem Augenblicke, wo das Gleichgewicht zwischen den äufseren und inneren Kräften eingetreten ist, sind die in einem

Zeitteilchen dt entstehende Positiv- und Negativarbeit einander gleich und heben sich also auf. Denkt man sich die äufseren Kräfte von Null an allmählich so angewachsen, dafs in jedem Augenblicke Gleichgewicht zwischen ihnen und den inneren Spannkräften besteht, so sind fortlaufend Positiv- und Negativarbeit einander gleich und also die Gesamtarbeit gleich Null. Läfst man ebenso allmählich die äufseren Kräfte wieder bis auf Null abnehmen, so verschwinden auch die inneren Kräfte wieder und der Körper kehrt, völlige Elastizität vorausgesetzt, wieder in seine ursprüngliche Form zurück. Dabei leisten jetzt die inneren Kräfte, welche die rückkehrende Bewegung hervorrufen, Positivarbeit und die äufseren, welche sich ihr widersetzen, Negativarbeit, welche beide einander gleich und also in ihrer Gesamtheit ebenfalls gleich Null sind.

Greifen die äufseren Kräfte den Körper gleich in ihrer vollen Gröfse an und behalten diese unverändert bei, so überwiegt ihre Positivarbeit die Negativarbeit der erst allmählich anwachsenden inneren Kräfte so lange, bis Gleichgewicht zwischen beiden eingetreten ist. Mit dem bis dahin entstehenden Überschufs an Positivarbeit geht eine Beschleunigung der bewegten Körpermassen und eine Ansammlung von Arbeitsvermögen innerhalb derselben einher, unter dessen Wirkung die formändernde Bewegung sich so lange fortsetzt, bis die nun überschiefsende Negativarbeit der weiter anwachsenden inneren Spannkräfte das Arbeitsvermögen verzehrt hat und Ruhe eingetreten ist.

Dabei haben die auf Rückkehr des Körpers in seine ursprüngliche Form gerichteten inneren Kräfte den äufseren gegenüber das Übergewicht gewonnen und führen nun, positiv arbeitend, eine beschleunigte Rückwärtsbewegung in die ursprüngliche Form herbei.

Bleiben die äufseren Kräfte nach wie vor in gleicher Gröfse tätig, so wiederholt sich die Bewegung und es entstehen sog. Schwingungen.

Ähnliches geht vor sich, wenn man die allmählich gesteigerten äufseren Kräfte plötzlich beseitigt. Derartige plötzlich entstehende und verschwindende Lastangriffe kommen in Wirklichkeit vielfach vor und führen dann, wie man schon aus obigen allgemeinen Darlegungen ersieht, zu erheblich gröfseren Spannungen, als sie dem allmählichen Angriff bezw. der ruhenden Last entsprechen. (Vergl. Teil I, S. 2.)

Die nach obigem durch die Formänderung bedingte Arbeit der äufseren und inneren Kräfte nennt man äufsere und innere Formänderungsarbeit. Wir wollen dieselbe in folgendem mit $\mathfrak{A}_a$ und $\mathfrak{A}_i$ bezeichnen.

Wirken gleichzeitig mehrere Kräfte auf einen etwa festgehaltenen Körper, so erzeugt jede für sich allein eine gewisse Formänderung und leistet dabei eine bestimmte äufsere Formänderungs-

arbeit, die, ein allmähliches Anwachsen der Kraft vorausgesetzt, gleich der ihr entsprechenden inneren Formänderungsarbeit ist. Gleichzeitig aber leistet sie infolge der durch die anderen äufseren Kräfte hervorgebrachten Formänderung, also aus einer von ihr unabhängigen Bewegungsursache ihres Angriffspunktes eine weitere Arbeit, die, wenn es sich lediglich um eine aus der elastischen Formänderung des Körpers herrührende Bewegung handelt, ihrem Wesen nach auch eine äufsere Formänderungsarbeit desselben ist. Diese Arbeit der Kraft würde indefs dieselbe sein, wenn die gleiche Bewegung ihres Angriffspunktes durch irgend eine andere Ursache, etwa durch eine Verschiebung des ganzen Körpers veranlafst worden wäre. Wir wollen sie daher im folgenden Verschiebungsarbeit nennen und je nachdem es sich um die Arbeit der äufseren oder inneren Kräfte handelt, mit $\mathfrak{A}_a^v$ oder $\mathfrak{A}_i^v$ bezeichnen. Derartige Verschiebungen kommen z. B. immer vor, wenn der stabförmige Körper als Glied einer elastischen Gelenkstangenverbindung für sich allein nicht absolut, d. h. statisch bestimmt festgehalten ist.

Das Merkmal reiner Verschiebungsarbeit einer äufseren Kraft in Bezug auf einen Körper ist danach eine von der Kraft selbst völlig unabhängige Bewegungsursache ihres Angriffspunktes. Sie kann, aber braucht nicht immer gleichzeitig Formänderungsarbeit des Körpers selbst zu sein, sondern aus der Formänderung etwa mit ihm verbundener elastischer Körper oder aus anderen Ursachen herrühren.

Im folgenden möge ferner angenommen werden, dafs die Kraft während einer von ihr geleisteten Verschiebungsarbeit ihre Gröfse nicht ändere, was z. B. immer dann zutrifft, wenn die von ihr selbst unter allmählichem Anwachsen erzeugte Formänderung beim Angriff anderer Kräfte bezw. Eintritt anderer Formänderungs- oder Verschiebungsursachen bereits beendet ist.

Wird beispielsweise ein gerader Stab von einer auf seine Verlängerung gerichteten Längskraft ergriffen, so leistet diese während ihres allmählichen Anwachsens infolge der elastischen Verlängerung des Stabes wirkliche positive und die mit ihr im stetigen Gleichgewicht befindlichen inneren Spannkräfte wirkliche negative Formänderungsarbeit von gleicher Gröfse. Erfährt der Stab, nachdem die Längskraft ihren Gröfstwert erreicht hat, etwa infolge Erwärmung eine weitere Verlängerung, so leistet die äufsere Längs-

kraft dabei positive, die inneren Spannkräfte negative Verschiebungsarbeit.

Folgt das Material des Stabes dem Hooke'schen Gesetz, d. h. wachsen die inneren Spannkräfte und mit diesen stets im Gleichgewicht stehend die äufsere Längskraft in linearem Verhältnis mit der Verlängerung, so ist, wie man schon hier allgemein erkennt, weiter unten aber noch des näheren nachgewiesen werden wird, die wirkliche Formänderungsarbeit der allmählich anwachsenden äufseren und inneren Kräfte halb so grofs, als wenn beide bereits zu Anfang und während der Entstehung der Verlängerung mit ihren Endwerten gewirkt hätten, d. h. halb so grofs als die der gleichen Verlängerung entsprechende Verschiebungsarbeit.

Was hier von dem Sonderfall einer einfachen Verlängerung gesagt ist, gilt ersichtlich auch für eine beliebige Formänderung, vorausgesetzt, dafs die äufseren und inneren Kräfte dauernd miteinander im Gleichgewicht und beide verhältnisgleich der Formänderung sind.

Ist danach eine der Arbeit $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_a$, $\mathfrak{A}_i^v$ und $\mathfrak{A}_a^v$ bekannt, so sind es auch die anderen. Es ist $\mathfrak{A}_a = -\mathfrak{A}_i = \frac{\mathfrak{A}_a^v}{2} = -\frac{\mathfrak{A}_i^v}{2}$.

Greifen die äufseren Kräfte gleich zu Anfang der Formänderung mit von Null verschiedenen Gröfsen an, während die inneren erst von Null aus entstehen, so dafs während der die Formänderung herbeiführenden Bewegung kein Gleichgewicht zwischen beiden besteht, die ersteren vielmehr das Übergewicht haben, so ist die von ihnen geleistete Arbeit $\mathfrak{A}_a$ gröfser als diejenige $\mathfrak{A}_i$ der inneren Kräfte und der Überschufs jener Arbeit über diese erzeugt in den Massenteilen des Körpers beschleunigte Bewegung, ausgedrückt durch die Gleichung

$$\mathfrak{A}_a - \mathfrak{A}_i = \Sigma \cdot \frac{m \cdot v^2}{2}.$$

Umgekehrt kann aus der Gleichheit der äufseren und inneren Formänderungsarbeit, sei es fortlaufend oder in irgend einem Augenblick auf das Gleichgewicht der äufseren und inneren Kräfte geschlossen werden, entsprechend der Gleichung

$$\mathfrak{A}_a - \mathfrak{A}_i = 0.$$

Diese letztere Gleichung wird vielfach mit Vorteil, zur Berechnung von Formänderungen, benutzt.

b) Grundregeln zur Berechnung der Formänderungs- und Verschiebungsarbeit für die wichtigsten Angriffsarten äufserer Kräfte.

1. Für eine Längskraft.

Ein zunächst gerade und prismatisch angenommener Stab von der Länge l und dem Querschnitt F werde in seiner Achse von einer, von Null aus allmählich anwachsenden Längskraft K ergriffen, so dafs zwischen ihr und den inneren Spannkräften $\sigma \cdot F$ in jedem Querschnitt stets Gleichgewicht besteht.

In irgend einem Augenblick sei x die eingetretene Längenänderung, σ_x die herrschende Spannung und K_x die Gröfse der äufseren Längskraft. Dann ist

1) $$F \cdot \sigma_x = K_x .$$

Während der weiteren Längenänderung dx entsteht die innere negative Formänderungsarbeit

2) $$d\mathfrak{A}_i = -dx \cdot F \cdot \sigma_x$$

und die gleich grofse äufsere positive

2a) $$d\mathfrak{A}_a = dx \cdot K_x .$$

Nach Band I Seite 50 ist

3) $$x = \frac{\sigma_x}{E} \cdot l, \text{ also } dx = \frac{d\sigma_x \cdot l}{E}$$

und damit $d\mathfrak{A}_i = -\frac{F \cdot l}{E} \cdot \sigma_x \cdot d\sigma_x$. Während die Spannung von 0 bis σ wächst, entsteht also die innere Formänderungsarbeit

4) $$\mathfrak{A}_i = -\frac{F \cdot l}{E} \cdot \int_0^\sigma \sigma_x \cdot d\sigma_x = -\frac{F \cdot l \sigma^2}{2E},$$

wofür man, da $F \cdot l$ gleich dem Stabvolumen v ist, auch schreiben kann

4a) $$\mathfrak{A}_i = -\frac{v \cdot \sigma^2}{2E} .$$

Nach Gleichung 1 und 3 ist auch

5) $$x = \frac{K_x \cdot l}{FE}, \text{ also } dx = \frac{l}{FE} \cdot dK_x$$

und somit nach Gleichung 2a

$$d\mathfrak{A}_a = \frac{l}{FE} K_x \cdot dK_x .$$

Während die äufsere Kraft von Null bis K wächst, entsteht demnach die äufsere Formänderungsarbeit

6) $$\mathfrak{A}_a = \frac{l}{FE} \cdot \int_0^K K_x \, d\, K_x = \frac{l\, K^2}{2\, F \cdot E}.$$

Ist δ der durch die Kraft K hervorgerufene Gröfstwert der Längenänderung x, so ist nach Gleichung 5 mit $K_x = K$

$$\delta = \Delta\, l = \frac{K l}{F \cdot E},$$ also nach Gl. 6 auch

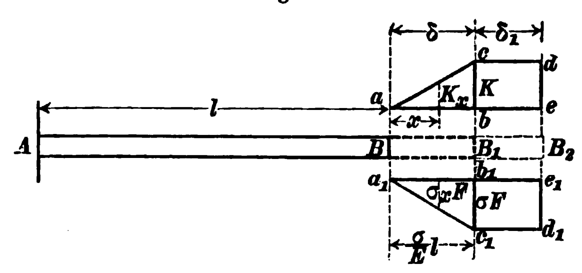
6a) $$\mathfrak{A}_a = \frac{K \cdot \delta}{2}.$$

Die Ausdrücke für $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_a$ (Gl. 4 u. 6) lassen sich ohne weiteres aus der Fig. 11 entnehmen. Dreieck $a\, b\, c$ stellt die äufsere und $a_1\, b_1\, c_1$ die innere Formänderungsarbeit dar. Wird nun, nachdem die Kraft K_x ihren Gröfstwert K erreicht hat und in dieser Gröfse wirksam bleibt, durch irgend eine andere Ursache, etwa durch eine zweite Längskraft K_1, durch Wärmedehnung oder durch Nachgiebigkeit der Befestigung in A eine Verschiebung δ_1 ihres Angriffspunktes B_1 herbeigeführt, so leistet sie eine äufsere Verschiebungsarbeit von der Gröfse

7) $$\mathfrak{A}_a^v = K \cdot \delta_1,$$

geometrisch ausgedrückt durch das Rechteck $b\, c\, d\, e$ Fig. 11.

Fig. 11.



Ist δ_1 eine elastische Längenänderung des Stabes durch eine zweite Längskraft K_1 herbeigeführt, so hat man mit $\sigma_1 = \frac{K_1}{F}$

$\delta_1 = \frac{\sigma_1}{E}(l + \delta) = \frac{K_1}{F \cdot E}(l + \delta)$, wofür, da δ gegen l sehr klein ist, genau genug gesetzt werden kann $\delta_1 = \frac{K_1\, l}{F \cdot E}$.

Damit schreibt sich Gl. 7 auch

$$\text{7a)}\qquad \mathfrak{A}_a^v = \frac{K \cdot K_1 \cdot l}{F \cdot E}.$$ Wird $K_1 = K$, so ist

$$\text{7b)}\qquad \mathfrak{A}_a^v = \frac{K^2 \cdot l}{F \cdot E}.$$

Die Verschiebungsarbeit einer Kraft ist daher doppelt so grofs als die Formänderungsarbeit, welche durch die von der Kraft selbst hervorgerufene Formänderung entsteht und welche hinfort als „wirkliche Formänderungsarbeit“ der Kraft bezeichnet werden möge.

Mit $K = \sigma \cdot F$ und $K_1 = \sigma_1 F$ erhält man aus Gl. 7a

$$\text{8)}\qquad \mathfrak{A}_i^v = -\frac{\sigma \sigma_1 \cdot F \cdot l}{E} = -\sigma \sigma_1 \frac{V}{E}.$$

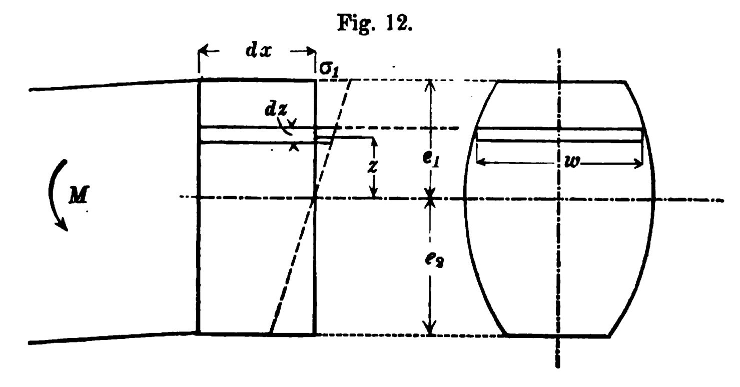
In der Form der Gl. 8 verdient die Arbeit die Bezeichnung innere Verschiebungsarbeit. Mit $\sigma_1 = \sigma$ wird

$$\text{8a)}\qquad \mathfrak{A}_i^v = -\frac{\sigma_2 \cdot V}{E}.$$

2. Für ein Biegungsmoment.

Ein von zwei parallelen Querschnitten im Abstande dx begrenztes Stabelement nimmt unter der Wirkung eines Momentes M abgestumpfte Keilform an (vergl. Fig. 12 und Bd. I S. 81). Ein

Fig. 12.



Teilchen von der Höhe dz der Breite w, also dem Volumen $dx \cdot dz \cdot w$ im Abstande z von der Nullinie leistet beim Eintreten der dort herrschenden Spannung σ nach Gl. 4 S. 12 eine innere Formänderung

$$\text{1)}\qquad d\,d\mathfrak{A}_i = -\overset{\text{(mittl. Kraft)}}{\frac{w \cdot dz \cdot \sigma}{2}} \cdot \overset{\text{(Arbeitsweg)}}{\frac{dx \cdot \sigma}{E}}.$$

Mit $\sigma = \sigma_1 \frac{z}{e_1}$ und durch Integration folgt

$$2)\qquad d\mathfrak{A}_i = -\frac{dx \cdot \sigma_1^2}{2E \cdot e_1^2} \cdot \int_{-e_2}^{+e_1} dz\, z^2 \cdot w = -\frac{dx \cdot \sigma_1^2 \cdot J}{2E e_1^2},$$

worin σ_1 die Randspannung und J das Trägheitsmoment des Querschnitts bezeichnet. Für die ganze Stablänge erhält man

$$3)\qquad \mathfrak{A}_i = -\int_0^l \frac{dx \cdot \sigma_1^2 \cdot J}{2E e_1^2}.$$

Da $\sigma_1 = \frac{M \cdot e_1}{J}$, so erhält man aus Gl. 3 die Formänderungsarbeit, ausgedrückt durch das Moment M der äufseren Kräfte zu

$$4)\qquad \mathfrak{A}_a = \int_0^l \frac{dx \cdot M^2}{2EJ}.$$

Nach Bd. I S. 114 ist der Winkel $d\alpha$, welchen die das Stabelement von der Länge dx begrenzenden, vor der Biegung parallelen Schnittebenen nach Eintritt derselben miteinander einschliefsen $d\alpha = \frac{M \cdot dx}{JE}$. Damit schreibt sich Gl. 4

$$4a)\qquad \mathfrak{A}_a = \int \frac{M \cdot d\alpha}{2},$$ worin $\frac{M}{2}$ als mittlere arbeitende Kraft und $d\alpha$ als Arbeitsweg derselben anzusehen ist.

Erfahren die Stabteile, nachdem ihre elastischen Dehnungen mit den durch das Moment M hervorgerufenen Spannungen σ in voller Gröfse eingetreten sind, durch eine andere Ursache, etwa ein hinzutretendes zweites Moment M' noch eine weitere Dehnung, so leisten dabei die schon vorhandenen Spannkräfte $w\,dz \cdot \sigma$ (Gl. 1) eine Verschiebungsarbeit von der Gröfse

$$dd\mathfrak{A}_i = -\underset{\text{(Kraft)}}{w \cdot dz \cdot \sigma} \cdot \underset{\text{(Weg)}}{\frac{\sigma'}{E} \cdot dx},$$

worin σ' dem Moment M' entspricht. Mit $\sigma = \frac{\sigma_1 \cdot z}{e_1}$ und $\sigma' = \frac{\sigma_1' \cdot z}{e_1}$, erhält man durch doppelte Integration

$$5)\qquad \mathfrak{A}_i^v = -\int_{-e_2}^{+e_1} w \cdot z^2 \cdot dz \int_0^l \frac{dx \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_1'}{E}.$$

Da $\int_{-e_2}^{+e_1} w \cdot z^2 dz = J$ und die Randspannungen $\sigma_1 = \frac{M \cdot e_1}{J}$, $\sigma_1' = \frac{M' \cdot e_1}{J}$, so drückt sich die äufsere Verschiebungsarbeit des Moment M aus als

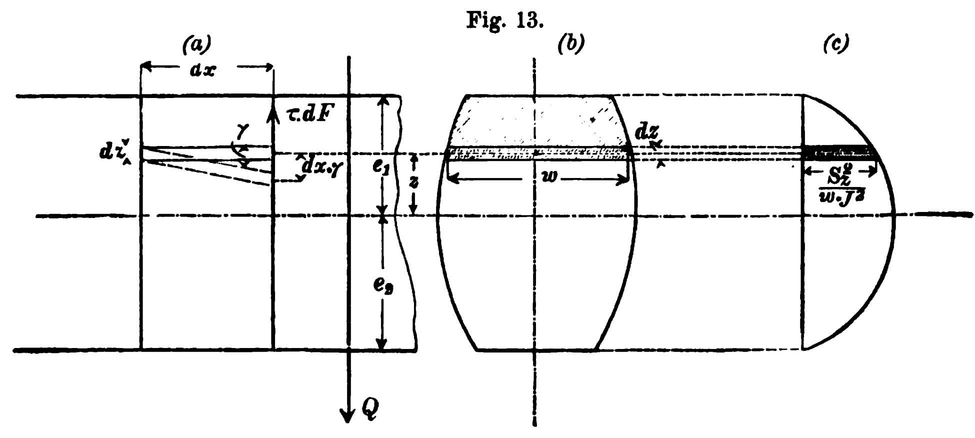
5a) $$A_a^v = \int_0^l M \cdot \frac{M' \, dx}{J \cdot E} \quad \text{oder mit} \quad \frac{M' \cdot dx}{J \cdot E} = d\alpha'$$

5b) $$A_a^v = \int_0^l \cdot M \cdot d\alpha' .$$

3. Für eine Querkraft.

Bei Formänderung durch eine Querkraft leistet diese selbst positive äufsere, der sich der elastischen Gleitung widersetzende innere Scher- oder Gleitwiderstand T, die Mittelkraft aller Scherspannkräfte $\tau \, dF$, negative innere Formänderungsarbeit. Wir betrachten wieder ein durch Parallelschnitte im Abstande dx begrenztes Stabelement. Ein Stabteilchen (Schicht) von der Höhe dz, der Länge dx und der Breite w im Abstande z von der zur Querkraft senkrechten Schwerachse (Y-Achse) werde allmählich um einen Winkel γ verschoben (vergl. Fig. 13). Dabei durchläuft der an

Fig. 13.



demselben in einer Schnittebene tätige, von Null anwachsende Schubwiderstand $\tau \, dF = \tau \cdot w \cdot dz$ einen Weg $dx \cdot \gamma$. Verhältnisgleichheit zwischen Schubspannungen und Gleitungen vorausgesetzt, ist die dabei geleistete innere Widerstandsarbeit

1) $$dd\mathfrak{A}_i = -\overset{\text{(mittl. Kraft)}}{\frac{\tau \cdot w \cdot dz}{2}} \cdot \overset{\text{(Weg)}}{dx \cdot \gamma} .$$

Nach Bd. I S. 70 Gl. 2 ist $\gamma = \frac{\tau}{G}$, mit G als Gleitziffer daher und nach Gl. 1 durch Integration auch

$$2)\qquad \mathfrak{A}_i = -\int_{-e_2}^{+e_1}\int_0^l \frac{w \cdot dz}{2G} \cdot \tau^2 \cdot dx.$$

Drücken wir nach Bd. I S. 181 Gl. 4 die Scherspannung τ durch die sie erzeugende Querkraft aus, indem wir setzen $\tau = \frac{Q \cdot S_z}{w \cdot J}$, worin S_z das statische Moment der in Fig. 13b schraffierten Querschnittsfläche in Bezug auf die Schwerachse y ist, so folgt

$$3)\qquad \mathfrak{A}_a = -\mathfrak{A}_i = \int_{-e_2}^{+e_1} \frac{dz \cdot S_z^2}{w \cdot J^2} \cdot \int_0^l \frac{dx \cdot Q^2}{2G}.$$

In dem ersten nur von der Form und Gröfse des Querschnittes abhängigen Integralwert (Gl. 3) ist das Flächenmoment S_z als Fläche $\times$ Länge eine Länge dritter Potenz, der Zähler $dz \cdot S_z^2$ also eine solche $3 \cdot 2 + 1 = 7^{\text{ter}}$ und der Nenner $w \cdot J^2$ von $1 + 2 \cdot 4 = 9^{\text{ter}}$ Potenz. Man kann den Bruch also als eine reziproke Fläche ansehen und schreiben $\int_{-e_2}^{+e_1} \frac{dz \cdot S_z^2}{w \cdot J} = \frac{1}{k \cdot F}$, worin F die Querschnittsfläche und k einen von ihrer Form abhängigen Festwert bezeichnet. Zur Ermittelung von k denken wir uns den Ausdruck $\frac{S_z^2}{w \cdot J^2}$ für die einzelnen Abstände z ausgerechnet und als Ordinaten von einer Geraden aus aufgetragen (Fig. 13c). Die von der entstehenden Kurve umschlossene Fläche F' ist dann gleich jenem Integralwert. $\int_{-e_2}^{+e_1} \frac{dz \cdot S_z^2}{w \cdot J^2} = F' = \frac{1}{kF}$, also $k = \frac{1}{F \cdot F'}$. Damit nimmt Gl. 3 die Form an

$$4)\qquad \mathfrak{A}_a = \int_0^l \frac{Q^2 \cdot dx}{2kF \cdot G}.$$

Ist $\frac{Q}{2}$ der Mittelwert der allmählich von 0 bis Q anwachsenden Querkraft, δ_q ihr Arbeitsweg, so ist auch

5) $$\mathfrak{A}_a = \frac{Q}{2} \cdot \delta_q .$$

Erfahren die Stabteile, nachdem ihre elastische Gleitung mit den durch die Querkraft Q und in stetem Gleichgewicht mit ihr hervorgerufenen Scherspannungen in voller Gröfse eingetreten ist, durch irgend eine andere Ursache, etwa eine zweite hinzutretende Querkraft Q' noch eine weitere Verschiebung, so leisten dabei die schon vorhandenen Spannkräfte $\tau \, dF$ noch eine Verschiebungsarbeit. Ist τ' die Q' entsprechende Scherspannung und $\gamma' = \frac{\tau'}{G}$ die zugehörige Gleitung, so wird $dd\mathfrak{A}_i^v = -\overset{\text{Kraft}}{\tau \cdot w \cdot dz} \cdot \overset{\text{Weg}}{\frac{\tau' dx}{G}}$, also

6) $$\mathfrak{A}_i^v = -\int_{-e_2}^{+e_1}\int_0^l \frac{w \cdot dz \cdot dx \cdot \tau \tau'}{G}$$

und weiterhin mit $\tau = \frac{Q \cdot S_z}{w \cdot J}$ und $\tau' = \frac{Q' \cdot S_z}{w \cdot J}$

7) $$\mathfrak{A}_a^v = \int_{-e_2}^{+e_1} \frac{dz \cdot S_z^2}{w \cdot J^2} \int_0^l \cdot \frac{Q \cdot Q'}{G} \cdot dx \cdot = \int_0^l \cdot \frac{Q \cdot Q' \cdot dx}{kF \cdot G} .$$

Ist δ_q' die durch Q' herbeigeführte Verschiebung des Angriffspunktes von Q, so hat man auch

8) $$\mathfrak{A}_a^v = Q \cdot \delta_q' .$$

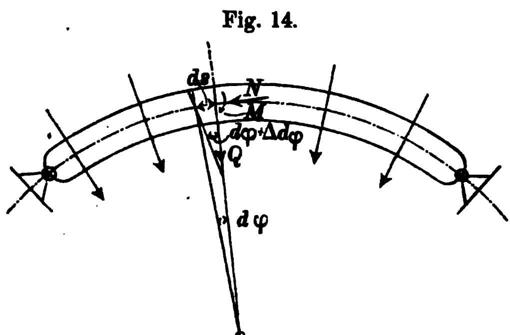
4. Für beliebige äufsere Kräfte in der Ebene des Stabes.

Die äufseren Kräfte halten sich am Stabe das Gleichgewicht und die Mittelkraft R der Kräfte links oder rechts von der Schnittebene schliefse mit dieser einen beliebigen Winkel ein. Wir setzen den Stab gerade oder verhältnismäfsig schwach gekrümmt voraus und denken uns die Mittelkraft R durch eine zentrische Normalkraft N, ein Moment M und eine Querkraft Q ersetzt (Fig. 14). Dann läfst sich, wie später nachgewiesen werden wird, mit hinreichender Genauigkeit die in einer Entfernung z von der zur

Stabebene senkrechten Schwerachse y des Querschnittes in diesem auftretende Normalspannung nach Bd. I S. 227 ausdrücken durch die Gleichung

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M \cdot z}{J}.$$

Fig. 14.



Die derselben entsprechende innere Formänderungsarbeit für ein Stabelement von der Länge ds, gemessen in der Stabachse, ist nach Gl. 4 S. 12

$-\int_{-e_2}^{+e_1} \frac{\sigma^2 \cdot dF \cdot ds}{2E}$ und diejenige der Scherspannungen nach Gl. 2 S. 17, wenn man dx mit ds vertauscht, $-\int_{-e_2}^{+e_1} \frac{w \cdot dz}{2G} \tau^2 \cdot ds$. Im ganzen ist also für das Stabelement

$$1) \qquad d\mathfrak{A}_i = -\int_{-e_2}^{+e_1} \frac{\sigma^2 \cdot dF \cdot ds}{2E} - \int_{-e_2}^{+e_1} \frac{w \cdot dz \cdot \tau^2 \cdot ds}{2G}.$$

Ersetzt man die Spannungen durch die sie erzeugenden äußeren Kräfte und beachtet, daß $\int dF \cdot z = 0$, $\int dF \cdot z^2 = J$, so folgt

$$2) \qquad \mathfrak{A}_a = -\mathfrak{A}_i = \left[\int \frac{N^2 ds}{2FE} + \int \frac{M^2 ds}{2JE} + \int \frac{Q^2 ds}{2k \cdot F \cdot G}\right].$$

Um die Formänderungsarbeit der äußeren Kräfte in der Form Kraft × Weg hervortreten zu lassen, berücksichtigen wir, daß

$\frac{N \cdot ds}{F \cdot E} = \Delta ds$ gleich dem Arbeitswege der Kraft N,

$\frac{M \cdot ds}{J \cdot E} = \Delta d\varphi$ gleich dem Arbeitswege des Momentes M (vergl. S. 15), endlich

$\frac{Q \cdot ds}{k \cdot F \cdot G} = d\delta_q$ gleich dem Arbeitswege der Querkraft Q und erhalten

$$3) \qquad \mathfrak{A}_a = \int_0^l \frac{N \cdot \Delta ds}{2} + \int_0^l \frac{M \cdot \Delta d\varphi}{2} + \int_0^l \frac{Q \cdot d\delta_q}{2}.$$

Da die am Stabende wirkenden äußeren statischen Größen N, M und Q der Mittelkraft R und diese ihren Seitenkräften $P_1, P_2 \ldots P_n$ mechanisch völlig gleichwertig sind, so kann man $\mathfrak{A}_a$ auch als Arbeit dieser Kräfte ansehen. Bezeichnet man demnach den Arbeitsweg von R mit δ_r, von P_1 mit δ_1, — von P_n mit δ_n, so erhält man

$$4) \qquad \mathfrak{A}_a = \Sigma \cdot \frac{P_n \cdot \delta_n}{2} = \int_0^l \frac{N \cdot \Delta\, ds}{2} + \int_0^l \frac{M \cdot \Delta\, d\varphi}{2} + \int_0^l \frac{Q \cdot d\delta_q}{2}.$$

Die entsprechenden Verschiebungsarbeiten sind

$$5) \quad \mathfrak{A}_a^v = -\mathfrak{A}_i^v = 2\,\mathfrak{A}_a = -2\,\mathfrak{A}_i = \Sigma P_n \delta_n = \int_0^l N \cdot \Delta\, ds + \int_0^l M \cdot \Delta\, d\varphi + \int_0^l Q \cdot d\delta_q.$$

c) Arbeitsgesetze in der Elastizitätslehre.

Unter b wurde nachgewiesen, daſs äuſsere Kräfte, wenn sie auf einen elastischen Körper während einer Formänderung desselben mit gleichbleibender Gröſse einwirken, eine Verschiebungsarbeit leisten von der Gröſse

$$1) \qquad \mathfrak{A}_a^v = \Sigma P_n \cdot \delta_n = \int N \cdot \Delta\, ds + \int M \cdot \Delta\, d\varphi + \int Q \cdot d\delta_q,$$

worin δ_n, bezw. Δds, $\Delta d\varphi$ und $d\delta_q$ die Wege bedeuten, welche die äuſseren Kräfte P_n, bezw. die ihnen in Bezug auf die einzelnen Stabquerschnitte gleichwertigen Kräfte N, M und Q in ihren Richtungen während der Formänderung zurücklegen. Diese Wege können unabhängig von den Kräften, müssen aber in stetem Gleichgewicht zwischen den äuſseren und inneren Kräften mögliche, „virtuelle" Wege oder Verrückungen der Angriffspunkte jener Kräfte sein. Die auf der rechten Seite der Gleichung vorkommenden Gröſsen N, M und Q können, in umgekehrter Richtung genommen, auch als Ausdruck der in den einzelnen Stabquerschnitten unter der Wirkung der äuſseren Kräfte P_n auftretenden inneren Spannkräfte, bezw. diesen gleichwertig angesehen werden. Die Summe der drei Integrale stellt daher, negativ genommen, auch die Verschiebungsarbeit der inneren Kräfte dar.

Nimmt man nun zunächst die Verrückungen δ_n, Δds, $\Delta d\varphi$ und $d\delta_q$ als von den Kräften selbst unabhängige bestimmte Arbeitswege dieser letzteren an, so stellt Gl. 1 lediglich eine Abhängigkeit zwischen den Kräften $P_1, P_2 \ldots P_n$ einerseits und N, M

und Q andererseits dar. Läfst man daher eine der äufseren Kräfte, z. B. P_n sich um ∂P_n ändern, während die anderen konstant bleiben, so erfahren auch N, M und Q gewisse Änderungen ∂N, ∂M und ∂Q. Man erhält durch partielle Differentiation der Gl. 1 nach P_n und Lösung für δ_n

$$1)\qquad \delta_n = \int \frac{\partial N}{\partial P_n} \cdot \Delta\, ds + \int \frac{\partial M}{\partial P_n} \cdot \Delta\, d\varphi + \int \frac{\partial Q}{\partial P_n} \cdot d\delta_q.$$

Legt man jetzt den Verrückungen δ_n, Δds, $\Delta d\varphi$ und $d\delta_q$ unter allen möglichen diejenigen Werte bei, welche der elastischen Formänderung durch die wirkenden äufseren Kräfte entsprechen, d. h. denkt man sich Δds lediglich durch N, $\Delta d\varphi$ durch M und $d\delta_q$ durch Q entstanden, so wird $\Delta ds = \frac{\sigma}{E} \cdot ds = \frac{N \cdot ds}{F \cdot E}$, $\Delta d\varphi = \frac{M \cdot ds}{JE}$ und $d\delta_q = \frac{Q \cdot ds}{kF \cdot G}$ (vergl. S. 19) und man erhält

$$2)\qquad \delta_n = \int \frac{\partial N \cdot N \cdot ds}{\partial P_n \cdot EF} + \int \frac{\partial M \cdot M \cdot ds}{\partial P_n \cdot JE} + \int \frac{\partial Q \cdot Q \cdot ds}{\partial P_n \cdot kFG}.$$

Beachtet man endlich, dafs $\partial N \cdot N = \frac{\partial N^2}{2}$, $\partial M \cdot M = \frac{\partial M^2}{2}$ und $\partial Q \cdot Q = \frac{\partial Q^2}{2}$, so läfst sich Gl. 2 auch schreiben

$$3)\qquad \delta_n = \frac{\partial \left\{ \int \frac{N^2 \cdot ds}{2EF} + \int \frac{M^2 \cdot ds}{2JE} + \int \frac{Q^2 \cdot ds}{2kFG} \right\}}{\partial P_n}$$

Der Klammerwert im Zähler des Bruches der Gl. 3 drückt nach Gl. 2 S. 19 die wirkliche dem äufseren Kräfteangriff entsprechende Formänderungsarbeit aus, und zwar negativ genommen die innere, positiv genommen die äufsere. Es möge hier indes von einer Unterscheidung beider abgesehen und der Klammerwert mit $\mathfrak{A}_i$ bezeichnet werden. Man erhält dann

$$\text{I)}\qquad \delta_n = \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial P_n},$$

d. h. in Worten: „Wird ein in statisch bestimmter Weise spannungslos festgehaltener Körper von beliebigen äufseren Kräften ergriffen, so ist die elastische Verschiebung des Angriffspunktes irgend einer der äufseren Kräfte unter der Voraussetzung gleichbleibender

Temperatur gleich der ersten Abgeleiteten der wirklichen Formänderungsarbeit nach der betr. Kraft". Der hier ausgesprochene Satz ist von Costigliano zuerst nachgewiesen und wird nach ihm benannt.

Handelt es sich um die elastische Drehung $\Delta\alpha$ einer Schnittebene, in welcher ein Moment M_n wirkt, so kann man dieses als durch ein Kräftepaar P_n am Hebelsarm r_n entstanden ansehen. Es ist dann $P_n = \frac{M_n}{r_n}$ und der Arbeitsweg von P_n ist $\delta_n = r_n \Delta\alpha$. Damit nimmt Gl. II die Form an

Ia) $$\Delta\alpha = \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial M_n}.$$

Mit Hülfe der Gl. I u. Ia läfst sich die elastische Bewegung irgend eines Punktes, oder einer Schnittebene des Stabes berechnen. Greift in denselben zufällig eine Kraft P_n oder ein Moment M_n nicht an, so nimmt man den augenblicklichen Wert dieser veränderlich gedachten Gröfsen im Ausdruck für $\mathfrak{A}_i$ gleich Null oder durch Null gehend an.

Wird der bereits in statisch bestimmter Weise unterstützte Stab oder Balken noch weiter festgehalten, so wird sein äufserer Gleichgewichtszustand statisch unbestimmt, und die an den weiter festgehaltenen Stellen auftretenden Stützkräfte und Stützmomente sind als statisch unbestimmte Gröfsen anzusehen. Für sie gilt indes, wie für alle äufseren Kräfte, die Gl. I. Ruht ihr Angriffspunkt oder ihre Angriffsebene während der Formänderung, d. h., ist die Stützung in ihnen eine starre, so ist für sie $\delta_n = 0$ bezw. $\Delta\alpha = 0$ und man erhält aus Gleichung I

II) $$\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial X} = 0,$$

d. h. in Worten: „Die Abgeleitete der Formänderungsarbeit nach einem statisch unbestimmten Stützwiderstande ist gleich Null". Gl. II läfst sich auch dahin deuten, dafs X in dem allgemeinen Ausdrucke für die Formänderungsarbeit denjenigen Wert hat, für welchen die Arbeit ein Gröfst- oder Kleinstwert wird. Hier kann nur der letztere in Frage kommen, weil $\mathfrak{A}$ ohne Rücksicht auf die Festigkeit des Stoffes einen endlichen Gröfstwert nicht haben kann, vielmehr mit X ins Unendliche wachsen würde. Uebrigens ist auch leicht ersichtlich,

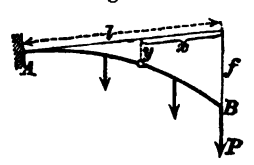
dafs $\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial X^2} = \frac{\partial \delta}{\partial X}$ nur positiv sein kann, wodurch gleichfalls der Kleinstwert von $\mathfrak{A}$ angezeigt wird.

Gl. II wird vielfach mit Vorteil zur Bestimmung statisch unbestimmter Stützwiderstände benutzt.

Anwendungen.

Beispiel 1: Ein einseitig eingespannter Stab ist beliebig lotrecht belastet. Die Verrückung f seines Endpunktes B gegen die Tangente in A soll berechnet werden (Fig. 15). Nach Gl. I ist $f = \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial P}$, unter P eine in B angreifende Einzellast verstanden. Nach Gl. 2 S. 19 ist

Fig. 15.



$$\mathfrak{A}_i = \int \frac{M^2 dx}{2JE} + \int \frac{Q^2 \cdot dx}{2kF \cdot G}.$$

Sowohl das Moment M als die Querkraft Q haben wir uns aus zwei Teilen bestehend zu denken, von denen indes nur einer von P abhängt, der andere M_0 bezw. Q_0 aber von P unabhängig ist; beide sind also hier Festwerte. Mit $M = M_0 + P \cdot x$ und $Q = Q_0 + P$ erhalten wir

$$\mathfrak{A}_i = \int \frac{(M_0 + P \cdot x)^2 dx}{2JE} + \int \frac{(Q_0 + P)^2 dx)}{2kFG}$$

und daraus nach Gl. I durch Differentiation nach P

$$f = \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial P} = \int \frac{(M_0 + P \cdot x) x\, dx}{JE} + \int \frac{(Q_0 + P)\, dx}{kFG} = \int \frac{M \cdot x\, dx}{JE} + \int \frac{Q \cdot dx}{kFG}.$$

Läfst man die Mitwirkung der Querkraft aufser acht, so erhält man $f = \int \frac{Mx\,dx}{JE}$, wie Bd. I S. 114 Gl. 2 bereits nachgewiesen.

Ist die Belastung des Stabes eine gleichmäfsig verteilte p für die Längeneinheit, der Querschnitt desselben ein Rechteck von gleichbleibenden Abmessungen $b \times h$, also

$$J = \frac{bh^3}{12} \text{ und } \frac{1}{kF} = \int \frac{S_z^2\, dz}{b \cdot J^2} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{9}{4} \cdot \frac{(h^2 - 4z^2)^2\, dz}{b \cdot h^6} = \frac{6}{5bh},$$

so erhält man mit $M = \frac{px^2}{2}$ und $Q = px$, $f = \int_0^l \frac{px^3 dx}{2JE} + \int_0^l \frac{px\,dx}{kFG}$. Setzt

man $G = 0{,}4\,E$ und führt die Integration aus, so ergibt sich

$$f = \frac{3}{2}\cdot\frac{pl^4}{bh^3E} + \frac{3}{2}\cdot\frac{pl^2}{bhE} = \frac{3}{2}\cdot\frac{pl^2}{bhE}\left(\left(\frac{l}{h}\right)^2 + 1\right).$$

Der zweite Summand in der Klammer drückt den Anteil der Querkraft aus. Für die in der Anwendung meist vorkommenden Verhältnisse $\frac{l}{h}$ ist er verschwindend klein gegen den der Biegung entsprechenden ersten Teil. Beispielsweise würde für $\frac{l}{h} = 8$ der Anteil der Querkraft $\frac{1}{64}$ für $\frac{l}{h} = 10$ $^1/_{100}$ ausmachen.

Gröſser als bei dem hier als Querschnitt angenommenen vollen Rechteck fällt der Anteil der Querkraft an der Formänderung bei den sogenannten ausgesparten Querschnitten z. B. beim I-Querschnitt aus. Wie Bd. I S. 186 nachgewiesen, kann bei diesem Querschnitt mit hinreichender Genauigkeit angenommen werden, daſs der Schubwiderstand nur von dem Steg geleistet wird. Ist F_s dessen Querschnitt, so ergibt sich die mittlere Schubspannung zu $\tau_m = \frac{Q}{F_s}$ und die Gleitung zweier Querschnitte im Abstande dx voneinander zu $\gamma . dx = \frac{\tau_m}{G}\cdot dx = \frac{Q}{GF_s}\cdot dx$. Mit $Q = px$ erhält man die von der Querkraft herrührende Verschiebung des Endquerschnittes gegen den Einspannungsquerschnitt zu $\int \frac{Q\cdot dx}{GF_s} = \int_0^l \frac{px\cdot dx}{GF_s}$ und die Gesamtverrückung

$$f = \int_0^l \frac{px^3\cdot dx}{2JE} + \int_0^l \frac{px\cdot dx}{GF_s} = \frac{pl^4}{8JE} + \frac{pl^2}{2G\cdot F_s}.$$

Ist im gegebenen Falle h die Höhe des I-Querschnittes, $0{,}4\,h$ seine Flantschbreite, $0{,}06\,h$ die Flantschdicke und $0{,}04\,h$ die Stegdicke, so ist $F_s = 0{,}04\,h^2$ und $J = 0{,}013\,h^4$. Damit wird $f = \frac{pl^4}{8\cdot 0{,}013\,h^4\cdot E} + \frac{pl^2}{2\cdot 0{,}4\,E\cdot 0{,}04\,h^2}$ $= \frac{pl^2}{h^2\cdot E}\left(9{,}6\cdot\left(\frac{l}{h}\right)^2 + 31{,}2\right)$. Für $\frac{l}{h} = 8$ ist hier der durch das zweite Glied der Klammer ausgedrückte Anteil der Querkraft $^1/_{20}$ der ganzen Verrückung und für $\frac{l}{h} = 10$ dagegen $^1/_{31}$, also verhältnismäſsig um so geringfügiger je gröſser $\frac{l}{h}$. Für mittlere Werte von $\frac{l}{h}$ und, wenn es auf einen sehr hohen Grad von Genauigkeit nicht ankommt, kann daher der Anteil der Querkraft an der elastischen Verrückung auſser acht bleiben.

Beispiel 2: Die Durchbiegung f eines in seiner Mitte von einer Einzellast P ergriffenen zweifach gestützten prismatischen Balkens soll berechnet werden. Wir benutzen Gl. 2 S. 11 $\mathfrak{A}_a - \mathfrak{A}_i = 0$. Darin ist $\mathfrak{A}_a = \frac{P}{2}\cdot f$ und

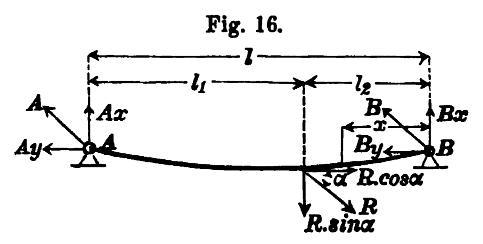
andererseits für jede Balkenhälfte die Formänderungsarbeit $= \int_0^{l/2} \frac{M^2 dx}{2JE}$, im

ganzen also $\mathfrak{A}_a = \mathfrak{A}_i = -\int_0^{l/2} \frac{M^2 dx}{JE} = \int_0^{l/2} \frac{\left(\frac{P}{2} \cdot x\right)^2 dx}{JE}$. Daraus folgt

$$\frac{P}{2} \cdot f = \int_0^{l/2} \frac{\left(\frac{P}{2} \cdot x\right)^2 dx}{JE} = \frac{P^2}{4} \cdot \frac{l^3}{24\,JE}$$ und somit $f = \frac{Pl^3}{48\,JE}$ wie Bd. I S. 118.

Beispiel 3: Ein gerader prismatischer Stab ist an seinen Enden A und B drehbar festgehalten und in einer Symmetrieebene mit der Stabachse in beliebiger Neigung α gegen diese von einer Kraft R ergriffen (Fig. 16). Welche Stützkräfte haben die Punkte A und B im Gleichgewicht der äußeren Kräfte zu leisten?

Fig. 16.



$R \cos\alpha$ und $R \sin\alpha$ sind die Seitenkräfte von R in der Richtung der Stabachse und senkrecht dazu. Die Seitenkräfte der Stützkräfte A und B in denselben Richtungen mögen mit A_x, A_y, B_x und B_y bezeichnet werden. Zu ihrer Bestimmung reichen die drei statischen Gleichgewichtsbedingungen nicht aus, der Zustand des Stabes ist einfach statisch unbestimmt und B_y werde als statisch unbestimmte Größe angesehen.

Ihre Berechnung soll mit Hilfe der Gleichung II $\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial B_y} = 0$ erfolgen, worin bei der Bildung von $\mathfrak{A}_i$ nur die Kräfte in der Richtung der Stabachse in Betracht kommen, weil B_y mit diesen für sich im Gleichgewicht steht. Auf der Strecke l_2 wirkt nur B_y als formändernde Längskraft, auf derjenigen l_1 dagegen $B_y - R\cos\alpha$. Die Formänderungsarbeit in der Richtung der Stabachse ist danach gemäß Gl. 6 S. 13 $\mathfrak{A}_i = \frac{B_y^2 \cdot l_2}{2F \cdot E} + \frac{(B_y - R\cos\alpha)^2 l_1}{2\,F \cdot E}$. Daraus folgt nach Gl. II S. 22

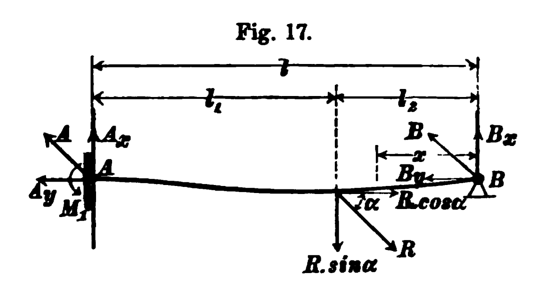
$$\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial B_y} = \frac{B_y l_2}{F \cdot E} + \frac{(B_y - R\cos\alpha)\,l_1}{F \cdot E} = 0, \qquad B_y = \frac{R \cdot \cos\alpha \cdot l_1}{l_1 + l_2} = \frac{R \cdot \cos\alpha \cdot l_1}{l}.$$

Aus der Nullgleichheit der Kräfte in der Richtung der Stabachse $A_y + B_y - R\cos\alpha = 0$ folgt ferner $A_y = \frac{R\cos\alpha \cdot l_2}{l}$. Die Kräfte A_x und B_x

erhält man aus den Momentengleichungen in Bezug auf A und B zu $A_x = \frac{l_2 \cdot R \sin\alpha}{l}$, $B_x = \frac{l_1 \cdot R \sin\alpha}{l}$. Damit sind auch die Stützkräfte A und B selbst bekannt. Es wird $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \frac{R \cdot l_2}{l} \cdot \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{R l_2}{l}$ und ebenso $B = \frac{R \cdot l_1}{l}$.

Beispiel 4: Der Stab Beispiel 3 sei bei A fest eingespannt (Fig. 17). Nun ist auch B_x aus der einfachen Gleichung der statischen Momente in Bezug auf A nicht mehr bestimmbar. Der Zustand des Stabes ist zweifach statisch unbestimmt. Wir bestimmen B_x aus der Gleichung $\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial B_x} = 0$, worin $\mathfrak{A}_i$ jetzt nur aus den Kräften senkrecht zur Stabachse gebildet wird, und erhalten

Fig. 17.



$$\mathfrak{A}_i = \int_0^{l_2} \frac{M^2\,dx}{2JE} + \int_{l_2}^{l} \frac{M^2\,dx}{2JE} = \int_0^{l_2} \frac{(B_x \cdot x)^2\,dx}{2JE} + \int_{l_2}^{l} \left[\frac{(B_x \cdot x) - R\sin\alpha\,(x - l_2)}{2JE}\right]^2 dx.$$

Daraus wird nach Gl. II, weil B unverrückbar,

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial B_x} = \int_0^{l_2} \frac{B_x x^2 \cdot dx}{JE} + \int_{l_2}^{l} \frac{B_x x^2 \cdot dx}{JE} - \frac{R\sin\alpha}{JE} \int_{l_2}^{l} x(x - l_2)\,dx = 0,$$

d. i. $$\frac{B_x l^3}{3} - R\sin\alpha \left\{\frac{l^3 - l_2^3}{3} - l_2\left(\frac{l^2 - l_2^2}{2}\right)\right\} = 0 \quad \text{und}$$

$$B_x = R\sin\alpha \left[1 - \frac{3}{2}\frac{l_2}{l} + \frac{1}{2}\left(\frac{l_2}{l}\right)^3\right]$$

$$A_x = R\sin\alpha - B_x = R\sin\alpha \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{l_2}{l} - \frac{1}{2}\left(\frac{l_2}{l}\right)^3\right].$$

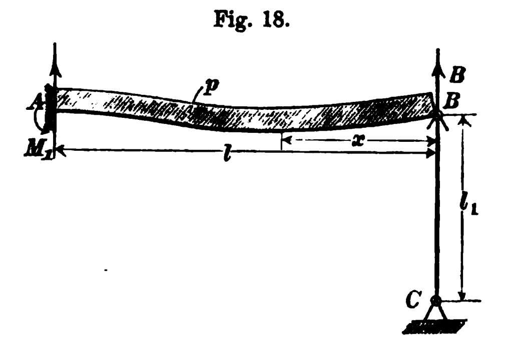
Für A_y und B_y gelten die oben in Beispiel 3 ermittelten Werte. Mit A_x, B_x, A_y und B_y sind auch A und B bekannt.

Das Einspannungsmoment ergibt sich zu

$$M_1 = B_x l - R\sin\alpha\, l_1 = \frac{R\sin\alpha\, l_2}{2}\left\{\left(\frac{l_2}{l}\right)^2 - 1\right\}.$$

Beispiel 5: Der einseitig wagerecht eingespannte Balken Beispiel 4 sei am freien Ende B durch einen lotrechten prismatischen Stab unterstützt und über seine Länge l gleichmäſsig mit p für die Längeneinheit belastet (Fig. 18). Der Stab BC sei in B drehbar mit dem Balken, in C dreh-, aber unverschiebbar mit einem festen Fundament verbunden. Die Stützkräfte A und B sind zu bestimmen.

Fig. 18.



Der äuſsere Gleichgewichtszustand ist einfach statisch unbestimmt und die Stützkraft B werde als statisch unbestimmter Wert mit Hilfe der Gleichung I S. 21 ermittelt. Infolge der elastischen Verkürzung der Stütze BC erfährt der Punkt B eine Abwärtsverschiebung $\delta_b = \frac{l_1 B}{F \cdot E_1}$, wenn E_1 das Elastizitätsmaſs des Stabes und F sein Querschnitt ist. Während der Formänderung arbeitet die Stützkraft B negativ, weil die Bewegung von B g e g e n ihre Richtung stattfindet.

Es muſs daher $\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial B} = -\delta_b$ sein. Nun ist $\mathfrak{A}_i = \int_0^l \frac{M^2\,dx}{2JE}$, worin $M = Bx - \frac{px^2}{2}$.

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial B} = \partial \int_0^l \frac{\left(Bx - \frac{px^2}{2}\right)^2 dx}{\partial B \cdot 2JE} = \int_0^l \frac{Bx^2 - \frac{px^3}{2}}{JE}\,dx = -\delta_b$$

oder, beide Werte von δ_b einander gleich gesetzt,

$\int_0^l \frac{Bx^2 - \frac{px^3}{2}}{JE}\,dx = -l_1 \frac{B}{FE_1}$. Durch Ausführung der Integration und Auflösung der Gleichung für B erhält man

$$B = \frac{{}^3/_8\,pl}{1 + \frac{3JE \cdot l_1}{FE_1 \cdot l^3}}, \qquad A = pl - B = \frac{pl\left({}^5/_8 + \frac{3JE \cdot l_1}{FE_1 \cdot l^3}\right)}{1 + \frac{3JE \cdot l_1}{FE_1 \cdot l^3}}.$$

Mit $l_1 = 0$, also starrer Stützung von B, wird $B = {}^3/_8\,pl$ und $A = {}^5/_8\,pl$. (Vgl. Bd. I S. 134.)

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man Balken und Stützstab als einen in C starr gestützten Körper ansieht. In Bezug auf die in C auftretende Stützkraft B muſs dann $\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial B} = 0$ sein, also Gleichung II zur An-

wendung kommen. $\mathfrak{A}_i$ ist jetzt gleich der Biegungsarbeit des Balkens und der Pressungsarbeit des Stabes.

$$\mathfrak{A}_i = \int \frac{\left(Bx - \frac{p x^2}{2}\right)^2}{2JE} dx + \frac{B^2 l_1}{2F \cdot E_1} \quad \text{und durch Differentiation}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial B} = \int \frac{Bx^2 - \frac{p x^3}{2}}{JE} dx + \frac{B l_1}{F E_1} = 0, \text{ wie oben.}$$

Es soll hier noch vergleichsweise für den Fall starrer Unterstützung bei B die hier auftretende Stützkraft B unter Berücksichtigung der infolge der Querkraft auftretenden elastischen Gleitung bestimmt werden. Die Formänderungsarbeit unter Berücksichtigung der Querkraft ist

$$\mathfrak{A}_i = \int \frac{M^2 \cdot dx}{2JE} + \int \frac{Q^2 \cdot dx}{2k \cdot F \cdot G} = \int \frac{\left(B \cdot x - \frac{p x^2}{2}\right)^2 \cdot dx}{2JE} + \int \frac{(B - px)^2 dx}{2k \cdot F \cdot G}$$

und nach Gl. II S. 22

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial B} = \int_0^l \frac{\left(Bx^2 - \frac{p x^3}{2}\right) dx}{JE} + \int_0^l \frac{(B - px)\, dx}{k \cdot F \cdot G} = 0.$$

Für den rechteckigen Querschnitt ist nach S. 23 $\frac{1}{kF} = \frac{6}{5 \cdot bh}$. Mit $J = \frac{bh^3}{12}$ und $G = 0{,}4\, E$ ergibt die Lösung obiger Gleichung für B

$$B = \frac{pl}{2}\left(\frac{\left(\frac{l}{h}\right)^2 + 1}{\frac{4}{3}\left(\frac{l}{h}\right)^2 + 1}\right).$$ Das zweite Glied im Zähler und Nenner des Bruches entspricht der Querkraft und verschwindet, wenn man diese aufser acht läfst. Es wird dann wieder wie oben $B = \frac{3}{8} pl$. — Für $\frac{l}{h} = 8$ wird $B = \frac{pl}{2}\left(\frac{64 + 1}{\frac{4}{3} \cdot 64 + 1}\right) = 0{,}377\, pl$, gegen $\frac{3}{8} pl = 0{,}375\, pl$ ohne Rücksicht auf die Querkraft. Selbst bei $\frac{l}{h} = 5$ erhält man nur $B = 0{,}38\, pl$. Der Einflufs von Q auf die statisch unbestimmte Gröfse B ist also völlig verschwindend.

Für den in Beispiel 1 S. 23 bezeichneten I-Querschnitt ist die der Querkraft entsprechende Formänderungsarbeit für ein Längenelement dx $d\mathfrak{A} = \frac{Q}{2} \cdot d\delta_q = \frac{Q}{2} \cdot \gamma \cdot dx = \frac{Q}{2} \frac{\tau_m}{G}$, d. i., da die mittlere Gleitspannung $\tau_m = \frac{Q}{F_s}$, $d\mathfrak{A} = \frac{Q^2 \cdot dx}{2 F_s \cdot G}$, worin F_s Querschnitt der Stegfläche ist.

Im ganzen wird $\mathfrak{A}_i = \int \frac{\left(Bx - \frac{px^2}{2}\right)^2 dx}{2JE} + \int \frac{(B-px)^2 dx}{2F_s \cdot G}$ und daraus nach Gleichung II

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial B} = \int_0^l \frac{\left(Bx^2 - \frac{px^3}{2}\right) dx}{JE} + \int_0^l \frac{(B-px)\,dx}{F_s \cdot G} = 0.$$

Mit $J = 0{,}013\,h^4$, $F_s = 0{,}04\,h^2$ (vergl. S. 24) und $G = 0{,}4\,E$ ergibt die Lösung obiger Gleichung $B = \frac{pl}{2}\left(\frac{0{,}3\left(\frac{l}{h}\right)^2 + 1}{0{,}4\left(\frac{l}{h}\right)^2 + 1}\right)$. Verschwindet das der Querkraft entsprechende zweite Glied im Zähler und Nenner, so wird $B = \frac{3}{8}pl$. — Für $\frac{l}{h} = 8$, $B = 0{,}38\,pl$, $\frac{l}{h} = 5$, $B = 0{,}385\,pl$. Auch für diese Querschnittsform ist der Einfluſs von Q auf die statisch unbestimmte Gröſse B also nur ganz unerheblich. Er soll in folgendem daher überhaupt auſser acht bleiben, wenn nicht ausdrücklich seine Berücksichtigung betont wird.

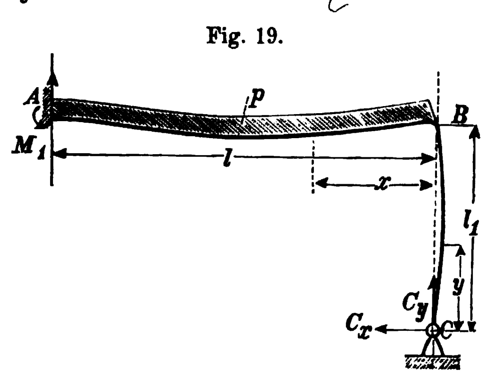
Beispiel 6: Der Stab und der Balken Beispiel 5 seien von gleichem Material und Querschnitt und bei B ununterbrochen miteinander verbunden (Fig. 19). Die wagerechte Strecke AB ist wieder mit p für die Längeneinheit belastet. Der äuſsere Gleichgewichtszustand ist nun zweifach statisch unbestimmt, weil die Stützkraft C in C nun im allgemeinen nicht mehr in die Richtung der Stabachse BC fällt, sondern irgend eine geneigte Richtung annimmt. Ihre lot- und wagerechten Seitenkräfte C_y und C_x mögen als statisch unbestimmte Gröſsen angenommen werden. Die Formänderungsarbeit für das Stabende BC ist dann nach Gl. 2 S. 19 mit $Q = 0$

$$\int_0^{l_1} \frac{M^2 \cdot dy}{2JE} + \frac{C_y^2 \cdot l_1}{2EF}$$

und für das Stabende AB

$$\int_0^{l} \frac{M^2 \cdot dx}{2JE} + \frac{C_x^2 \cdot l}{2EF}.$$

Fig. 19.



Für das Stabende BC ist $M = -C_x \cdot y$ und für dasjenige AB

$$M = C_y \cdot x - C_x \cdot l_1 - \frac{px^2}{2}.$$

Mithin erhält man die gesamte Formänderungsarbeit

$$1)\qquad \mathfrak{A}_i = \int_0^{l_1} \frac{(C_x \cdot y)^2 \cdot dy}{2JE} + \frac{C_y^2 l_1}{2EF} + \int_0^{l} \frac{\left(C_y x - C_x l_1 - p\frac{x^2}{2}\right)^2 dx}{2JE} + \frac{C_x^2 l}{2EF}$$

und daraus, da der Stützpunkt C unverschieblich nach Gleichung II,

$$2)\qquad \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial C_x} = \int_0^{l_1} \frac{C_x \cdot y^2 dy}{JE} - \int_0^{l} \left(C_y x l_1 - C_x \cdot l_1^2 - \frac{px^2 \cdot l_1}{2}\right) \frac{dx}{JE} + \frac{C_x l}{EF} = 0.$$

$$3)\qquad \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial C_y} = \frac{C_y \cdot l_1}{EF} + \int_0^{l} \left(C_y \cdot x^2 - C_x l_1 x - \frac{px^3}{2}\right) \frac{dx}{JE} = 0.$$

Die Ausführung der Integration liefert

$$4)\qquad C_x\left(\frac{l_1^3}{3} + l_1^2 l + l\frac{J}{F}\right) - C_y \frac{l^2 \cdot l_1}{2} = -\frac{pl^3 \cdot l_1}{6} \quad \text{und}$$

$$5)\qquad C_x \frac{l_1 \cdot l^2}{2} - C_y\left(\frac{l^3}{3} + \frac{l_1 \cdot J}{F}\right) = -\frac{pl^4}{8}.$$

Ist der Stabquerschnitt und damit J und F bekannt, auch die Längen l und l_1 und die Belastung p gegeben, so lassen sich aus beiden Gleichungen C_x und C_y leicht bestimmen und sodann weiterhin auch die eintretende Randspannung σ_1 und σ_2 berechnen.

Hat der Stab beispielsweise einen I-Querschnitt von $h = 20$ cm, $J = 2140$ cm⁴, $F = 33{,}5$ cm² und ist $l = 4{,}0$ m, $l_1 = 3{,}0$ m, $p = 1000$ kg für das Meter, so erhält man $C_x = 220$, $C_y = 1750$ kg. Der Stützdruck in A wird dann $4000 - 1750 = 2268$ kg. Das gröfste Biegungsmoment zwischen A und B erhält man im Abstande $\frac{C_y}{p} = \frac{1750}{10} = 175{,}0$ cm von B zu

$$6)\qquad M_{max} = \frac{C_y^2}{2p} - C_x \cdot l_1 = \frac{1750^2}{20} - 220 \cdot 300 = 87\,000 \text{ cm/kg}.$$

Die Randspannung ist $\sigma = \frac{87000 \cdot 20}{2140 \cdot 2} = 410$ at. Im Einspannungsquerschnitt bei A ist

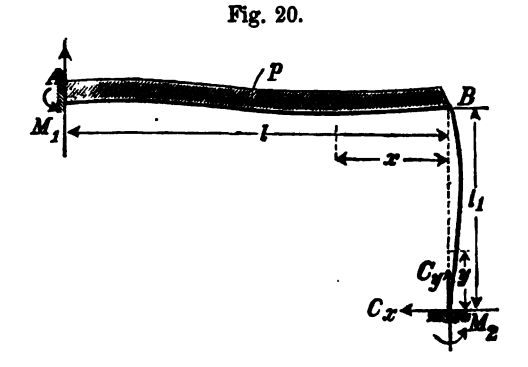
$$7)\qquad M_1 = C_y \cdot l - \frac{p \cdot l^2}{2} - C_x \cdot l_1 = 1750 \cdot 400 - \frac{10 \cdot 400^2}{2} - 207 \cdot 300 = -166\,000 \text{ cm/kg},$$

woraus die Randspannung $\sigma = \frac{166\,000 \cdot 20}{2140 \cdot 2} = 780$ at.

Umgekehrt läfst sich auch mit Hilfe der Gleichungen 4—7 für eine gegebene Randspannung σ eine der Querschnittsabmessungen bestimmen, wenn die übrigen gegeben sind.

Beispiel 7: Ist der Balken Beispiel 6 auch bei C fest eingespannt, so kommt hier als dritte statisch unbestimmte Gröſse noch das Einspannungs-

Fig. 20.



moment M_2 hinzu, und der Gleichgewichtszustand des Stabes wird damit dreifach statisch unbestimmt. (Fig. 20.) Die Arbeitsgleichung lautet

$$1)\quad \mathfrak{A}_i = \int_0^{l_1} \frac{(M_2 - C_x \cdot y)^2 dy}{2JE} + \frac{C_y^2 \cdot l_1}{2EF} + \int_0^{l} \frac{\left(C_y \cdot x - C_x \cdot l_1 - \frac{px^2}{2} + M_2\right)^2 dx}{2JE} + \frac{C_x^2 \cdot l}{2EF}.$$

Daraus durch teilweise Differentiation in Bezug auf C_x, C_y und M_2

$$2)\quad \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial C_x} = -\int_0^{l_1} \frac{(M_2 \cdot y - C_x \cdot y^2)\, dy}{JE} - \int_0^{l} \frac{\left(C_y x \cdot l_1 - C_x \cdot l_1^2 - \frac{px^2 l_1}{2} + M_2 l_1\right) dx}{JE} + \frac{C_x \cdot l}{EF} = 0.$$

$$3)\quad \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial C_y} = \frac{C_y \cdot l_1}{EF} + \int_0^{l} \frac{\left(C_y \cdot x^2 - C_x \cdot l_1 x - \frac{px^3}{2} + M_2 x\right) dx}{JE} = 0.$$

$$4)\quad \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial M_2} = \int_0^{l_1} \frac{(M_2 - C_x \cdot y)\, dy}{JE} + \int_0^{l} \frac{\left(C_y \cdot x - C_x l_1 - \frac{px^2}{2} + M_2\right) dx}{JE} = 0.$$

Sind nach Gl. 2, 3 und 4 C_x, C_y und M_2 bekannt geworden, so erhält man das Einspannungsmoment bei A

$$5)\quad M_1 = C_y \cdot l - \frac{pl^2}{2} - C_x \cdot l_1 + M_2,$$ und das Maximalmoment

zwischen A und B im Abstande $\frac{C_y}{p}$ von B zu

6) $$M_{max} = \frac{C_y^2}{2p} - C_x \cdot l_1 + M_1,$$ während der Stützdruck bei A

7) $$A = pl - C_y$$ wird.

Durch die Gleichungen 2, 3, 4, 5 und 7 sind die das äufsere Gleichgewicht gegenüber der Belastung herstellenden Stützkräfte usw. bestimmt. Ihre Benutzung zur Bestimmung der eintretenden gröfsten Spannungen, oder bei vorgeschriebenen gröfsten Spannungen zur Berechnung der Querschnittsabmessungen geschieht dann nach den in Band I entwickelten Regeln.

Beispiel 8: Ein prismatischer Balken ruht spannungslos auf drei gleichhohen Stützen (Fig. 21), von denen eine fest und zwei beweglich, befindet sich also für jede Belastung in einfach statisch unbestimmtem Gleichgewichtszustande. Welche Stützkräfte entstehen, wenn eine der beiden gleichen Öffnungen mit p für die Längeneinheit gleichmäfsig belastet wird?

Fig. 21.

Als statisch unbestimmte Gröfse werde die Stützkraft A angenommen. Die Stützkraft B ist abwärts gekehrt und zufolge $\frac{pl^2}{2} = (A+B)l \quad B = \frac{pl}{2} - A$. Die Formänderungsarbeit für den linken Arm ist $\int_0^l \frac{\left(Ax - \frac{px^2}{2}\right)^2 dx}{2JE}$ und für den rechten $\int_0^l \frac{B^2 x^2 \cdot dx}{2JE} = \int_0^l \frac{\left(\frac{pl}{2} - A\right)^2 \cdot x^2 dx}{2JE}$,

im ganzen also $$\mathfrak{A}_i = \int_0^l \frac{\left(Ax - \frac{px^2}{2}\right)^2 dx}{2JE} + \int_0^l \frac{\left(\frac{pl}{2} - A\right)^2 \cdot x^2 \cdot dx}{2JE}$$

und daraus
$$\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial A} = \int_0^l \frac{\left(Ax^2 - \frac{px^3}{2}\right) dx}{JE} - \int_0^l \frac{\left(\frac{pl}{2} - A\right) x^2 \cdot dx}{JE} = 0.$$

Die Ausführung der Integration und die Lösung der Gleichung liefert
$$A = \frac{7}{16} pl, \quad B = \frac{pl}{2} - \frac{7}{16} pl = -\frac{pl}{16}, \quad C = pl - B - A = {}^5/_8\, pl.$$

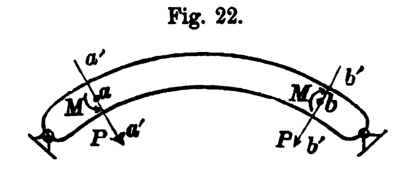
d) Maxwells Satz von der Gegenseitigkeit elastischer Verrückungen.

Geht ein spannungsloser Körper in einen bestimmten Spannungszustand über, so ist damit auch eine bestimmte Formänderung und, wie weiter oben nachgewiesen, eine durch den Spannungszustand allein völlig bestimmte Formänderungsarbeit der inneren Spannkräfte

verbunden. Besteht zwischen diesen und den sie hervorrufenden äufseren Kräften während der Formänderung stets Gleichgewicht, so leisten letztere eine gleich grofse, nur hinsichtlich des Vorzeichens entgegengesetzte äufsere Formänderungsarbeit. Die Gleichheit der äufseren und inneren Formänderungsarbeit ist lediglich an die Bedingung stetigen Gleichgewichtes der äufseren und inneren Kräfte, also an ein allmähliches Anwachsen der ersteren mit den letzteren geknüpft, im übrigen aber unabhängig von der Reihenfolge, in welcher die äufseren Kräfte angreifen und dem Gesetz, nach welchem sie allmählich anwachsen.

Wirken danach auf einen etwa festgehaltenen Körper (Fig. 22) in zwei Punkten a und b einander gleiche Kräfte P in beliebiger Richtung ein, so erfährt der Körper eine bestimmte Formänderung und leistet eine bestimmte innere Formänderungsarbeit, welche dieselbe bleibt, einerlei, ob die Kraft P in a oder in b zuerst angreift. Jede der beiden Kräfte erzeugt nun eine bestimmte Verrückung sowohl ihres Angriffspunktes in ihrer Richtung, als auch des Angriffspunktes der andern Kraft in deren Richtung. In folgendem bezeichne $\delta_{\bar{a}a}$ und $\delta_{\bar{a}b}$ die Verrückung, welche die in a angreifende Kraft in der Richtung der Kraftlinien in a und b erzeugt, $\delta_{\bar{b}b}$ und $\delta_{\bar{b}a}$ die Verrückungen, welche die in b angreifende Kraft in den bezeichneten Richtungen in b und a hervorbringt.

Fig. 22.



Greift nun die Kraft P in a zuerst an, so leistet sie bei allmählicher Steigerung die Arbeit $\frac{P \cdot \delta_{aa}}{2}$ und, während die nachher in b angreifende Kraft P den Punkt a um δ_{ba} verschiebt, noch die Verschiebungsarbeit $P \cdot \delta_{\bar{b}\bar{a}}$. Der Punkt b erfuhr schon während des allmählichen Angriffs der Kraft P in a eine Verschiebung δ_{ab}, da aber P in b noch nicht wirkte, wurde hier keine Arbeit erzeugt. Die einzige Arbeit der zuletzt angreifenden Kraft P in b ist demnach $\frac{P \cdot \delta_{bb}}{2}$ und somit die Gesamtformänderungsarbeit der äufseren Kräfte $\frac{P \cdot \delta_{\bar{a}\bar{a}}}{2} + P \cdot \delta_{ba} + \frac{P \cdot \delta_{bb}}{2}$. Hätte die Kraft P in b zuerst angegriffen, so würde die äufsere Formänderungsarbeit

$\frac{P \cdot \delta_{aa}}{2} + \frac{P \cdot \delta_{bb}}{2} + P \cdot \delta_{ab}$ entstanden sein. Beide aber müssen, da das Endergebnis des Kraftangriffes dieselbe Formänderung und die gleiche innere Formänderungsarbeit ist, einander gleich sein:

$$\mathfrak{A}_a = -\mathfrak{A}_i = \frac{P \cdot \delta_{aa}}{2} + P \cdot \delta_{ba} + \frac{P \cdot \delta_{bb}}{2} = \frac{P \cdot \delta_{aa}}{2} + \frac{P \cdot \delta_{bb}}{2} + P \cdot \delta_{ab},$$

woraus folgt,

$$\delta_{ab} = \delta_{ba},$$

d. h. in Worten: **Wirken zwei gleiche Kräfte in irgend zwei Punkten a und b auf einen festgehaltenen Körper ein, so ist die Verschiebung, welche die in a wirkende Kraft in b in der Richtung der dort tätigen Kraft erzeugt, gleich derjenigen, welche die in b tätige Kraft in a in der Richtung der hier angreifenden Kraft hervorbringt.**

Entsteht die Formänderung nicht durch zwei gleiche Kräfte, sondern durch zwei gleiche in verschiedenen Querschnitten $a'a'$ und $b'b'$ (Fig. 22) angreifende Momente, so gilt eine ähnliche Beziehung.

Dreht M in $a'a'$ diese Schnittebene um einen Winkel $\Delta\varphi_{aa}$, diejenige $b'b'$ um einen Winkel $\Delta\varphi_{ab}$, ferner M in $\overline{bb}$ diese Schnittebene um $\Delta\varphi_{bb}$ und $a'a'$ um $\Delta\varphi_{ba}$, so drückt sich die Formänderungsarbeit, je nachdem M in $a'a'$ oder M in $b'b'$ zuerst allmählich angreift, aus als

$$\mathfrak{A}_a = -\mathfrak{A}_i = \frac{M \cdot \Delta\varphi_{aa}}{2} + M \cdot \Delta\varphi_{ba} + \frac{M \cdot \Delta\varphi_{bb}}{2}$$

$$= \frac{M \cdot \Delta\varphi_{aa}}{2} + \frac{M \cdot \Delta\varphi_{bb}}{2} + M \cdot \Delta\varphi_{ab},$$ woraus wieder folgt

$$\Delta\varphi_{ab} = \Delta\varphi_{ba}.$$

In Worten: **Wirken auf einen festgehaltenen Körper in zwei Schnittebenen $a'a'$ und $b'b'$ einander gleiche Momente ein, so ist der Winkel, um welchen das in $a'a'$ tätige Moment die Ebene $b'b'$ in der Richtung des dort tätigen Momentes verdreht, ebenso grofs als derjenige, um welchen das in $b'b'$ angreifende gleiche Moment die Ebene $a'a'$ in der Richtung des dort wirkenden Momentes verdreht.**

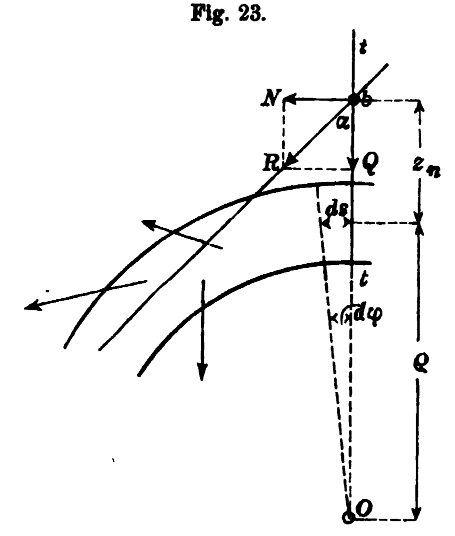
Beide Sätze finden in der Elastizitätslehre sowohl bei der Beurteilung von Formänderungen, als auch von Gleichgewichtszuständen, insbesondere von statisch unbestimmten Bauwerken, fruchtbare Anwendung.

III. Spannungen durch beliebige Kräfte in der Krümmungsebene des Stabes.

a) Allgemeine Beziehungen zwischen den äufseren Kräften und den Normalspannungen.

Die einfach gekrümmte Mittellinie des Stabes weise in spannungslosem Zustande eine beliebige einfache Krümmung auf und je eine der Hauptachsen aller Stabquerschnitte liege in der Stabebene. Der Stab befinde sich im Gleichgewicht und die Mittelkraft R aller äufseren Kräfte einerseits einer Schnittebene tt sei unter einem Winkel α gegen diese geneigt (Fig. 23). Ihre Zerlegung im Schnittpunkte b mit der Schnittebene führt zu den Seitenkräften N normal und Q tangential zu derselben. Erstere mufs durch die im Querschnitt hervorgerufenen Normal-, letztere durch die entstehenden Schubspannungen im Gleichgewicht gehalten werden. Wir beschäftigen uns hier ausschliefslich mit den Normalspannungen; die Schubspannungen lassen sich mit im allgemeinen hinreichender Genauigkeit nach den in Bd. I S. 179 u. f. entwickelten Regeln beurteilen.

Fig. 23.

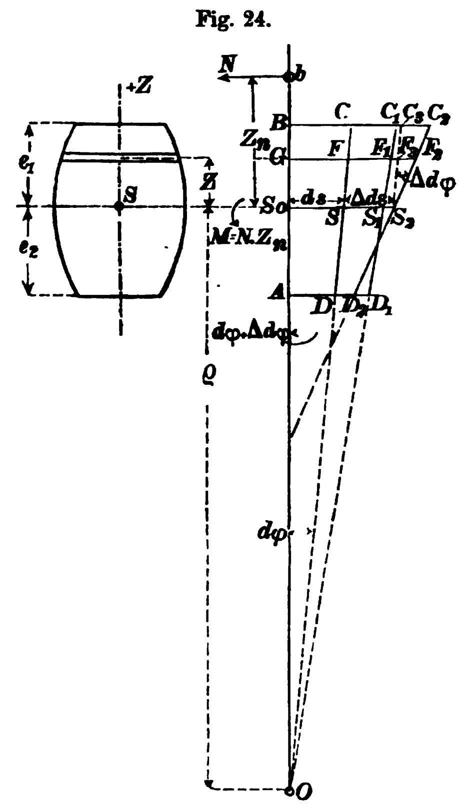


Die Normalkraft N im Abstande z_n vom Querschnittsschwerpunkte wirkend, ist mechanisch gleichwertig einer in jenem Schwerpunkte angreifenden Kraft N und einem Kräftepaar vom Momente $M = N \cdot z_n$.

Wir denken uns nun durch zwei radial, d. h. durch die Krümmungsachse des Stabes gerichtete Ebenen ein Stabelement von der Länge ds, in der Stabmittellinie gemessen, herausgeschnitten, und unterwerfen dasselbe zunächst einer zentrisch, d. h. im Querschnittsschwerpunkte angreifenden Kraft N. Die dadurch entstehenden

Normalspannungen verteilen sich gleichmäfsig über den Querschnitt. Wegen der infolge der Neigung $d\varphi$ der Schnittebenen gegeneinander verschiedenen Länge der Fasern findet nicht, wie beim geraden Stabe, infolge der Dehnung lediglich eine Parallelverschiebung der Schnittebenen gegeneinander, sondern gleichzeitig eine gegenseitige Drehung derselben um einen kleinen Winkel COC_1 statt. Die Absolutverlängerung der gleich gespannten und darum relativ auch gleich gedehnten einzelnen Fasern ist verhältnisgleich ihrer Länge und wie diese daher verhältnisgleich dem Abstande von der Krümmungsachse. Die infolge der Dehnung eingetretene Verrückung der Schnittebene CD gegen AB (Fig. 24) ist daher eine solche, dafs sie auch in ihrer neuen Lage C_1D_1 durch die Krümmungsachse 0 gerichtet ist.

Fig. 24.



Tritt nun die Wirkung des Momentes M hinzu und machen wir die, solange eine Querkraft nicht wirkt, berechtigt erscheinende Annahme, dafs vor dem Kraftangriff ebene Querschnitte auch unter der Wirkung eines Momentes eben bleiben, so geht die Schnittebene CD aus der Lage C_1D_1 in diejenige C_2D_2 über. Ziehen wir nun $S_2C_3 \parallel CD$, so lassen sich zunächst die Dehnungen wie folgt ausdrücken. Die Dehnung ε_0 der Faserschicht in der Stabachse S_0S ist $\varepsilon_0 = \frac{SS_2}{SS_0} = \frac{\Delta ds}{ds}$ und diejenige im Abstande z von der Stabachse

$$\varepsilon = \frac{FF_2}{FG} = \frac{FF_3 + F_2F_3}{FG} = \frac{SS_2 + F_2F_3}{FG}$$ oder auch, da

$SS_2 = \Delta ds = \varepsilon_0 \, ds = \varepsilon_0 \cdot \varrho \cdot d\varphi$, $F_2F_3 = \Delta d\varphi \cdot z$ und $FG = (\varrho + z)\, d\varphi$.

1) $$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 \varrho\, d\varphi + \Delta\, d\varphi \cdot z}{(\varrho + z)\, d\varphi} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varrho + \dfrac{\Delta\, d\varphi \cdot z}{d\varphi}}{\varrho + z}.$$

Das Verhältnis $\frac{\Delta\, d\varphi}{d\varphi}$ drückt die relative Winkeländerung der Schnittebenen gegeneinander aus und werde mit ω bezeichnet. Damit schreibt sich Gl. 1 nach Entwickelung

2) $$\varepsilon = \varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0)\frac{z}{z + \varrho}$$

und die entsprechende Spannung wird

3) $$\sigma = \varepsilon E = E\left[\varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0) \cdot \frac{z}{z + \varrho}\right].$$

Das Gleichgewicht der äufseren und inneren Kräfte in Bezug auf das Stabende einerseits vom Schnitt tt führt nun zu den Gleichungen

4) $$\int \sigma\, dF = N$$

und in Bezug auf die zur Stabebene senkrechte Hauptachse zu der Momentengleichung

5) $$\int \sigma \cdot dF \cdot z = M.$$

Folgt der Stoff dem Hooke'schen Gesetz, ist E konstant für verschiedene Spannungen σ, so erhält man aus den Gl. 2—5

6) $$N = E\int\left[\varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0)\frac{z}{z + \varrho}\right] dF \quad \text{und}$$

7) $$M = E\int\left[\varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0)\frac{z}{z + \varrho}\right] dF \cdot z.$$

Bei Ausführung der Integration wird $\int dF = F$, $\int z \cdot dF = 0$; setzten wir noch die Flächengröfse $\int_{-e_2}^{+e_1} \frac{z}{z + \varrho}\, dF = -kF$ und dementsprechend $\int_{-e_2}^{+e_1} \frac{z^2}{z + \varrho}\, dF = \int_{-e_2}^{+e_1} z \cdot dF - \varrho \int_{-e_2}^{+e_1} \frac{z}{z + \varrho}\, dF = \varrho \cdot kF$, so folgt

8) $$N = EF[\varepsilon_0 - (\omega - \varepsilon_0)k],$$

9) $$M = E(\omega - \varepsilon_0)\varrho k F \quad \text{und daraus weiter}$$

$$\omega - \varepsilon_0 = \frac{M}{E\varrho k F}, \quad \varepsilon_0 = \frac{N}{FE} + (\omega - \varepsilon_0)k = \frac{N}{FE} + \frac{M}{E\varrho F}.$$

Diese Werte in Gl. 3 eingesetzt, erhält man das Gesetz der Spannungsverteilung über den Querschnitt

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{\varrho F} + \frac{M}{\varrho k F} \cdot \frac{z}{z + \varrho}. \tag{10}$$

Darin soll im allgemeinen $+N$ als Zug-, $-N$ als Druckkraft gelten, $+M$ ein auf Verstärkung der Stabkrümmung, $-M$ ein auf Verminderung derselben gerichtetes Moment sein. Die Ordinate z wird in der Richtung nach der konvexen Seite des Stabes positiv angenommen.

Das in Gleichung 10 ausgedrückte Spannungsgesetz stellt geometrisch eine im allgemeinen einfach gekrümmte Fläche bezw. deren Schnittlinie mit der Stabebene dar. Die Spannungsverteilung ist also abweichend von derjenigen in einem geraden Stabe keine lineare, was seine Erklärung in der Längenverschiedenheit der Stabfasern und in der demgemäſs relativ stärkeren Dehnung und Spannung der der konkaven nahe gelegenen kürzeren Faser findet.

Aus Gl. 10 läſst sich, indem man $\sigma = 0$ setzt, die Spannungsnullinie in ähnlicher Weise ableiten wie für den geraden Stab (vgl. Bd. I S. 228 u. 243). In der zur Stabebene senkrechten Schwerpunktsachse des Querschnittes erhält man mit $z = 0$ die Spannung $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{\varrho F} = \frac{N}{F} + \frac{N \cdot z_n}{\varrho F}$, während für den geraden Stab an dieser Stelle $\sigma = \frac{N}{F}$ ist, welcher Wert mit $\varrho = \infty$ auch hier sich ergibt.

Wird $z_n = -\varrho$, d. h. geht die Normalkraft durch die Krümmungsachse 0, so folgt nach Gl. 10 mit $M = -\varrho \cdot N$

$$\sigma = -\frac{N}{kF} \cdot \frac{z}{z+\varrho}. \tag{10a}$$

Mit $z = 0$ wird jetzt $\sigma = 0$, trotz der vorhandenen Normalkraft N, während für den geraden Stab mit $z = 0$, $\sigma = \frac{N}{F}$ wird (vgl. Bd. I S. 227). Bilden die äuſseren Kräfte lediglich ein Kräftepaar vom Moment M, wird also $N = 0$, d. h. liegt der Fall reiner Biegung vor, so ist die Spannung in der zur Stabebene senkrechten Schwerachse $\sigma = \frac{M}{\varrho F}$ und für den geraden Stab mit $\varrho = \infty$ $\sigma = 0$.

Für Stäbe, deren Höhe in der Richtung der Stabebene im Verhältnis zum Krümmungsradius ein gewisses Maß nicht überschreitet, läfst sich Gl. 10 noch wie folgt vereinfachen: Oben war $\int \frac{z^2 dF}{z+\varrho} = \varrho \cdot k \cdot F$ gesetzt, wofür man auch schreiben kann $\int \frac{z^2 \cdot dF}{1+\frac{z}{\varrho}} = \varrho^2 \cdot kF$. Ist nun $\frac{z}{\varrho}$ für alle Flächenelemente dF so klein, dafs man seinen Wert gegen die Einheit vernachlässigen kann, so erhält man $\int_{-e_2}^{+e_1} z^2 dF = J = \varrho^2 \cdot kF$, also $\varrho k F = \frac{J}{\varrho}$.

Damit schreibt sich Gl. 10

$$11)\quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{F\varrho} + \frac{M\varrho}{J} \cdot \frac{z}{z+\varrho} = \frac{N}{F} + \frac{M}{F\varrho} + \frac{M}{J} \cdot \frac{z}{\frac{z}{\varrho}+1}.$$

Welchen Grad der Annäherung Gl. 11 gegenüber der genaueren Gl. 10 für verschiedene Krümmungs- und Querschnittsverhältnisse bietet, wird weiter unten für einige Querschnittsformen nachgewiesen werden.

Für den geraden Stab, mit $\varrho = \infty$ nimmt Gl. 11 die Bd. I S. 227 abgeleitete Form $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M \cdot z}{J}$ an.

Die bei einem allgemeinen Kraftangriff durch die Querkraft $Q = R \cos \alpha$ entstehenden Schubspannungen τ lassen sich nach den Bd. I S. 179 ff. entwickelten Regeln berechnen. Aus ihnen und den nach Gl. 10 oder 11 sich ergebenden Normalspannungen σ erhält man die Hauptspannungen und Materialanstrengungen mit Hilfe der Regeln Bd. I S. 192 ff. Die Richtigkeit der Gl. 10 wird durch das Hinzutreten der Schubspannungen an sich nicht beeinflufst.*)

Es soll nun der Wert k für einige einfache hier hauptsächlich in Frage kommende Querschnittsformen ermittelt werden.

---

*) Auch der Umstand, dafs infolge der auftretenden Schubspannungen die Stabquerschnitte nicht völlig eben bleiben, dürfte als belanglos für die Verteilung der Normalspannungen sein, weil zwei einander unendlich nahe liegende Querschnitte in gleichem Sinne von der Ebene abweichen.

1. Für das Rechteck.

Bei den aus Fig. 25 ersichtlichen Bezeichnungen ist $F = bh$ $dF = b \cdot dz$ und somit

$$k = \frac{-1}{bh} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{z}{\varrho + z} \cdot b \cdot dz = \frac{-1}{h} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{z}{\varrho + z} \cdot dz$$

$$= \frac{-1}{h} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho + z}\right) dz.$$

Fig. 25.

Die Ausführung der Integration liefert

$$\text{12)} \qquad k = -1 + \frac{\varrho}{h} \cdot l_n \cdot \frac{\varrho + \frac{h}{2}}{\varrho - \frac{h}{2}} = -1 + \frac{\varrho}{h} \cdot l_n \frac{1 + \frac{h}{2\varrho}}{1 - \frac{h}{2\varrho}},$$

oder, das Glied $l_n \dfrac{1 + \frac{h}{2\varrho}}{1 - \frac{h}{2\varrho}}$ in eine Reihe entwickelt,

$$k = -1 + \frac{\varrho}{h} \cdot 2 \left[\frac{h}{2\varrho} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2\varrho}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2\varrho}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{h}{2\varrho}\right)^7 + \ldots\right], \text{ d. i.}$$

$$\text{13)} \qquad k = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2\varrho}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2\varrho}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{h}{2\varrho}\right)^6 + \ldots\right].$$

2. Für den Kreis.

Es ist

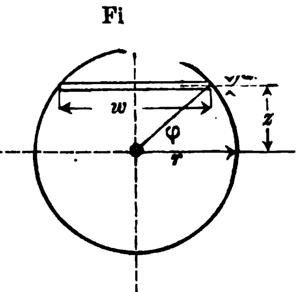
$$k = -\frac{1}{F} \int_{-r}^{+r} \frac{z}{z + \varrho} \cdot dF = -\frac{1}{F} \int_{-r}^{+r} \left(\frac{z}{\varrho} - \frac{z^2}{\varrho^2} + \frac{z^3}{\varrho^3} - \frac{z^4}{\varrho^4} + \frac{z^5}{\varrho^5} - \frac{z^6}{\varrho^6} + \ldots\right) dF.$$

Da wegen der Symmetrie für den Kreis $\int z\,dF = 0$, $\int z^3 dF = 0$ usw., so ist auch

$$\text{14)} \qquad k = \frac{1}{F}\left[\frac{1}{\varrho^2} \cdot \int_{-r}^{+r} z^2 dF + \frac{1}{\varrho^4} \cdot \int_{-r}^{+r} z^4 dF + \frac{1}{\varrho^6} \cdot \int_{-r}^{+r} z^6 dF + \ldots\right].$$

In dem ersten Integral erkennen wir das achsi' moment J des Querschnittes und es ist daher

$$\int_{-r}^{+r} z^2 dF = J = \frac{\pi \cdot r^4}{4}.$$



Um die weiteren Integrale zu bewerten, setzen wir $F = \pi \cdot r^2$ und mit Bezug auf Fig. 26 $z = r \sin\varphi$,

$dz = r\cos\varphi \cdot d\varphi$, $w = 2r\cos\varphi$,

$dF = w \cdot dz = 2r^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot d\varphi$.

Damit wird

$$\int z^4 dF = 2r^6 \cdot \int \sin^4\varphi \cdot \cos^2\varphi \cdot d\varphi = 2r^6 \cdot \int \sin^4\varphi(1 - \sin^2\varphi)\,d\varphi = 2r^6 \left[\int \sin^4\varphi \cdot d\varphi - \int \sin^6\varphi \cdot d\varphi\right],$$

$$\int z^6 dF = 2r^8 \cdot \left[\int \sin^6\varphi\, d\varphi - \int \sin^8\varphi\, d\varphi\right] \quad \text{usw.}$$

Nach den Regeln der Integralrechnung ist

$$\int \sin^n\varphi \cdot d\varphi = -\cos\varphi\left[\frac{1}{n}\sin^{n-1}\varphi + \frac{n-1}{n\cdot(n-2)} \cdot \sin^{n-3}\varphi + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)} \cdot \sin^{n-5}\varphi + \ldots \frac{(n-1)(n-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}{n(n-2)\ldots 4\cdot 2)}\sin\varphi\right] + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}{n(n-2)\ldots 4\cdot 2}\varphi.$$

Danach erhält man

$$\int_{-r}^{+r} z^4 dF = 2r^6\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\, d\varphi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^6\varphi \cdot d\varphi\right] = \frac{2r^6}{\pi}\left(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2} - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\right) = \frac{\pi \cdot r^6}{8},$$

$$\int_{-r}^{+r} z^6 dF = 2r^8\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^6\varphi\, d\varphi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^8 \cdot d\varphi\right] = 2r^8\pi\left(\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2} - \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\right) = \frac{5}{64}\pi \cdot r^8.$$

Diese Werte in Gleichung 14 eingesetzt, wird

$$k = \frac{1}{\pi \cdot r^2}\left[\frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\pi \cdot r^4}{4} + \frac{1}{\varrho^4} \cdot \frac{\pi \cdot r^6}{8} + \frac{1}{\varrho^6} \cdot \frac{5}{64} \cdot \pi \cdot r^8 + \ldots\right] \quad \text{oder}$$

15) $$k = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{r}{\varrho}\right)^4 + \frac{5}{64} \cdot \left(\frac{r}{\varrho}\right)^6 + \ldots$$

1. Für das Rechteck.

Bei den aus Fig. 25 ersichtlichen Bezeichnungen ist $F = bh$ $dF = b \cdot dz$ und somit

$$k = \frac{-1}{bh} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{z}{\varrho + z} \cdot b \cdot dz = \frac{-1}{h} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{z}{\varrho + z} \cdot dz$$

$$= \frac{-1}{h} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho + z}\right) dz.$$

Fig. 25.

Die Ausführung der Integration liefert

$$k = -1 + \frac{\varrho}{h} \cdot l_n \cdot \frac{\varrho + \frac{h}{2}}{\varrho - \frac{h}{2}} = -1 + \frac{\varrho}{h} \cdot l_n \frac{1 + \frac{h}{2\varrho}}{1 - \frac{h}{2\varrho}}, \tag{12}$$

oder, das Glied $l_n \dfrac{1 + \frac{h}{2\varrho}}{1 - \frac{h}{2\varrho}}$ in eine Reihe entwickelt,

$$k = -1 + \frac{\varrho}{h} \cdot 2 \left[\frac{h}{2\varrho} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2\varrho}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2\varrho}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{h}{2\varrho}\right)^7 + \ldots\right], \text{ d. i.}$$

$$k = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2\varrho}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2\varrho}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{h}{2\varrho}\right)^6 + \ldots\right]. \tag{13}$$

2. Für den Kreis.

Es ist

$$k = -\frac{1}{F} \int_{-r}^{+r} \frac{z}{z + \varrho} \cdot dF = -\frac{1}{F} \int_{-r}^{+r} \left(\frac{z}{\varrho} - \frac{z^2}{\varrho^2} + \frac{z^3}{\varrho^3} - \frac{z^4}{\varrho^4} + \frac{z^5}{\varrho^5} - \frac{z^6}{\varrho^6} + \ldots\right) dF.$$

Da wegen der Symmetrie für den Kreis $\int z\,dF = 0$, $\int z^3 dF = 0$ usw., so ist auch

$$k = \frac{1}{F} \left[\frac{1}{\varrho^2} \cdot \int_{-r}^{+r} z^2 dF + \frac{1}{\varrho^4} \cdot \int_{-r}^{+r} z^4 dF + \frac{1}{\varrho^6} \cdot \int_{-r}^{+r} z^6 dF + \ldots\right]. \tag{14}$$

In dem ersten Integral erkennen wir das achsiale Trägheitsmoment J des Querschnittes und es ist daher

$$\int_{-r}^{+r} z^2 dF = J = \frac{\pi \cdot r^4}{4}.$$

Fig. 26.

Um die weiteren Integrale zu bewerten, setzen wir $F = \pi \cdot r^2$ und mit Bezug auf Fig. 26 $z = r \sin\varphi$,

$dz = r \cos\varphi \cdot d\varphi, \quad w = 2r\cos\varphi,$

$dF = w \cdot dz = 2r^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot d\varphi.$



Damit wird

$$\int z^4 dF = 2r^6 \cdot \int \sin^4\varphi \cdot \cos^2\varphi \cdot d\varphi = 2r^6 \cdot \int \sin^4\varphi (1 - \sin^2\varphi) d\varphi = 2r^6 \left[\int \sin^4\varphi \cdot d\varphi - \int \sin^6\varphi \cdot d\varphi\right],$$

$$\int z^6 dF = 2r^8 \cdot \left[\int \sin^6\varphi\, d\varphi - \int \sin^8\varphi\, d\varphi\right] \quad \text{usw.}$$

Nach den Regeln der Integralrechnung ist

$$\int \sin^n\varphi \cdot d\varphi = -\cos\varphi \left[\frac{1}{n}\sin^{n-1}\varphi + \frac{n-1}{n\cdot(n-2)} \cdot \sin^{n-3}\varphi + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)} \cdot \sin^{n-5}\varphi + \ldots \frac{(n-1)(n-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}{n(n-2)\ldots 4\cdot 2)} \sin\varphi\right] + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}{n(n-2)\ldots 4\cdot 2}\varphi.$$

Danach erhält man

$$\int_{-r}^{+r} z^4 dF = 2r^6 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\, d\varphi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^6\varphi \cdot d\varphi\right] = \frac{2r^6}{\pi}\left(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2} - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\right) = \frac{\pi \cdot r^6}{8},$$

$$\int_{-r}^{+r} z^6 dF = 2r^8 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^6\varphi\, d\varphi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^8 \cdot d\varphi\right] = 2r^8\pi\left(\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2} - \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\right) = \frac{5}{64}\pi \cdot r^8.$$

Diese Werte in Gleichung 14 eingesetzt, wird

$$k = \frac{1}{\pi \cdot r^2}\left[\frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\pi \cdot r^4}{4} + \frac{1}{\varrho^4} \cdot \frac{\pi \cdot r^6}{8} + \frac{1}{\varrho^6} \cdot \frac{5}{64} \cdot \pi \cdot r^8 + \ldots\right] \quad \text{oder}$$

$$15) \qquad k = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{r}{\varrho}\right)^4 + \frac{5}{64} \cdot \left(\frac{r}{\varrho}\right)^6 + \ldots$$

3. Für das Trapez.

Man hat wieder

$$k = -\frac{1}{F} \cdot \int \frac{z}{z+\varrho} \cdot dF = -\frac{1}{F}\int\left(1 - \frac{\varrho}{z+\varrho}\right) dF = -1 + \frac{\varrho}{F}\int \frac{dF}{z+\varrho}.$$

Mit Bezug auf Fig. 27 ist

Fig. 27.

$$F = \frac{h(b_1 + b)}{2}, \quad dF = w \cdot dz,$$

$$w = \left[b_1 + \frac{(b - b_1)}{h} \cdot (e_1 - z)\right],$$

also $dF = w \cdot dz$

$$= \left[b_1 + \frac{b - b_1}{h} \cdot e_1 - \frac{b - b_1}{h} \cdot z\right] dz.$$

Damit wird

$$\int \frac{dF}{z+\varrho} = \left(b_1 + \frac{(b - b_1)}{h} \cdot e_1\right) \cdot \int_{-e_2}^{+e_1} \frac{dz}{z+\varrho} - \frac{b - b_1}{h}\int_{-e_2}^{+e_1} \frac{z \cdot dz}{z+\varrho}$$

$$= \left(b_1 + \frac{b - b_1}{h} \cdot e_1\right) \int_{-e_2}^{+e_1} \frac{dz}{z+\varrho} - \frac{b - b_1}{h}\left[\int_{-e_2}^{+e_1} dz - \varrho \int_{-e_2}^{+e_1} \frac{dz}{z+\varrho}\right].$$

Nun ist $\int_{-e_2}^{+e_1} \frac{dz}{z+\varrho} = l_n \frac{\varrho + e_1}{\varrho - e_2}$ und $\int_{-e_2}^{+e_1} dz = e_1 + e_2 = h$, also

$$16) \quad k = -1 + \frac{2\varrho}{h(b + b_1)} \cdot \left[l_n \frac{\varrho + e_1}{\varrho - e_2} \cdot \left(b_1 + \frac{b - b_1}{h} \cdot (e_1 + \varrho)\right) - b + b_1\right].$$

Wird $b_1 = 0$, so geht das Trapez in ein Dreieck über; es wird $e_1 = \frac{2}{3}h$ und $e_2 = \frac{h}{3}$ und demnach

$$17) \qquad k = -1 + \frac{2\varrho}{h}\left[l_n\left(\frac{\varrho + \frac{2}{3}h}{\varrho - \frac{1}{3}h}\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{\varrho}{h}\right) - 1\right].$$

Es möge nun für die ersten beiden Querschnitte nachgewiesen werden, welchen Grad der Annäherung die Benutzung der Gl. 11 gegenüber der genauen Gl. 10 für verschiedene Krümmungsverhältnisse des Stabes bietet.

Beide Gleichungen unterscheiden sich nur durch das dritte Glied. Das Verhältnis β dieses Gliedes nach Gl. 11 zu demjenigen der Gl. 10 ergibt sich zu $\beta = \frac{\rho^2 \cdot F \cdot k}{J}$. Für das Rechteck ist $J = \frac{b h^3}{12}$ und $F = b h$. Hiermit und mit dem Werte für k nach Gl. 13 erhält man $\beta = 1 + \frac{3}{20} \cdot \left(\frac{h}{\rho}\right)^2 + \frac{3}{112}\left(\frac{h}{\rho}\right)^4 + \ldots$

für $\frac{h}{\rho} = 1$ wird $\beta = 1 + 0{,}15 + 0{,}027 + \ldots = 1{,}177$

„ $\frac{h}{\rho} = \frac{1}{2}$ „ $\beta = 1 + 0{,}0375 + 0{,}0016 + \ldots = 1{,}039$

„ $\frac{h}{\rho} = \frac{1}{3}$ „ $\beta = 1 + 0{,}0167 + 0{,}0003 + \ldots = 1{,}017$

„ $\frac{h}{\rho} = \frac{1}{4}$ „ $\beta = 1 + 0{,}0094 + 0{,}0001 + \ldots = 1{,}0095$.

Für den Kreis als Querschnitt ist $J = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$ und $F = \pi \cdot r^2$. Mit dem Wert für k nach Gl. 15 $\beta = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 + \frac{5}{16} \cdot \left(\frac{r}{\rho}\right)^4 + \ldots$

für $\frac{2r}{\rho} = 1$, also $\frac{r}{\rho} = \frac{1}{2}$ wird $\beta = 1 + 0{,}125 + 0{,}02 + \ldots = 1{,}145$

$\frac{r}{\rho} = \frac{1}{3}$ „ $\beta = 1 + 0{,}056 + 0{,}004 + \ldots = 1{,}06$

$\frac{r}{\rho} = \frac{1}{4}$ wird $\beta = 1 + 0{,}031 + 0{,}001 + \ldots = 1{,}032$,

$\frac{r}{\rho} = \frac{1}{6}$ „ $\beta = 1 + 0{,}014 + 0{,}00024 + \ldots = 1{,}0143$,

$\frac{r}{\rho} = \frac{1}{8}$ „ $\beta = 1 + 0{,}008 + 0{,}00008 + \ldots = 1{,}0081$.

Aus vorstehenden Zahlwerten ist ersichtlich, daſs für starke Krümmungsverhältnisse das dritte Glied der Gl. 11 nicht unerheblich gröſsere Spannungen ergibt; für weniger starke Krümmungsverhältnisse $\frac{2r}{\rho}$ bezw. $\frac{h}{\rho}$ wird der Fehler allmählich verschwindend klein, namentlich, wenn man beachtet, daſs er im Verhältnis zur Gesamtspannung σ noch kleiner ausfällt. Die Rechnung nach der Annäherungsgleichung 11 bei Bestimmung der Querschnittsabmessungen führt also zu einer etwas gröſseren Sicherheit.

Für zusammengesetzte Querschnitte oder solche mit weniger einfachen Begrenzungslinien gestaltet sich die analytische Ermittelung der Ziffer k umständlicher. In solchen Fällen bietet das nachstehend erläuterte graphische Verfahren erhebliche Vorzüge und auſserdem noch den Vorteil ganz allgemeiner Verwendbarkeit.

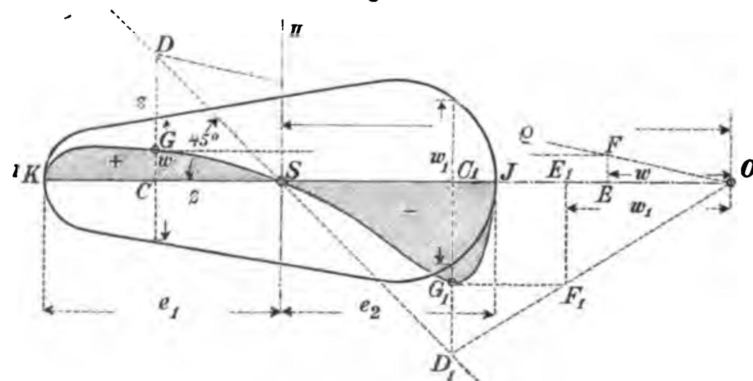
Wie bereits erwähnt, ist $\int_{-e_2}^{+e_1} \frac{z}{z + \varrho} \cdot dF$ eine der Querschnitts-

fläche F verhältnisgleiche Flächengröfse $F_r = -kF$; die einzelnen Flächenelemente dF erscheinen im Verhältnis $\frac{z}{z+\varrho}$ reduziert. Führt man diese Reduktion an den Breiten w der Elemente dF aus und läfst ihre Höhen dz ungeändert, so lassen sich alle reduzierten dF zu einer Fläche derart aneinanderreihen, dafs die Höhe dieser Fläche gleich der Querschnittshöhe $e_1 + e_2 = h$ ist, wobei allerdings den positiven und negativen z-Werten auch positive und negative Flächenwerte entsprechen.

Die Konstruktion gestaltet sich wie folgt:

Um die Reduktion $\frac{z}{z+\varrho}\cdot w$ geometrisch auszuführen, macht man in Fig. 28 SO gleich dem Krümmungshalbmesser ϱ des

Fig. 28.



Stabes, $CD = z$ und $OE = w$. Errichtet man dann in E eine Senkrechte gegen OS, so schneidet die Verbindungsgerade DO auf dieser die reduzierte Breite $EF = \frac{z}{z+\varrho}\cdot w$ ab. Zieht man noch durch F eine Parallele zu OC, so gewinnt man in G einen Punkt der Begrenzungslinie des reduzierten Querschnittes F_r. In gleicher Weise für eine hinreichende Anzahl von z-Werten die zugehörigen Punkte G bestimmt, erhält man die Linie $KGSG_1J$, welche die reduzierte Querschnittsfläche begrenzt. Links der Hauptachse II ergeben sich positive, rechts negative Beiträge zu derselben. Ist F_{r+} die Summe der ersteren, F_{r-} die der letzteren, so ist

$$\int_{-e_2}^{+e_1} \frac{z}{z+\varrho}\cdot dF = F_{r+} - F_{r-} = -kF, \text{ d. h. } kF = F_{r-} - F_{r+} = F_r,$$

wenn unter F_r der absolute Unterschied zwischen F_{r-} und F_{r+} verstanden wird, und $k = \frac{F_r}{F}$.

Damit schreibt sich Gl. 10 S. 38

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{\varrho F} + \frac{M}{\varrho F_r} \frac{z}{z + \varrho}.$$

Anstatt des Produktes $k \cdot F$ erscheint der reduzierte Querschnitt F_r.

Die Konstruktion läßt sich noch vereinfachen, wenn man berücksichtigt, daß die Punkte D auf einer unter 45^0 gegen OS durch den Punkt S gezogenen Geraden liegen und daß sie auf dieser durch den Schnitt mit der betreffenden Querschnittslotrechten CD festgelegt werden.

Die Ermittelung der Flächengröße F_r läßt sich mit einer für alle Anwendungszwecke hinreichenden Genauigkeit nach den bekannten Methoden ausführen.

Bei aus Rechtecken zusammengesetzten Querschnitten wechselt die Breite sprungweise und ist für die einzelnen Rechtecke konstant, wodurch die Konstruktion der reduzierten Fläche F_r sich wesentlich vereinfacht. Für das einfache Rechteck ist die Begrenzungslinie der reduzierten Fläche eine Hyperbel von der Gleichung $y = \frac{b \cdot z}{z + \varrho}$

Fig. 29.

und bei einem aus Rechtecken zusammengesetzten Querschnitte besteht die Begrenzungslinie der reduzierten Fläche aus Teilen verschiedener Hyperbeln.

In Fig. 29 ist die reduzierte Fläche für einen ⊥-Querschnitt dargestellt. Dabei sind folgende Verhältnisse gewählt

$$b_1 = \frac{h}{2},\ b_2 = \frac{h}{8},\ h_1 = \frac{h}{5},\ h_2 = \frac{4}{5}h \text{ und } \varrho = \frac{3}{4}h.$$

Es wird dann $F = 0{,}2\,h^2$, und die Flächenermittelung ergibt $F_{r-} = 0{,}054\,h^2$ und $F_{+r} = 0{,}024\,h^2$, also

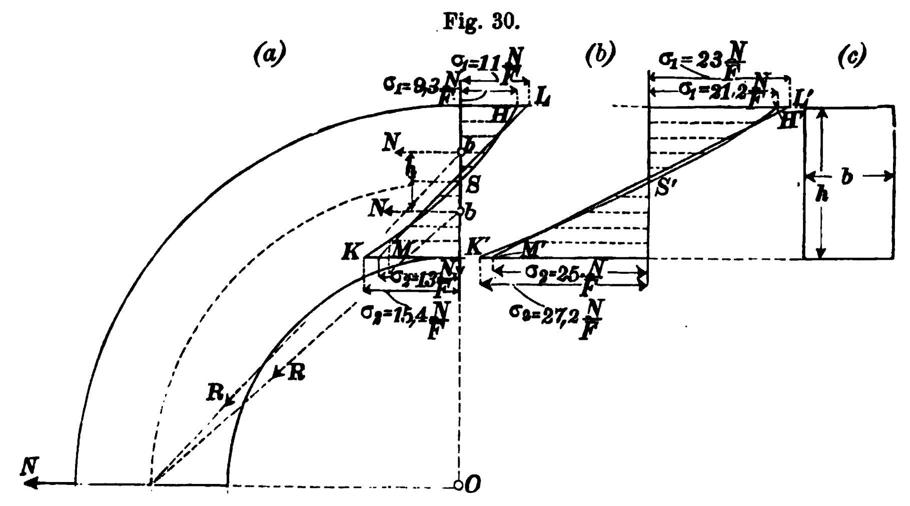
$$F_r = (0{,}054 - 0{,}024)\,h^2 = 0{,}03\,h^2 \text{ und } k = \frac{F_r}{F} = 0{,}15.$$

Anwendungen.

Durch folgende Beispiele möge die Anwendung der abgeleiteten Regeln dargetan und insbesondere auch gezeigt werden, wie grofs für bestimmte Krümmungsverhältnisse der Fehler ausfällt, wenn man den Stab wie einen geraden ansieht und die für diesen geltende Spannungsgleichung $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mz}{J}$ zur Anwendung bringt. Danach wird sich beurteilen lassen, für welche Krümmungsverhältnisse diese einfachere Gleichung noch hinreichende Annäherung ergibt.

Beispiel 1: Ein kreisförmig gebogener, im Querschnitt rechteckiger Stab (Fig. 30) sei an seinem einen Ende wagerecht eingespannt und werde in einem

Fig. 30.



um 90° gegen die Einspannungsebene geneigtem Querschnitte von einer wagerechten Kraft N getroffen. Wie grofs sind die Randspannungen im Einspannungsquerschnitt?

Nach Gl. 10 erhält man mit $M = -\rho \cdot N$, $z = \pm \frac{h}{2}$ und unter Beachtung der Gl. 13

I)
$$\left\{\begin{aligned}\sigma_{1/2} &= \frac{N}{F} - \frac{N \cdot \rho}{F \cdot \rho} - \frac{N \cdot \rho}{F \cdot \rho \cdot k} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{2\rho}{h}} \\ &= -\frac{N}{F} \cdot \frac{1}{\left(1 \pm \frac{2\rho}{h}\right)\left[\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2\rho}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2\rho}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{h}{2\rho}\right)^6 + \ldots\right]}\end{aligned}\right.$$

Nach Gl. 11 wird mit $J = \frac{b h^3}{12} = F \cdot \frac{h^2}{12}$

II)
$$\sigma_{1/2} = \frac{N}{F} - \frac{N \cdot \rho}{F \rho} - \frac{N \cdot \rho^2}{J} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{2\rho}{h}} = -\frac{N}{F} \cdot 12 \left(\frac{\rho}{h}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{2\rho}{h}}.$$

Unter Anwendung der Spannungsgleichung für den geraden Stab wird endlich

III)
$$\sigma_{1/2} = \frac{N}{F} \mp \frac{N \cdot \rho \cdot e}{J} = \frac{N}{F}\left(1 \mp \frac{6 \cdot \rho}{h}\right).$$

Die Ausrechnung für verschiedene Werte von $\frac{\rho}{h}$ ergibt nach

	Gleichung I	II	III
$\frac{\rho}{h} = 1$,	$\sigma_1 = -3{,}4\ \frac{N}{F}$	$-4\ \frac{N}{F}$	$-5\ \frac{N}{F}$
	$\sigma_2 = +10{,}2$ „	$+12$ „	$+7$ „
$\frac{\rho}{h} = 2$,	$\sigma_1 = -9{,}25$ „	$-9{,}6$ „	-11 „
	$\sigma_2 = +15{,}4$ „	$+16{,}0$ „	$+13$ „
$\frac{\rho}{h} = 3$,	$\sigma_1 = -15{,}1$ „	$-15{,}4$ „	$-17{,}0$ „
	$\sigma_2 = +21{,}2$ „	$+21{,}6$ „	$+19{,}0$ „
$\frac{\rho}{h} = 4$,	$\sigma_1 = -21{,}2$ „	$-21{,}3$ „	$-23{,}0$ „
	$\sigma_2 = +27{,}2$ „	$+27{,}4$ „	$+25{,}0$ „
$\frac{\rho}{h} = 10$	$\sigma_1 = -57{,}0$ „	$-57{,}0$ „	$-59{,}0$ „
	$\sigma_2 = +63{,}0$ „	$+63{,}0$ „	$+61{,}0$ „

Nimmt N die entgegengesetzte Richtung an, so kehren sich auch die Vorzeichen σ_1 und σ_2 um, die Absolutwerte der Spannungen bleiben aber dieselben. Die Verteilung der Spannungen σ über den Querschnitt für die beiden Verhältniswerte $\frac{\rho}{h} = 2$ und $\frac{\rho}{h} = 4$, wie sie sich nach Gl. 10 ergibt, ist in Fig. 30a und 30b durch die Linien HSK und $H_1 S_1 K_1$ ersichtlich gemacht, während die Geraden LMN und $L_1 M_1 N_1$ die Verteilung nach der Gleichung $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{J} \cdot z$ darstellen. Die Abweichung der größten Spannungen beträgt für $\frac{\rho}{h} = 4$ 9% und für $\frac{\rho}{h} = 10$ 3,2%.

Beispiel 2: Bei B greife eine äußere Kraft R in solcher Neigung an, daß sie den Einspannungsquerschnitt einmal im Abstande $0{,}1 \cdot \rho$ unterhalb und ein anderes Mal um ebensoviel oberhalb der wagerechten Querschnittshauptachse schneidet. Die Zerlegung in diesem Punkte in der Richtung und

senkrecht zur Einspannungsebene ergebe eine Normalkraft N und eine hier aufser Acht bleibende Querkraft Q. Es ist dann nach Gl. 10 und 11 im ersten Falle (Schnitt unterhalb)

$$\text{I)}\quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_{\frac{1}{2}} &= \frac{N}{F} - \frac{0{,}10\,\rho\cdot N}{\rho\cdot F} - \frac{0{,}10\,\rho\cdot N}{k\cdot\rho\cdot F}\cdot\frac{1}{1\pm\frac{2\rho}{h}} \\ &= \frac{N}{F}\left(0{,}9 - \frac{0{,}10}{\left(1\pm\frac{2\rho}{h}\right)\left[\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2\rho}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{h}{2\rho}\right)^4+\dots\right]}\right), \end{aligned}\right.$$

$$\text{II)}\quad \sigma_{\frac{1}{2}} = \frac{N}{F}\left(0{,}9 - 1{,}2\left(\frac{\rho}{h}\right)^2\frac{1}{1\pm\frac{2\rho}{h}}\right)$$; und für den geraden Stab

$$\text{III)}\quad \sigma_{\frac{1}{2}} = \frac{N}{F} \mp \frac{N\cdot 0{,}1\,\rho}{J/e} = \frac{N}{F}\left(1\mp 0{,}6\cdot\frac{\rho}{h}\right).$$

Für verschiedene Krümmungsverhältnisse $\frac{\rho}{h}$ ergeben sich folgende Randspannungen:

	Nach Gleichung	I	II	III
$\frac{\rho}{h}=1$,	$\sigma_1 =$	$+0{,}56\,\frac{N}{F}$	$+0{,}50\,\frac{N}{F}$	$+0{,}4\,\frac{N}{F}$
	$\sigma_2 =$	$+1{,}94$ „	$+2{,}10$ „	$+1{,}6$ „
$\frac{\rho}{h}=2$,	$\sigma_1 =$	$-0{,}025$ „	$-0{,}06$ „	$-0{,}2$ „
	$\sigma_2 =$	$+2{,}44$ „	$+2{,}50$ „	$+2{,}2$ „
$\frac{\rho}{h}=4$,	$\sigma_1 =$	$-1{,}22$ „	$-1{,}23$ „	$-1{,}4$ „
	$\sigma_2 =$	$+3{,}62$ „	$+3{,}64$ „	$+3{,}4$ „
$\frac{\rho}{h}=10$	$\sigma_1 =$	$-4{,}8$ „	$-4{,}80$ „	$-5{,}0$ „
	$\sigma_2 =$	$+7{,}20$ „	$+7{,}20$ „	$+7{,}0$ „

Liegt der Schnittpunkt der Kraft R_1 bezw. N um $0{,}1\,\rho$ oberhalb der wagerechten Schwerachse, so folgt

$$\text{I)}\quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{0{,}1\,\rho\cdot N}{\rho\cdot F} + \frac{0{,}1\,\rho\cdot N}{k\cdot\rho\cdot F} = \frac{N}{F}\left(1{,}1 + \frac{0{,}1}{\left(1\pm\frac{2\rho}{h}\right)\left[\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2\rho}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{h}{2\rho}\right)^4+\dots\right]}\right),$$

$$\text{II)}\quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{0{,}1\,\rho\cdot N}{F} + \frac{0{,}1\cdot\rho^2}{J}\cdot\frac{1}{1\pm\frac{2\rho}{h}} = \frac{N}{F}\left(1{,}1 + 1{,}2\left(\frac{\rho}{h}\right)^2\frac{1}{1\pm\frac{2\rho}{h}}\right),$$

$$\text{III)}\quad \sigma = \frac{N}{F}\left(1\pm 0{,}6\,\frac{\rho}{h}\right).$$ Die Rechnung ergibt:

	Nach Gleichung	I	II	III
$\frac{\rho}{h}=1$,	$\sigma_1 =$	$+1{,}44\,\frac{N}{F}$	$+1{,}5\,\frac{N}{F}$	$+1{,}6\,\frac{N}{F}$
	$\sigma_2 =$	$+0{,}08$ „	$-0{,}1$ „	$+0{,}4$ „
$\frac{\rho}{h}=2$,	$\sigma_1 =$	$+2{,}02$ „	$+2{,}06$ „	$+2{,}2$ „
	$\sigma_2 =$	$-0{,}44$ „	$-0{,}50$ „	$-0{,}2$ „
$\frac{\rho}{h}=4$,	$\sigma_1 =$	$+3{,}22$ „	$+3{,}23$ „	$+3{,}4$ „
	$\sigma_2 =$	$-1{,}62$ „	$-1{,}64$ „	$-1{,}4$ „
$\frac{\rho}{h}=10$	$\sigma_1 =$	$+6{,}82$ „	$+6{,}82$ „	$+7{,}0$ „
	$\sigma_2 =$	$-5{,}20$ „	$-5{,}20$ „	$-5{,}0$ „

Die Abweichung der gröfsten Spannungen nach Gl. I u. III beträgt für $\frac{\rho}{h}=4$, 5,6 % und für $\frac{\rho}{h}=10$, 2,6 %. Tritt der Schnittpunkt von N mit der Querschnittsebene bis auf $0{,}05\,\rho$ an die zur Stabebene senkrechte Schwerachse heran, und wird das Biegungsmoment dementsprechend kleiner, so sinkt die Abweichung auf ca. 1 % herab.

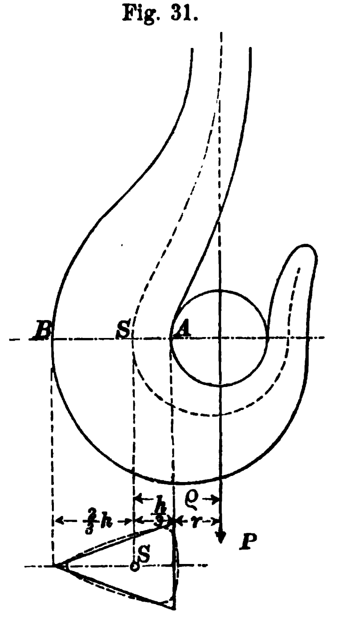
Man erkennt also, dafs, je gröfser das Verhältnis $\frac{\rho}{h}$ wird und je mehr das Moment M gegen die Normalkraft N zurücktritt, mit um so gröfserer Annäherung der Stab als gerade berechnet werden kann.

Für die im Brückenbau in der Form von Bogenträgern vorkommenden gekrümmten Stäbe kann danach meistens von einer Anwendung der Gl. 10 oder 11 abgesehen und die Spannungsverteilung nach den Regeln für gerade Stäbe beurteilt werden.

Beispiel 3: Offener Lasthaken für eine durch seine Krümmungsachse gerichtete Last P (Fig. 31). Der innere Krümmungsradius sei r. In dem wagerechten Schnitte ASB durch die Krümmungsachse haben das Moment M und die Normalkraft N ihre Gröfstwerte. Hier ist $N=P$ und $M=-\rho P$. Nach Gl. 10 also

$$\sigma=\frac{P}{F}-\frac{P\cdot\rho}{F\cdot\rho}-\frac{P\cdot\rho}{\rho\cdot kF}\cdot\frac{z}{z+\rho}=-\frac{P}{kF}\cdot\frac{z}{z+\rho}.$$

Fig. 31.



Der Querschnitt ASB soll als gleichschenkliges Dreieck ausgebildet und die Höhe h desselben zu $2{,}5\,r$ angenommen werden. Es ist dann $\rho=r+\frac{h}{3}=0{,}73\,h$ und nach Gl. 17

$$k=-1+1{,}46\,[l_n\cdot 3{,}5\cdot 1{,}4-1]=0{,}115.$$

Damit wird $\sigma=-8{,}7\,\frac{P}{F}\cdot\frac{z}{z+\frac{2}{3}h}$. An der Innenkante für $z=-\frac{h}{3}$ wird $\sigma_2=+8{,}7\cdot\frac{P}{F}$ und an der Aufsenkante für $z=\frac{2}{3}h$ $\sigma_1=-4{,}35\,\frac{P}{F}$. Ist $P=5000$ kg, die zulässige Randspannung $\sigma_2=750$ at, so erhält man die erforderliche Querschnittsfläche $F=\frac{8{,}7\cdot 5000}{750}=58$ cm². Mit $h=12{,}5$ cm also $r=5$ cm wird $b=\frac{2F}{h}=\frac{2\cdot 58{,}0}{12{,}5}=9{,}3$ cm. Statt des scharfkantig dreieckigen Querschnittes wird eine gewisse Rundung der Ecken und Seiten ausgeführt, wie in Fig. 31 einpunktiert.

Nach Gl. 11 würde mit $J = \frac{h^2 \cdot F}{18}$ (Bd. I S. 21 Gl. 25) die Spannung an der Innenkante $\sigma_2 = 8\,\frac{P}{F}$ und für die Aufsenkante $\sigma_1 = -4{,}55\,\frac{P}{F}$.

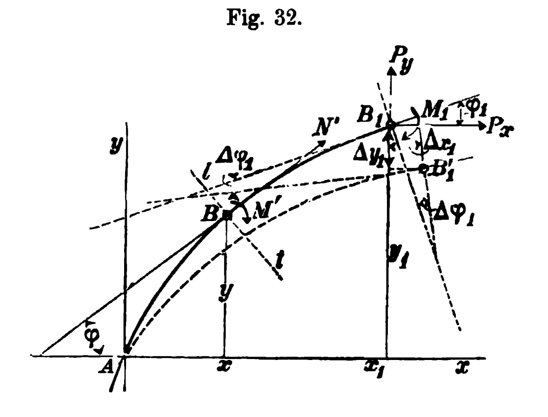
Nach der Regel für den geraden Stab würde hier völlig abweichend $\sigma = \frac{N}{F} - \frac{N \cdot \rho}{J} \cdot z = \frac{N}{F}\left(1 - \frac{18 \cdot \rho}{h^2} \cdot z\right)$ d. i. mit $z = -\frac{h}{3}$, $\sigma_2 = 5{,}38\,\frac{P}{F}$ und mit $z = \frac{2}{3}\,h$, $\sigma_1 = -7{,}75\,\frac{P}{F}$.

b) Formänderung, Dehnung und Biegung.

Von den elastischen Formänderungen sollen hier nur die mit den Normalspannungen entstehenden, d. h. die Dehnung und Biegung verfolgt werden. Unter der Annahme, daſs die angreifenden äuſseren Kräfte mit der Krümmungsebene des Stabes, der „Stabebene" zusammenfallen und je eine der Schwerpunktshauptachsen aller Stabquerschnitte in dieser Ebene liegt, finden alle Dehnungen und Biegungen in der Richtung derselben statt. Die Formänderung der Stabmittellinie besteht also lediglich aus einer gegenseitigen Verrückung ihrer Elemente innerhalb der Stabebene, und mit allen diesen Verrückungen ist auch die Formänderung des Stabes selbst bekannt.

Beziehen wir die Stabmittellinie auf ein in ihrer Ebene liegendes rechtwinkliges Achsenkreuz xy (Fig. 32), dessen Anfangspunkt etwa in die Linie falle, so ergibt sich die Formänderung des Stabes, bezw. seiner Mittellinie aus der Änderung Δx und Δy der Koordinaten und $\Delta \varphi$ des Richtungswinkels der einzelnen Elemente derselben. Zur Berechnung dieser Verrückungen benutzen wir die Castigliano'sche Gl. I S. 21. Wir verfolgen die Bewegung eines beliebigen Punktes der Stabmittellinie mit den Koordinaten x_1 und y_1 von B_1 nach B_1'

Fig. 32.



und die Änderung des Richtungswinkels φ_1 der Tangente daselbst. Denken wir uns zu den tatsächlich wirkenden Kräften in B_1 zwei Kräfte P_x und P_y hinzugefügt, welche diesen Punkt in der positiven x- und y-Richtung zu verschieben streben, und ebenso im Querschnitte bei B_1 ein Moment M_1, das die Tangente an die Stabmittellinie in B_1 rechts herum zu drehen strebt, so tragen diese drei mechanischen Gröfsen zur Formänderungsarbeit $\mathfrak{A}_i$ bei und letztere ist als Funktion jeder von ihnen anzusehen. Nach Gl. I S. 21 ergeben sich daraus die Verrückungen Δx_1, Δy_1 und $\Delta \varphi_1$ zu

$$1)\qquad \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial P_x} = \Delta x_1, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial P_y} = \Delta y_1, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial M_1} = \Delta \varphi_1.$$

Es ist nun zunächst der Wert $\mathfrak{A}_i$ aus den überhaupt wirkenden Kräften abzuleiten.

Auf einen Querschnitt tt mit den Schwerpunktsordinaten x und y und dem Tangentenwinkel der Stabmittellinie φ wirke im ganzen eine Normalkraft N' und ein Moment M'. Dann ergibt sich nach Gl. 10 S. 38 die im Abstande z von der zur Stabebene senkrechten Schwerpunktsachse im Querschnitt tt herrschende Spannung zu $\sigma = \frac{N'}{F} + \frac{M'}{\varrho F} + \frac{M'}{\varrho k F} \cdot \frac{z}{z+\varrho}$. Einem an dieser Stelle gedachtem Körperteilchen dv vom Querschnitt dF und der Länge $ds \cdot \frac{z+\varrho}{\varrho}$ (vergl. Fig. 24) entspricht dabei nach Gl. 4a S. 12 eine Formänderungsarbeit $\frac{dv\,\sigma^2}{2E} = \frac{z+\varrho}{\varrho} \cdot \frac{ds \cdot dF \cdot \sigma^2}{2E}$, worin ds der Abstand der das Teilchen begrenzenden radial gerichteten Schnittebenen, in der Stabmittellinie gemessen, bezeichnet. Der durch jene Schnittebenen begrenzten Körperscheibe kommt daher eine Arbeitsmenge $d\mathfrak{A}_i = \int_{-e_2}^{+e_1} \frac{z+\varrho}{2\varrho E} \cdot ds \cdot dF \cdot \sigma^2$ zu, woraus mit obigem Werte von σ folgt

$$2)\qquad d\mathfrak{A}_i = \frac{ds}{2E} \int_{-e_2}^{+e_1} \left(\frac{N'}{F} + \frac{M'}{\varrho F} + \frac{M'}{\varrho k F} \cdot \frac{z}{z+\varrho}\right)^2 \frac{z+\varrho}{\varrho} \cdot dF.$$

Die Werte N' und M' bestehen aus den von den tatsächlich wirkenden Kräften herrührenden Teilen N, bezw. M und den von den Hülfskräften P_x, P_y und M_1 geleisteten Beiträgen. Zu der

Normalkraft N' leistet P_x den Beitrag $P_x \cos\varphi = P_x \cdot \frac{dx}{ds}$ und P_y den Beitrag $P_y \sin\varphi = P_y \cdot \frac{dy}{ds}$. Zum Moment M' leistet P_x einen Beitrag $P_x \cdot (y_1 - y)$ und P_y einen solchen $-P_y \cdot (x_1 - x)$, während das Moment M_1 in voller Größe nur zu M' beiträgt. Damit wird $N' = N + P_x \cdot \frac{dx}{ds} + P_y \cdot \frac{dy}{ds}$ und $M' = M + M_1 + P_x(y_1 - y) - P_y(x_1 - x)$. Mit diesen Werten erhält man aus Gl. 2 durch Integration für die Stablänge AB_1

$$3)\quad \mathfrak{A}_i = \frac{1}{2E}\int ds \cdot \int_{-e_2}^{+e_1} \left[\left(N + P_x \cdot \frac{dx}{ds} + P_y \cdot \frac{dy}{ds}\right)\frac{1}{F} + \left(M + M_1 + P_x(y_1 - y) - P_y(x_1 - x)\right)\frac{1}{\varrho F} + \left(M + M_1 + P_x(y_1 - y) - P_y(x_1 - x)\right)\frac{z}{\varrho k F(z+\varrho)}\right]^2 \frac{z+\varrho}{\varrho} \cdot dF.$$

Durch Bildung der partiellen Differentialquotienten nach den veränderlich gedachten drei Hülfsgrößen P_x, P_y und M_1 und, wenn man diese gleich Null setzt, erhält man

$$\Delta x_1 = \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial P_x} = \frac{1}{E}\int\int_{-e_2}^{+e_1}\left(\frac{N}{F} + \frac{M}{\varrho F} + \frac{M}{\varrho F k} \cdot \frac{z}{z+\varrho}\right) \cdot \left(\frac{1}{F} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{y_1 - y}{\varrho F} + \frac{(y_1 - y)}{\varrho F k} \cdot \frac{z}{z+\varrho}\right)\frac{z+\varrho}{\varrho} \cdot dF \cdot ds,$$

$$\Delta y_1 = \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial P_y} = \frac{1}{E}\int\int_{-e_2}^{+e_1}\left(\frac{N}{F} + \frac{M}{\varrho F} + \frac{M}{\varrho F k} \cdot \frac{z}{z+\varrho}\right) \cdot \left(\frac{1}{F} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{x_1 - x}{\varrho F} - \frac{x_1 - x}{\varrho F k} \cdot \frac{z}{z+\varrho}\right)\frac{z+\varrho}{\varrho} \cdot dF \cdot ds,$$

$$\Delta \varphi_1 = \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial M_1} = \frac{1}{E}\int\int_{-e_2}^{+e_1}\left(\frac{N}{F} + \frac{M}{\varrho F} + \frac{M}{\varrho F k} \cdot \frac{z}{z+\varrho}\right) \cdot \left(\frac{1}{\varrho F} + \frac{z}{\varrho F k \cdot (z+\varrho)}\right)\frac{z+\varrho}{\varrho} \cdot dF \cdot ds.$$

Beachtet man bei der weiteren Entwicklung, dafs $\int dF = F$, $\int z\,dF = 0$, $\int \frac{z}{z+\varrho}\,dF = -k\cdot F$ und $\int \frac{z^2}{z+\varrho}\,dF = \varrho\cdot kF$, so folgt

$$4)\quad \begin{cases} \Delta x_1 = \int_0^{x_1} \frac{N\cdot dx}{EF} + \int_0^{x_1} \frac{M\cdot dx}{EF\varrho} + \int_0^{x_1} \frac{N}{EF\varrho}(y_1 - y)\,ds \\ \qquad + \int_0^{x_1} \frac{M\cdot(y_1 - y)\,ds}{E\varrho^2 Fk} \end{cases}$$

$$5)\quad \begin{cases} \Delta y_1 = \int_0^{y_1} \frac{N\cdot dy}{EF} + \int_0^{y_1} \frac{M\cdot dy}{EF\cdot\varrho} - \int_0^{y_1} \frac{N\cdot(x_1 - x)\,ds}{EF\cdot\varrho} \\ \qquad - \int_0^{y_1} \frac{M\cdot(x_1 - x)\,ds}{E\varrho^2 Fk} \end{cases}$$

$$6)\quad \Delta\varphi_1 = \int_0^{x_1} \frac{N}{EF\varrho}\,ds + \int_0^{x_1} \frac{M\cdot ds}{E\cdot\varrho^2\cdot F} + \int_0^{x_1} \frac{M\cdot ds}{E\varrho^2 F\cdot k}.$$

Kann für Stäbe mit schwacher Krümmung mit genügender Annäherung gesetzt werden $\varrho^2\cdot F\cdot k = J$, so vereinfacht sich die Anwendung der Gl. 4—6 dementsprechend. Für den geraden Stab mit $\varrho = \infty$ ist genau $\varrho^2 Fk = J$ und aufserdem verschwinden die Glieder, welche neben den endlichen Werten E und F noch ϱ im Nenner haben und die Gleichungen 4—6 nehmen dann folgende einfache Formen an

$$4a)\quad \Delta x_1 = \int_0^{x_1} \frac{N\cdot dx}{EF} + y_1 \int_0^{x_1} \frac{M\cdot ds}{EJ} - \int_0^{x_1} \frac{M\cdot y\cdot ds}{EJ}$$

$$5a)\quad \Delta y_1 = \int_0^{x_1} \frac{N\cdot dy}{EF} - x_1 \int_0^{x_1} \frac{M\cdot ds}{JE} + \int_0^{x_1} \frac{M\cdot x\cdot ds}{EJ}$$

$$6a)\quad \Delta\varphi_1 = \int_0^{x_1} \frac{M\cdot ds}{JE}.$$

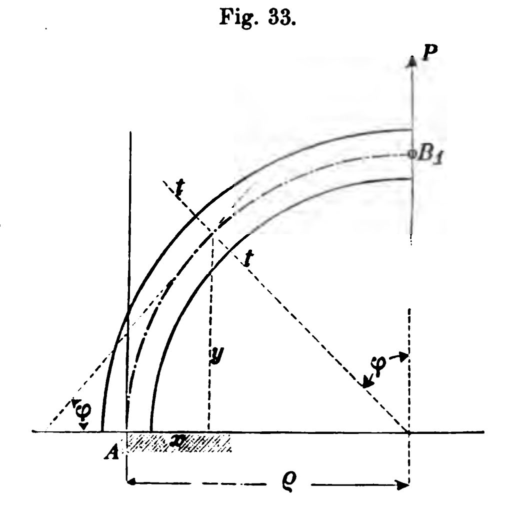
Die Gl. 4a—6a erhält man auch direkt, wenn man die Spannung σ in der Arbeitsgleichung 2 S. 51 statt durch Gl. 10 S. 38 durch die Gleichung $\sigma = \frac{N'}{F} + \frac{M'z}{J}$ ausdrückt.

In vielen Fällen der Anwendung, wo es sich um verhältnismäßig schwache Stabkrümmung handelt, insbesondere bei den im Brückenbau als Bogenträger vorkommenden einfach gekrümmten Stäben, können die Gl. 4a—6a mit völlig genügender Genauigkeit benutzt werden.

Anwendungen.

Beispiel 1: Ein kreisförmig gebogener Stab von 90° Bogenwinkel (Fig. 33) ist an seinem einen Ende lotrecht eingespannt und durch eine zentral gerichtete, also lotrechte Kraft P ergriffen. Welche elastische Verrückungen Δx_1 und Δy_1 erfährt der Schwerpunkt B_1 des Angriffsquerschnittes und unter welchem $\measuredangle \Delta\varphi_1$ neigt sich der letztere gegen die Lotrechte?

Fig. 33.



Mit den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen hat man für den Querschnitt tt

$$N = P\sin\varphi,$$
$$M = -P\rho\sin\varphi,$$
$$x = \rho\cdot(1-\sin\cdot\varphi),$$
$$dx = -\rho\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi,$$
$$y = \rho\cdot\cos\varphi,$$
$$dy = -\rho\sin\varphi\, d\varphi,$$
$$ds = -\rho\cdot d\varphi,$$
$$x_1 = y_1 = \rho.$$

Damit erhält man nach Gl. 4—6 durch Integration zwischen den Grenzen 0 und x_1 bezw. $\frac{\pi}{2}$ und 0

$$\Delta x_1 = \frac{P\cdot\rho}{EF}\cdot\frac{1-k}{k}\int_{\pi/2}^{0}\sin\varphi\,(1-\cos\varphi)\,d\varphi = -\frac{P\cdot\rho}{2EF}\cdot\frac{1-k}{k},$$

$$\Delta y_1 = -\frac{P\cdot\rho}{EF}\cdot\frac{1-k}{k}\int_{\pi/2}^{0}\sin^2\varphi\cdot d\varphi = \frac{P\cdot\rho}{4\cdot EF}\cdot\frac{1-k}{k}\cdot\pi,$$

$$\Delta\varphi_1 = \frac{P}{EFk}\int_{\pi/2}^{0}\sin\varphi\cdot d\varphi = -\frac{P}{EFk}.$$

Die Benutzung der Gl. 4a—6a liefert

$$\Delta x_1 = -\frac{P\cdot\rho}{EF}\int_{\pi/2}^{0}\sin\varphi\cos\varphi\cdot d\varphi + \frac{P\cdot\rho^3}{JE}\int_{\pi/2}^{0}\sin\varphi\,(1-\cos\varphi)\,d\varphi = \frac{P\cdot\rho}{2EF} - \frac{P\cdot\rho^3}{2JE},$$

$$\Delta y_1 = -\frac{P \cdot \rho}{EF}\int_{\pi/_2}^{0} \sin^2\varphi\, d\varphi - \frac{P \cdot \rho^3}{JE}\int_{\pi/_2}^{0} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{P \cdot \rho\, \pi}{4\,EF} + \frac{P \cdot \rho^3 \pi}{4\,EJ},$$

$$\Delta \varphi_1 = \frac{P \cdot \rho^2}{JE}\int_{\pi/_2}^{0} \sin\varphi\, d\varphi = -\frac{P \cdot \rho^2}{JE}.$$

Das negative Vorzeichen von $\Delta \varphi_1$ deutet eine Krümmungsverminderung an.

Ist der Querschnitt ein Rechteck von der Höhe h und der Breite b und gilt für das Krümmungsverhältnis $\frac{\rho}{h} = 2$, so ist nach Gl. 13 S. 40 $k = 0{,}0216$, $F = b\,h$, $J = \frac{b\,h^3}{12}$, und man erhält nach Gl. 4—6

$\Delta x_1 = -\frac{45 \cdot P}{E\,b}$, $\Delta y_1 = \frac{22{,}5\, P \cdot \pi}{E\,b}$, $\Delta \varphi_1 = -\frac{46 \cdot P}{E\,F}$, während nach Gl. 4a—6a

$\Delta x_1 = -\frac{47 \cdot P}{E\,b}$, $\Delta y_1 = \frac{24{,}5\, P \cdot \pi}{E\,b}$, $\Delta \varphi_1 = -\frac{48 \cdot P}{E\,F}$ als Annäherungswerte sich ergeben.

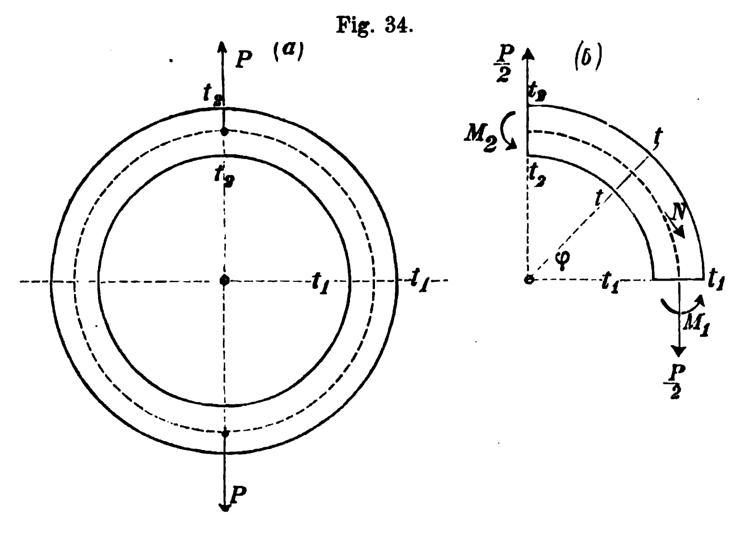
Für schwächere Krümmungen, d. h. gröfsere Werte für $\frac{\rho}{h}$ fallen die Abweichungen naturgemäfs entsprechend geringer aus.

IV. Der ringförmig geschlossene Stab unter der Wirkung von Radialkräften.

a) Radiale Einzelkräfte.

Ein kreisringförmig geschlossener Stab von überall gleichem Querschnitt (Fig. 34) befinde sich unter der Wirkung zweier entgegen-

Fig. 34.



gesetzt gleicher, in der Richtungslinie eines Durchmessers angreifender Kräfte P im Gleichgewicht. Die Frage, welche Normalkraft und welches Moment in irgend einem Querschnitte tätig sind, läſst sich mit Hülfe der statischen Gleichgewichtsbedingungen nicht beantworten, denn jedes aus dem vollen Ringe etwa herausgeschnitten gedachte Ringstück unterliegt im allgemeinen in jedem der beiden begrenzenden Querschnitte der Wirkung eines Momentes und einer Normalkraft, welche bei Erhaltung seines Gleichgewichtes mitwirken. Zur Bestimmung dieser vier Unbekannten sind nur drei Gleichungen vorhanden, die Aufgabe ist einfach statisch unbestimmt und nur unter Berücksichtigung der elastischen Formänderung zu lösen. Die Formänderung, welche der Ring erfährt, besteht darin, daſs seine Kreisringform in eine länglich ovale Form übergeht, die aber ersichtlich in Bezug auf die Kraftlinie symmetrisch ist. Daraus folgt, daſs die Stabquerschnitte in der Richtung der Kraftlinie und senkrecht dazu auch nach eingetretener Formänderung noch senkrecht zueinander stehen, also ihre gegenseitige Richtung nicht geändert haben. Denkt man sich nun durch zwei Ebenen $t_2 t_2$ und $t_1 t_1$ in der Richtung der Kraftlinie und senkrecht dazu einen Quadranten herausgeschnitten, so unterliegt derselbe im Querschnitt $t_1 t_1$ einer zentrischen Normalkraft $\frac{P}{2}$ und einem Moment M_1 und im Schnitt $t_2 t_2$ einer Tangentialkraft $\frac{P}{2}$ nebst einem Moment M_2. Für einen um den $\measuredangle \varphi$ gegen $t_1 t_1$ geneigten Schnitt erhält man daraus eine Normalkraft

1) $N = \frac{P}{2} \cos\varphi$ und ein Moment 2) $M = \frac{P}{2} \varrho (1 - \cos\varphi) - M_1$.

Die Richtungsänderung $\Delta\varphi_1$ der den Quadranten begrenzenden Querschnitte ist nun einerseits gleich Null, muſs anderseits aber auch die Gl. 6 S. 53 erfüllen. Daraus folgt mit $s = \varrho \cdot \varphi$ und $ds = \varrho\, d\varphi$ die Beziehung

$$\Delta\varphi_1 = 0 = \int_0^{\pi/2} \frac{P}{2} \frac{\cos\varphi \cdot d\varphi}{EF} + \int_0^{\pi/2} \frac{P}{2} \frac{(1 - \cos\varphi)\, d\varphi}{EF} - \int_0^{\pi/2} \frac{M_1 \cdot d\varphi}{EF \cdot \varrho}$$
$$+ \int_0^{\pi/2} \frac{P}{2} \frac{(1 - \cos\varphi)\, d\varphi}{EFk} - \int_0^{\pi/2} \frac{M_1 \cdot d\varphi}{EF \cdot \varrho \cdot k}.$$

Die Ausführung der Integration und Lösung der Gleichung für M_1 liefert

3) $$M_1 = \frac{P \cdot \varrho}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+k}\right).$$

Die Annäherungsgleichung 6a S. 53 ergibt die Beziehung

$$\Delta \varphi_1 = \int \frac{M \cdot ds}{JE} = \int_0^{\pi/2} \frac{P \cdot \varrho^2}{2} \frac{(1 - \cos\varphi)\, d\varphi}{EJ} - \int_0^{\pi/2} \frac{M_1 \cdot \varrho \cdot d\varphi}{JE},$$

woraus folgt

3a) $$M_1 = \frac{P \cdot \varrho}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

Mit diesen Werten für das Moment M_1 in $t_1 t_1$ erhält man für einen beliebigen Querschnitt aus Gl. 2 das Moment

4) $$M = \frac{P \cdot \varrho}{2}\left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+k} - \cos\varphi\right),$$ **oder annähernd**

4a) $$M = \frac{P \cdot \varrho}{2}\left(\frac{2}{\pi} - \cos\varphi\right).$$

Für denjenigen Winkel φ, für welchen $\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+k} = \cos\varphi$, bezw. $\frac{2}{\pi} = \cos\varphi$ ist das Biegungsmoment gleich Null; für kleinere Winkel negativ, für gröfsere positiv. Für $\varphi = 90^0$ im Querschnitt $t_2 t_2$ wird

5) $$M_2 = \frac{P \cdot \varrho}{\pi(1+k)}$$ **bezw.** 5a) $$M_2 = \frac{P \cdot \varrho}{\pi}.$$

Sind so für einen beliebigen Querschnitt nach Gl. 1 die Normalkraft und nach Gl. 4 das Biegungsmoment bekannt, so kann man die Normalspannungen σ in bekannter Weise ermitteln. Die Schubspannungen lassen sich mit für die Anwendung hinreichender Genauigkeit nach den Bd. I S. 181 entwickelten Regeln beurteilen.

Es möge auch hier noch für bestimmte Querschnitts- bezw. Krümmungsverhältnisse die Abweichung der Rechnungsergebnisse nach Gl. 3—5 und Gl. 3a—5a gezeigt werden.

Der Querschnitt sei ein Rechteck und $\frac{\rho}{h} = 1{,}5$. Dann ist nach Gl. 13 S. 40 $k =$ rund 0,04 und nach Gl. 3 und 5

$M_1 = 0{,}194\, P \cdot \rho \quad M_2 = 0{,}307\, P \cdot \rho$; nach Gl. 3a u. 5a aber
$M_1 = 0{,}181\, P \cdot \rho \quad M_2 = 0{,}318\, P \cdot \rho$.

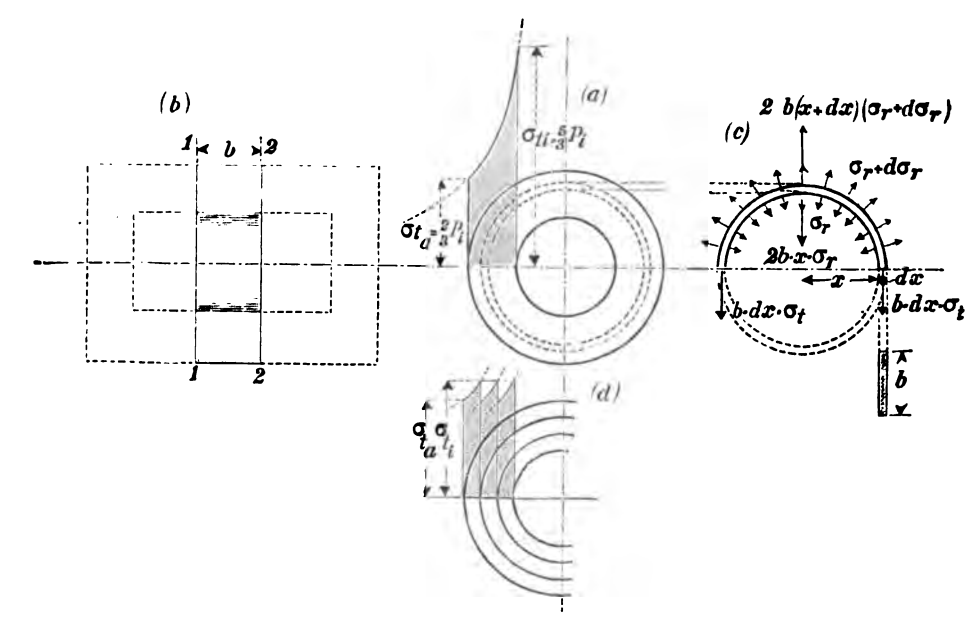
Für $\frac{\rho}{h} = 2$ wird $k = 0{,}0216$, und damit nach Gl. 3 und 5 $M_1 = 0{,}19\, P \cdot \rho$ und $M_2 = 0{,}31\, P \cdot \rho$, während Gl. 3a und 5a für alle Verhältnisse $\frac{\rho}{h}$ die

gleichen Momente $M_1 = 0{,}181\ P \cdot \rho$ und $M_2 = 0{,}318\ P \cdot \rho$ liefern. Die Abweichung des gröfsten Momentes M_2 ist also für $\frac{\rho}{h} = 1{,}5$, gleich etwa 3,6 % und für $\frac{\rho}{h} = 2$, gleich etwa 2,5 %, für gröfsere Werte von $\frac{\rho}{h}$ also völlig verschwindend. Die gröfsten Spannungen fallen nach Gl. 10 S. 38 berechnet allerdings erheblich gröfser aus als nach der Annäherungsgleichung für gerade Stäbe (vergl. S. 39).

b) Gleichmäfsig verteilte Radialkräfte, Spannungen in Gefäfswänden.

Äufsere Kräfte in der Form von gleichmäfsig verteilten Radialkräften kommen in der Anwendung namentlich als innerer oder äufserer Flüssigkeitsdruck auf zylindrische Gefäfswände vor. Denkt man sich nämlich aus dem Gefäfsmantel Fig. 35a u. b durch zwei Ebenen $\overline{1\,1}$ und $\overline{2\,2}$ senkrecht zu seiner Achse ein Kreisringstück herausgeschnitten, so ist dieses als ein ringförmig geschlossener Stab

Fig. 35.



anzusehen. Bezüglich des äufseren Gleichgewichtes eines solchen Ringstückes ist jedoch zu beachten, dafs zu den Radialkräften (Flüssigkeitsdruck) noch Achsialkräfte, nämlich die auf die kreisringförmigen Schnittflächen wirkenden Spannkräfte, welche in ihrer

Gesamtheit gleich der achsialen Flüssigkeitsdruckkraft sind, hinzutreten. Da indes auch ringförmig geschlossene Stäbe vorkommen, bei denen derartige senkrecht zur Stabebene wirkende Kräfte fehlen, so mögen diese, übrigens für sich allein im Gleichgewicht stehenden Kräfte zunächst auch hier aufser acht bleiben und lediglich die in der Stabebene, bezw. in deren Richtung auftretenden äufseren und inneren Kräfte in ihrem gegenseitigen Gleichgewichte verfolgt werden.

Um die abzuleitenden Regeln tunlichst allgemein zu gestalten, möge gleichzeitig eine innere Radialkraft p_i und eine äufsere p_a für die Flächeneinheit des inneren und äufseren Ringumfanges angenommen werden. Der Querschnitt des Stabes sei rechteckig.

Innerhalb des Stabes werden nun sowohl in ebenen Radialschnitten (Querschnitten), als in konzentrisch ringförmigen Schnittflächen Normalspannungen zu erwarten sein. Wir bezeichnen erstere, weil stets tangential zur Stabmittellinie in dem betreffenden Querschnitte gerichtet mit σ_t, letztere, weil stets radial gerichtet mit σ_r.

Die Verteilung der Spannung σ_t über die einzelnen Querschnitte wird keine gleichmäfsige, bei der herrschenden Symmetrie aber in allen Stabquerschnitten dieselbe sein.

Die Spannung σ_r wird sich zwar gleichmäfsig über die einzelnen konzentrischen Schnitte verteilen, sich aber im allgemeinen mit deren Halbmesser x ändern.

Denkt man sich ein konzentrisches Ringelement von der Dicke dx aus dem Ringe herausgeschnitten (Fig. 35 c), so unterliegt dieses den aus der Figur ersichtlichen, für sich im Gleichgewicht befindlichen Kräften. Trennt man dieses Ringelement durch einen Schnitt in zwei Halbkreisringstücke, so müssen auch an diesen die in der Figur bezeichneten Kräfte im Gleichgewicht sein. Daraus ergibt sich die Beziehung

$$2\,b \cdot dx \cdot \sigma_t = 2\,(x + dx)\,b \cdot (\sigma_r + d\,\sigma_r) - 2\,x \cdot b\,\sigma_r,$$

d. i. vereinfacht und unendlich kleine Gröfsen höherer Ordnung vernachlässigt

$$1) \qquad \sigma_t - \sigma_r = x \cdot \frac{d\,\sigma_r}{d\,x}.$$

Die Spannungen σ_t und σ_r entsprechen bestimmten Dehnungen $\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E}$ und $\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E}$ in tangentialer und radialer Richtung. Ist Δx

die elastische Änderung des Radius x, so ändert sich der Umfang des Ringelementes um $2\pi \cdot \Delta x$ und man hat

$$2)\qquad \varepsilon_t = \frac{2\pi \cdot \Delta x}{2\pi \cdot x} = \frac{\Delta x}{x}.$$

Da ferner Δx die elastische Änderung von x, so ist $d\Delta x$ die elastische Änderung der Dicke dx des Ringelementes und man hat

$$3)\qquad \varepsilon_r = \frac{d\Delta x}{dx}.$$

Aus Gl. 2 u. 3 folgt nun

$$4)\qquad \sigma_t = E \cdot \varepsilon_t = E \cdot \frac{\Delta x}{x}, \qquad 5)\qquad \sigma_r = E \cdot \varepsilon_r = E \cdot \frac{d\Delta x}{dx}.$$

Weiterhin durch Differentiation der Gl. 5

$$6)\qquad \frac{d\sigma_r}{dx} = E\frac{d^2\Delta x}{dx^2}.$$

Mit den Werten der Gl. 4—6 erhält man aus Gl. 1

$$7)\qquad \frac{d^2\Delta x}{dx^2} + \frac{x\,d\Delta x - dx \cdot \Delta x}{dx \cdot x^2} = \frac{d^2\Delta x}{dx^2} + \frac{d\dfrac{\Delta x}{x}}{dx} = 0$$

und durch Integration

$$8)\qquad \frac{d\Delta x}{dx} + \frac{\Delta x}{x} = c_1, \quad \text{oder} \quad d\Delta x \cdot x + dx\,\Delta x = d(x \cdot \Delta x) = c_1 x \cdot dx.$$

Die weitere Integration ergibt

$$9)\qquad x \cdot \Delta x = \frac{c_1 x^2}{2} + c_2, \quad \text{also} \quad \Delta x = \frac{c_1 x}{2} + \frac{c_2}{x} \quad \text{und} \quad \frac{d\Delta x}{dx} = \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{x^2}.$$

Damit wird nach Gl. 4 u. 5

$$10)\qquad \sigma_t = E \cdot \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{x^2}\right) \quad \text{und} \quad 11)\qquad \sigma_r = E \cdot \left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{x^2}\right).$$

Gl. 10 u. 11 stellen die Gesetze der Spannungsverteilung dar; es bleiben nur noch die Konstanten c_1 und c_2 zu bestimmen. Das geschieht am besten mit Hülfe der Gl. 11, in welcher für $x = r$, $\sigma_r = p_i$ und für $x = R$, $\sigma_r = p_a$ wird. Man erhält damit

$$p_i = E \cdot \left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{r^2}\right) \quad \text{und} \quad p_a = E \cdot \left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{R^2}\right),$$

woraus folgt

$$c_1 = 2\frac{(R^2 p_a - r^2 p_i)}{E(R^2 - r^2)} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{R^2 r^2 (p_a - p_i)}{E(R^2 - r^2)}.$$

Nach Gl. 10 u. 11 wird somit

$$12)\qquad \sigma_t = \frac{R^2 p_a - r^2 p_i}{R^2 - r^2} + \frac{R^2 r^2 (p_a - p_i)}{x^2 (R^2 - r^2)},$$

$$13)\qquad \sigma_r = \frac{R^2 p_a - r^2 p_i}{R^2 - r^2} - \frac{R^2 r^2 (p_a - p_i)}{x^2 (R^2 - r^2)}.$$

Für $x = r$ und $x = R$ ergeben sich die Kantenspannungen σ_{t_i}, σ_{r_i}, σ_{t_a} und σ_{r_a} zu

$$14)\qquad \sigma_{t_i} = \frac{(R^2 \cdot p_a - r^2 \cdot p_i) + R^2 (p_a - p_i)}{R^2 - r^2},$$

$$15)\qquad \sigma_{r_i} = \frac{(R^2 \cdot p_a - r^2 \cdot p_i) - R^2 (p_a - p_i)}{R^2 - r^2},$$

$$16)\qquad \sigma_{t_a} = \frac{(R^2 \cdot p_a - r^2 \cdot p_i) + r^2 (p_a - p_i)}{R^2 - r^2},$$

$$17)\qquad \sigma_{r_a} = \frac{(R^2 \cdot p_a - r^2 p_i) - r^2 (p_a - p_i)}{R^2 - r^2}.$$

Die Gl. 14—17 lassen sich, wenn p_i und p_a und zulässige größte Anstrengung des Materials gegeben, auch zur Bestimmung der Querschnittsabmessungen, bezw. der Ringhalbmesser R oder r benutzen.

In vorstehender allgemeiner Entwicklung sind die Flächenkräfte p_a und p_i positiv angenommen. Ist p_a oder p_i oder sind beide negativ, so kehren die Vorzeichen der betreffenden Glieder sich um. In den bei weitem zahlreichsten Fällen der Anwendung, in denen es sich um inneren oder äußeren Flüssigkeitsdruck handelt, ist sowohl p_a als p_i negativ. Dieser praktisch wichtige Fall soll hier noch weiter behandelt werden.

Kommt nur innerer Überdruck in Frage, ist also $p_a = 0$ und p_i negativ, so nehmen die Gleichungen 12 u. 13 die Form an

$$18)\qquad \sigma_t = \frac{r^2 p_i}{R^2 - r^2}\left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right),$$

$$19)\qquad \sigma_r = \frac{r^2 p_i}{R^2 - r^2}\left(1 - \frac{R^2}{x^2}\right).$$

Danach ist σ_t stets positiv (Zugspannung), und, weil $\frac{R}{x} \geqq 1$, σ_r stets negativ (Druckspannung). Für $x = R$ am äußeren Umfange ist

$$20)\qquad \sigma_{t_a} = \frac{2 r^2 p_i}{R^2 - r^2} = \frac{2 p_i}{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1} \quad \text{und} \quad 21)\qquad \sigma_{r_a} = 0.$$

Am inneren Umfange, für $x = r$, wird

22) $$\sigma_{t_i} = p_i \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} = p_i \left(1 + \frac{2\,r^2}{R^2 - r^2}\right) \quad \text{und}$$

23) $$\sigma_{r_i} = -p_i.$$

Ist beispielsweise $\frac{R}{r} = 2$, so ist am äufseren Umfange $\sigma_{t_a} = \frac{2}{3} p_i$ und am inneren $\sigma_{t_i} = \frac{5}{3} p_i$, letztere Spannung also 2½ mal so grofs als erstere. Das in Gleichung 18 enthaltene Verteilungsgesetz der Spannungen σ_t wird für das Verhältnis $\frac{R}{r} = 2$ geometrisch durch die in Fig. 35a angedeutete bezügliche Linie dargestellt.

Aufser den in den Gleichungen 18—23 berechneten Spannungen σ_t und σ_r wirken nun, wie weiter oben bereits angedeutet, auch in der Längsrichtung der Gefäfswand noch Spannungen σ_a, die als gleichmäfsig verteilt über die Ringquerschnitte angenommen werden können. Da die achsiale Druckkraft der Flüssigkeit $D = \pi \cdot r^2 \cdot p_i$ ist, so erhält man

24) $$\sigma_a = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot p_i}{\pi (R^2 - r^2)} = p_i \cdot \frac{r^2}{R^2 - r^2}.$$

Bei innerem Überdruck ist demnach von allen in der zylindrischen Gefäfswand auftretenden Normalspannungen die Spannung σ_{t_i} am inneren Umfange die bei weitem gröfste. Ist für sie ein bestimmter Gröfstwert σ_{t_i} vorgeschrieben, so läfst sich mit Hülfe der Gl. 22 zu einem durch die Zweckbestimmung meistens gegebenen inneren Halbmesser r, der äufsere R oder die Wandstärke bestimmen. Man erhält

25) $$R = r \sqrt{\frac{\sigma_{t_i} + p_i}{\sigma_{t_i} - p_i}}.$$

Aus Gl. 25 ersieht man, dafs aus einem Material von bestimmter zulässiger Normalspannung σ ein zylindrisches Gefäfs nur für einen begrenzten inneren Überdruck möglich ist. Mit $p_i = \sigma_{t_i}$ wird $R = \infty$ und für $p_i > \sigma_{t_i}$ imaginär. Das erkennt man auch aus Gl. 22, nach welcher σ_{t_i} mit wachsendem äufseren Halbmesser R zwar abnimmt, aber selbst für $R = \infty$ noch gleich p_i ist.

Will man anstatt der gröfsten Normalspannung die gröfste Materialanstrengung s für die Bemessung der Wandstärke mafsgebend

sein lassen, so hat man nach Bd. I S. 62 Gl. 5 $s = \sigma_{t_i} - \frac{\sigma_{r_i} + \sigma_a}{m}$ und unter Beachtung der Gl. 22, 23 u. 24 und mit $m = 4$

$$26) \qquad s = p_i \frac{R^2(m+1) + r^2(m-2)}{m(R^2 - r^2)} = p_i \cdot \frac{5R^2 + 2r^2}{4(R^2 - r^2)}.$$

Die Lösung für R bei gegebenen r, p_i und s führt zu

$$27) \qquad R = r \cdot \sqrt{\frac{s + 0{,}5\,p_i}{s - 1{,}25 \cdot p_i}}.$$

Nach Gl. 27 bleibt R nur reell, d. h. ein Gefäfs mit hinreichender Wandstärke ist nur möglich, wenn $p_i \leqq 0{,}8 \cdot s$.

Bezeichnet man die Manteldicke des Gefäfses mit δ, so dafs $R = r + \delta$, so wird nach Gl. 22 $\sigma_t = p_i \frac{(r+\delta)^2 + r^2}{(2r+\delta)\delta}$. Handelt es sich um Gefäfse von grofsem inneren Halbmesser und um kleinen inneren Überdruck p_i und demnach kleinere Wandstärke δ, so kann man ohne merklichen Fehler δ als Summand gegen r vernachlässigen und erhält dann

$$28) \qquad \sigma_t = \frac{p_i \cdot r}{\delta}.$$

Gleichung 28 entspricht der Annahme gleichmäfsiger Verteilung der Spannungen σ_t über die Mantelstärke δ und läfst sich auf Grund dieser Annahme leicht auch direkt ableiten. Ist σ_t vorgeschrieben, p_i und r gegeben, so erhält man die erforderliche Wanddicke

$$29) \qquad \delta = \frac{p_i \cdot r}{\sigma_t}.$$

Folgende Zahlenrechnung möge zeigen, inwieweit die Ergebnisse nach der Annäherungsgleichung 29 mit denjenigen nach Gl. 25 und 27 übereinstimmen. Die gröfste Normalspannung σ_t bezw. Anstrengung s seien für Gufseisen als Material je gleich 300 at. Dann ergeben sich für verschiedene innere Überdrucke p_i folgende Wandstärken:

	Nach Gl. 25		Nach Gl. 27		Nach Gl. 29
p_i at	R	δ	R	δ	δ
10	1,034 r	0,034 r	1,03 r	0,03 r	0,033 r
25	1,086 „	0,086 „	1,08 „	0,08 „	0,083 „
50	1,180 „	0,18 „	1,17 „	0,17 „	0,167 „
75	1.294 „	0,294 „	1,28 „	0,28 „	0,25 „
100	1,41 „	0,41 „	1,41 „	0,41 „	0,33 „
150	1,73 „	0,74 „	1,82 „	0,82 „	0,50 „
200	2,24 „	1,24 „	2,82 „	1,82 „	0,67 „
240	3,00 „	2,00 „	∞	∞	0,80 „

Vorstehende Rechnung läfst erkennen, dafs bis zu einem Überdruck von 50 at Gl. 29 noch fast völlig mit Gl. 27 übereinstimmende, für höheren Druck aber mehr und mehr nach unten abweichende Wandstärken liefert. Gl. 25 ergibt gegenüber Gl. 27 bis 100 at etwas gröfsere, darüber hinaus allmählich stärker abweichend kleinere Werte δ, was sich aus dem mit p_i steigenden Einflusse von $\sigma_r = -p_i$ und dem mit wachsendem p_i verhältnismäfsig abnehmendem Einflusse von σ_a erklärt. Bei höherer zulässiger Spannung, wie sie für Schmiedeeisen oder Stahl in Frage kommt, ist die Übereinstimmung der Ergebnisse nach den drei Gleichungen noch weitergehend. Der Umstand, dafs nach Gl. 27 für $p_i = 240$ at und nach Gl. 25 für $p_i = 300$ at bei der gegebenen Spannung σ_t bezw. Anstrengung s eine unendlich grofse Wandstärke erforderlich, also ein Gefäfs unmöglich wird, findet seine Erklärung in der aus Gl. 18 und Fig. 35 a ersichtlichen mit wachsender Wandstärke geringer werdenden und mit $\delta = \infty$ völlig verschwindenden Ausnutzung der nach dem äufseren Gefäfsumfange zu gelegenen Materialmengen. Um eine gleichmäfsigere Ausnutzung der Festigkeit des Gefäfsmantels, bezw. eine Widerstandsfähigkeit derselben gegen höheren Druck zu erreichen, bietet sich die Möglichkeit und pflegt man beispielsweise bei Geschützläufen das Gefäfs aus mehreren konzentrischen Ringen herzustellen, derart, dafs die äufseren Ringe bis zum gewissen Grade erwärmt auf die inneren „aufgezogen" werden. Dadurch erhalten die ersteren schon ohne inneren Flüssigkeitsdruck positive, die letzteren dagegen negative Spannungen σ_t. Bei entsprechender Bemessung der Lichtweiten der einzelnen Ringe vor dem Aufziehen läfst es sich mit einer gewissen Annäherung erreichen, dafs die einzelnen Ringe je an ihrem inneren Umfange die gleiche Spannung σ_t erhalten. (Vergl. Fig. 35 a.)

Ist der Ringstab, bezw. das zylindrische Gefäfs nur einem äufseren Überdruck p_a ausgesetzt, während $p_i = 0$ ist, so erhält man aus Gl. 12 und 13 mit negativem p_a

$$30)\qquad \sigma_t = -\frac{R^2 \cdot p_a}{R^2 - r^2} \cdot \left(1 + \frac{r^2}{x^2}\right),$$

$$31)\qquad \sigma_r = -\frac{R^2 \cdot p_a}{R^2 - r^2} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{x^2}\right).$$

Man erkennt, dafs σ_t überall gröfser als σ_r und mit abnehmendem x also nach innen wächst. Mit $x = r$ wird

$$32)\qquad \sigma_{t_i} = -2 \cdot \frac{R^2 \cdot p_a}{R^2 - r^2} \quad \text{und}$$

$$33)\qquad \sigma_{r_i} = 0. \qquad \text{Mit } x = R \text{ wird}$$

$$34)\qquad \sigma_{t_a} = -p_a \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2},$$

$$35)\qquad \sigma_{r_a} = -p_a.$$

Für $\frac{R}{r} = 2$ wird $\sigma_{t_i} = -\frac{8}{3} \cdot p_a$ und $\sigma_{t_a} = -\frac{5}{3} \cdot p_a$, also $\sigma_{t_i} = 1{,}6\,\sigma_{t_a}$.

Für $\frac{R}{r} = \infty$, also $\frac{r}{R} = 0$ wird $\sigma_{t_i} = -2p_a$ und $\sigma_{t_a} = -p_a$.

Der Unterschied zwischen σ_{t_i} und σ_{t_a} ist also sehr viel geringer als bei innerem Überdruck und höchstens $\frac{\sigma_{t_i}}{\sigma_{t_a}} = 2$.

Die Achsialspannung wird jetzt

$$\text{36)} \qquad \sigma_a = -\frac{R^2 \cdot \pi \cdot p_a}{(R^2 - r^2)\pi} = -\frac{p_a R^2}{R^2 - r^2}.$$

Die auftretende stärkste Spannung ist wieder σ_{t_i}.

Bei vorgeschriebener Druckspannung $-\sigma_{t_i}$ und gegebenem p_a und r erhält man aus Gl. 32

$$\text{37)} \qquad R = r \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{t_i}}{\sigma_{t_i} + 2p_a}}.$$

Die Materialanstrengung tangential und radial am inneren Gefäßumfange ergibt sich nach Gl. 32 u. 36, da σ_{t_i} und σ_a gleichsinnig und $\sigma_{r_i} = 0$, zu

$$\text{38)} \qquad s_t = -\frac{R^2}{R^2 - r^2} \cdot p_a \left(2 - \frac{1}{m}\right) = -1{,}75 \cdot p_a \cdot \frac{R^2}{R^2 - r^2} \quad \text{und}$$

$$\text{39)} \qquad s_r = +\frac{3 \cdot p_a R^2}{m(R^2 - r^2)} = 0{,}75 \cdot \frac{p_a \cdot R^2}{R^2 - r^2}.$$

In Gl. 38 u. 39 ist s_t eine Druck- und s_r eine Zuganstrengung.

Für die Berechnung der Wandstärke ist derjenige beider Werte zu berücksichtigen, welcher für die Zerstörung des Gefäßes am gefährlichsten ist. Bei Stoffen von annähernd gleicher Zug- und Druckfestigkeit ist die größere Druckanstrengung s_t auch stets die gefährlichere; bei solchen von erheblich geringerer Zugfestigkeit, wie Gußeisen, kann auch die Zerstörung durch s_r, d. h. durch Zerreißen in der radialen Richtung erfolgen. Aus Gl. 38 u. 39 erhält man $\frac{s_t}{s_r} = \frac{2m - 1}{3} = 2{,}33$. Da bei Gußeisen die Druckfestigkeit mindestens 5 mal so groß ist als die Zugfestigkeit, so muß die Zerstörung bei diesem Material durch Zerreißen in radialer Richtung erfolgen.

Je nachdem s_t oder s_r für die Berechnung der Wandstärke maſsgebend ist, erhält man

40) $$R = p_a \cdot \sqrt{\frac{s_t}{s_t - 1{,}75\, p_a}} \quad \text{oder}$$

41) $$R = p_a \cdot \sqrt{\frac{s_r}{s_r - 0{,}75\, p_a}}.$$

Handelt es sich um einfache lediglich von Radialkräften p_a oder p_i ergriffene Ringstäbe, so verschwindet in den Ausdrücken für die Anstrengung s bezw. s_t und s_r die Spannung σ_a und man erhält leicht für den Fall $p_a = 0$

$$s = p_i \frac{R^2(m+1) + r^2(m-1)}{m \cdot (R^2 - r^2)} = \frac{5R^2 + 3r^2}{4(R^2 - r^2)}$$

und für den Fall $p_i = 0$

$$s_t = \sigma_{t_i} = -\frac{2R^2 \cdot p_a}{R^2 - r^2} \quad \text{und} \quad s_r = -\frac{\sigma_{t_i}}{m} = \frac{0{,}5 \cdot R^2 \cdot p_a}{R^2 - r^2}.$$

IV. Der vollwandige Dreigelenk-Bogenträger.

a) Allgemeines und Angriff beliebiger Kräfte in der Bogenebene.

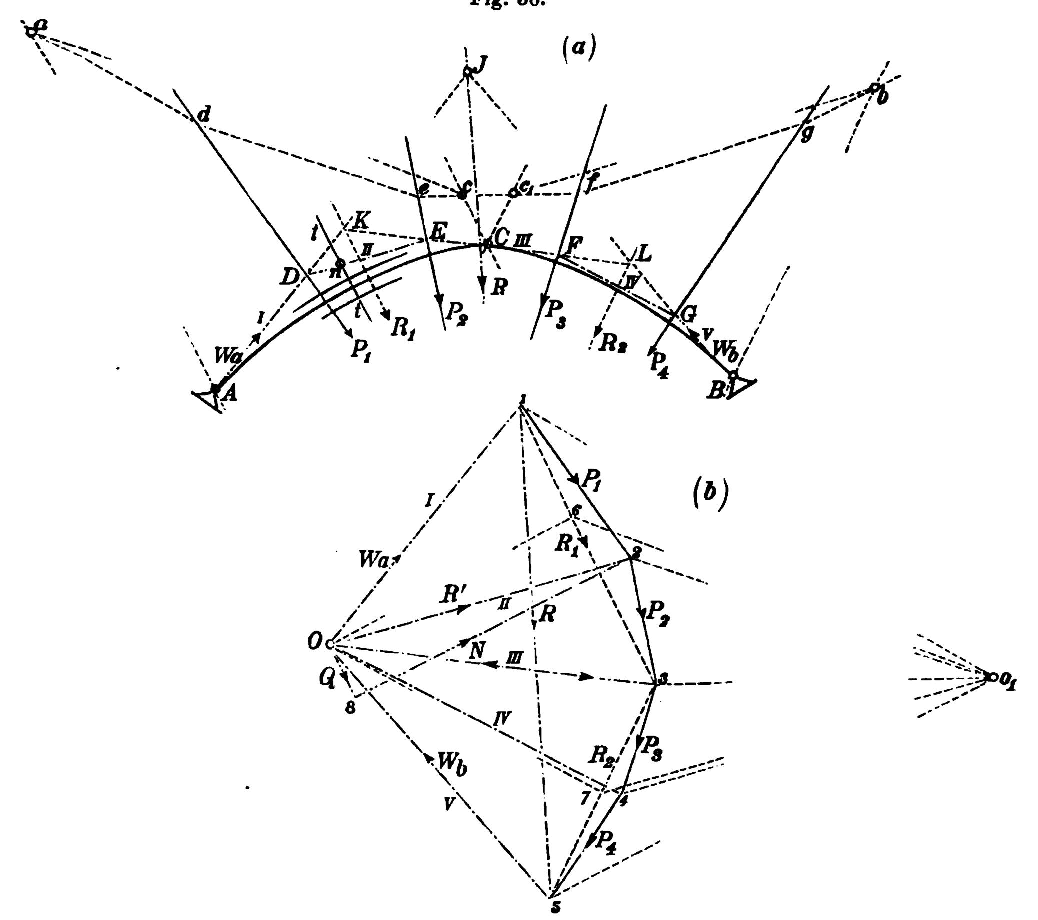
Nach den Ausführungen auf Seite 6 befindet sich ein durch zwei feste Stützgelenke gehaltener, von beliebigen Kräften in seiner Krümmungsebene ergriffener, einfach gekrümmter Stab im Zustande einfach statisch unbestimmten Gleichgewichtes. Durch Einfügung eines Zwischengelenkes läſst sich dieser Zustand in einen statisch bestimmten umwandeln (vergl. S. 7), wodurch das als „Dreigelenk-Bogenträger" bezeichnete Bauwerk entsteht. Die beiden festen Stützgelenke werden „Kämpfergelenke" und das meist nahe, oder in dem höchsten Punkte der Bogenmittellinie, dem „Scheitel" eingefügte dritte Gelenk als „Scheitelgelenk" benannt.

Die das Gleichgewicht gegenüber den angreifenden Kräften (Lasten) herstellende, in den Kämpfergelenken A und B (Fig. 36a) angreifenden beiden Stützkräfte W_a und W_b, welche nach Richtung und Gröſse unbekannt sind, können stets mit Hülfe der drei statischen Gleichgewichtsbedingungen, denen das ganze Bauwerk unterliegt, und der weiteren Gleichgewichtsbedingung für seine beiden Hälften, nämlich der, daſs ein Drehungsmoment in Bezug auf das beide verbindende Scheitelgelenk C nicht vorhanden sein darf, bestimmt werden.

In folgendem möge die Lösung der Frage des äuſseren Gleichgewichtes für beliebige in der Bogenebene liegende Kräfte

P_1, P_2, P_3 usw. zunächst graphisch geschehen, indem man die Lasten zu einem Krafteck 1 2 3 4 5 ... zusammenträgt und zu ihnen durch die drei Gelenkpunkte A, C und B ein Seileck $ADEFGB$

Fig. 36.



zeichnet. Ist 0 der zu diesem Seileck gehörige Pol (Fig. 36 b), so erhält man in den Polstrahlen $\overline{01}$ und $\overline{50}$ die gesuchten Stützkräfte W_a und W_b; denn sie bilden mit den Lasten zusammen ein geschlossenes Krafteck 0 1 2 3 4 5 0 und ihre Mittelkraft $(\overline{51})$ geht wie diejenige der Lasten $(\overline{15})$ durch denselben Punkt J; auch ist das Moment der an beiden Bogenhälften tätigen Kräfte — W_a, P_1 und P_2 an der linken und P_3, P_4 und W_b an der rechten — in

Bezug auf das Scheitelgelenk C gleich Null, denn die durch den Polstrahl $\overline{0\,3}$ bezw. $\overline{3\,0}$ dargestellte Mittelkraft jener Kräfte fällt ihrer Lage nach mit der Seilecksseite EF bezw. FE zusammen, geht also durch C. Die gefundenen Stützkräfte W_a und W_b halten daher gegenüber den Lasten sowohl den ganzen Bogen als seine beiden Hälften im Gleichgewicht.

Die zeichnerische Lösung kommt nach vorstehendem in der Hauptsache auf die Ermittelung des Poles 0 zu dem durch die Gelenkpunkte A, B und C gehenden Seileck hinaus. In Fig. 36 ist der Pol wie folgt bestimmt: Mit beliebigem Pol 0_1 ist das Hülfsseileck $a\,d\,e\,f\,g\,b$ gezeichnet, durch die Gelenkpunkte A und C, bezw. B und C Parallelen zu $\overline{1\,3}$ bezw. $\overline{3\,5}$ gezogen, wodurch auf dem Hülfsseileck die Schnittpunkte a, c, c_1 und b festgelegt werden. Die durch 0_1 und parallel zu $a\,c$ und $b\,c_1$ gezogenen Polstrahlen $\overline{0_1\,6}$ und $\overline{0_1\,7}$ bestimmen auf den Geraden $\overline{1\,3}$ und $\overline{3\,5}$ die Punkte 6 und 7 und die durch diese zu den Verbindungsgeraden $A\,C$ und $B\,C$ gezogenen Parallelen $\overline{6\,0}$ und $\overline{7\,0}$ sind geometrische Örter des gesuchten Poles, der damit gefunden ist (vergl. Keck Mech. I 3. Aufl. S. 129). Die Mittelkräfte R_1 und R_2 der die Bogenhälften angreifenden Lasten werden im Krafteck durch die Linien $\overline{1\,3}$ und $\overline{3\,5}$ ausgedrückt und gehen im Seileck durch die Punkte K und L.

Jeder Querschnitt tt (Fig. 36a) durch den Bogenträger trennt alle sich an ihm das Gleichgewicht haltenden äufseren Kräfte (Lasten und Stützkräfte) in zwei Gruppen von entgegengesetzt gleichen Mittelkräften. Beispielsweise erscheint in der Figur für den Schnitt tt $\overline{0\,2} = R'$ als Mittelkraft der Kräfte W_a und P_1 linksseitig und $\overline{2\,0} = -R'$ als Mittelkraft der Kräfte P_2, P_3, P_4 und W_b rechtsseits vom Schnitt, im Seileck mit der Seite DE, bezw. ED zusammenfallend. In dieser Seilecksseite kommt also der Ausgleich der Kräftegruppen beiderseits der Schnittebene tt im Sinne des äufseren Gleichgewichts zustande; in ihr stützen sich die Trägerteile beiderseits des Schnittes gleichsam gegeneinander, und man nennt das so entstandene Seileck, den Linienzug $ADEFGB$ daher auch wohl die „Stützlinie“ des Bogens zu den gegebenen Lasten. Bei stetiger Belastung wird das Seileck zur Seillinie, bezw. die Stützlinie zu einer stetig gekrümmten Linie.

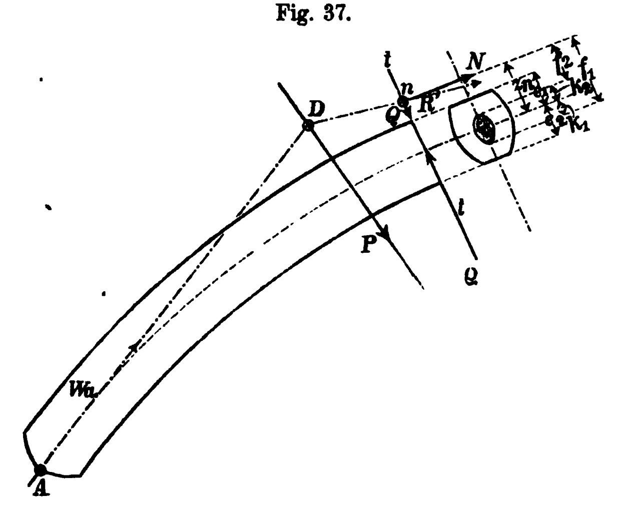
Der Ausgleich, bezw. die Aufhebung der beiden Kräftegruppen beiderseits einer Schnittebene in ihrer statischen Wirkung auf den Bogenträger kommt zustande durch Vermittelung der in der Schnittebene auftretenden Spannungen; die Mittelkraft aller Spannkräfte in derselben mufs daher nach Lage, Richtung und Gröfse gleich sein der Mittelkraft R' bezw. $-R'$ der Kräftegruppen links und

rechts vom Schnitt und sich mit diesen an den durch den Schnitt getrennten Trägerteilen das Gleichgewicht halten (vergl. Bd. I S. 2 unten). Der Linienzug $ADEFGB$ verdient daher bezüglich der inneren Kräfte auch die Bezeichnung „Spannungsmittellinie“, oder, je nachdem es sich nach der Wirkung der äufseren Kräfte vorwiegend oder ausschliefslich um Zug- oder Druckspannungen handelt, Zug- oder Druckmittellinie, oder auch einfach Drucklinie, welche letztere Bezeichnung namentlich bei den aus einzelnen Steinen hergestellten „Gewölbebogen“ oder „Gewölben“ üblich ist, in denen naturgemäfs Zugspannungen in erheblichem Mafse nicht auftreten können.

Treffender als vorstehende Bezeichnungen und neuerdings mehr in Aufnahme gekommen ist die Benennung „Mittelkraftlinie“, weil die Mittelkraft aller von links oder rechts auf die einzelnen Bogenquerschnitte wirkenden äufseren Kräfte ihrer Lage und Wirkung nach mit der vom Schnitt getroffenen Seilecksseite, bezw. mit der Tangente an die Seillinie im Schnittpunkte zusammenfällt.

Letztgenannte Bezeichnung drückt zugleich auch die Nutzanwendung des Linienzuges bei Ermittelung der in den einzelnen Bogenquerschnitten auftretenden Spannungen aus. Der Querschnitt tt, beispielsweise, wird von der Kraft $R' = \overline{02}$ getroffen, welche

Fig. 37.



seine Ebene im Punkte n im Abstande z_n von seiner zur Bogenebene senkrechten Schwerachse schneidet (vergl. Fig. 37). Die Zerlegung der Kraft R' in eine Normalkraft N und in eine Tangential-

oder Querkraft Q, im Krafteck (Fig. 36b) ausgeführt durch das bei 8 rechtwinklige Dreieck $\overline{028}$, ermöglicht die Berechnung der Spannungen unter Anwendung der bekannten Regeln.

Nach der Gl. 10 S. 38 erhält man mit $M = -N \cdot z_n$ und indem man einmal $z = +e_1$ und ein anderes Mal $z = -e_2$ setzt, die Randspannungen

$$1) \qquad \sigma_1 = -\frac{N}{F}\left(1 + \frac{z_n}{\varrho} + \frac{z_n}{\varrho k} \cdot \frac{e_1}{\varrho + e_1}\right) \quad \text{und}$$

$$2) \qquad \sigma_2 = -\frac{N}{F}\left(1 + \frac{z_n}{\varrho} - \frac{z_n}{\varrho k} \cdot \frac{e_2}{\varrho - e_2}\right),$$

worin $k = -\frac{1}{F}\int_{-e_2}^{+e_1} \frac{z}{z+\varrho} \cdot dF$.

In den bei weiten meisten Fällen der Anwendung ist der Krümmungshalbmesser ϱ im Verhältnis zur Querschnittshöhe $(e_1 + e_2)$ so grofs, dafs von einer Anwendung vorstehender genauer Formeln abgesehen und die für gerade Stäbe abgeleitete bequeme Gl. 4 bezw. 4b Bd. I S. 227 mit völlig hinreichender Genauigkeit benutzt werden kann. Man erhält damit

$$3) \qquad \sigma_1 = -\frac{N}{F} - \frac{N \cdot z_n}{J/e_1} \quad \text{und} \quad 4) \quad \sigma_2 = -\frac{N}{F} + \frac{N \cdot z_n}{J/e_2}.$$

Sind k_1 und k_2 die den Randweiten e_1 und $-e_2$ entsprechenden Kernweiten in der Richtung der in die Bogenebene fallenden Hauptachse des Querschnittes, ist also $J/e_1 = k_1 F$ und $J/e_2 = k_2 F$, so erhält man mit den mit aus der Figur 37 ersichtlichen Bezeichnungen

$$5) \qquad \sigma_1 = -\frac{N}{F}\frac{(k_1 + z_n)}{k_1} = -\frac{N \cdot f_1}{F \cdot k_1} = -\frac{M_{k1}}{J/e_1} \quad \text{und}$$

$$6) \qquad \sigma_2 = \frac{N}{F}\frac{(z_n - k_2)}{k_2} = \frac{N \cdot f_2}{F \cdot k_2} = \frac{M_{k2}}{J/e_2},$$ worin $N \cdot f_1 = M_{k1}$ und

$N \cdot f_2 = M_{k2}$ als Kernmomente, d. h. als Momente der äufseren Kräfte in Bezug auf die Kernpunkte k_1 und k_2 bezeichnet werden (vergl. Bd. I S. 265). Sind die Kernlinien des Bogenträgers, d. h. für alle Querschnitte die in die Bogenebene fallenden Kernpunkte k_1 und k_2 und die der Belastung entsprechende Mittelkraftlinie bekannt, so lassen sich mit Hülfe der Kernmomente nach Gl. 5 u. 6 in einfachster Weise die Randspannungen σ_1 u. σ_2 für alle Querschnitte berechnen.

Ist nur die Mittellinie des Bogens und die Mittelkraftlinie für eine gegebene Belastung, damit also auch für alle Querschnitte die Normalkraft N und ihr Abstand z_n von der Bogenmittellinie bekannt und bestimmte Randspannungen σ_1 und σ_2 vorgeschrieben, so lassen sich Gl. 3 u. 4 auch zur Berechnung der Querschnittsabmessungen benutzen.

Aus den durch die Mittelkraftlinie für die einzelnen Querschnitte gleichfalls bekannt gewordenen Querkräften können nach den in Band I S. 179 u. f. entwickelten Regeln die Scherspannungen, sowie nötigenfalls aus diesen und den Normalspannungen die Stoffanstrengungen ermittelt werden. Bei Bogenträgern fallen die Querkräfte indes meist verhältnismäfsig so gering aus, dafs ihr Einflufs auf die Stoffanstrengungen aufser Acht bleiben kann.

b) Lotrechte Kräfte in der Bogenebene, feste und bewegliche Lasten.

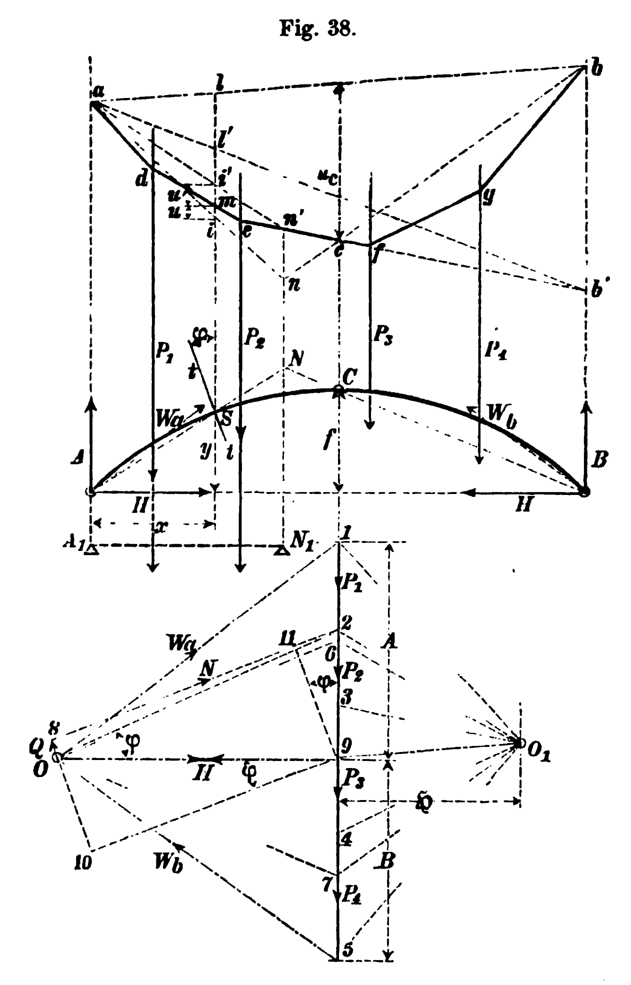
Mit dem unter a erläuterten Verfahren lassen sich für beliebige, in bestimmter Lage ruhende äufsere Kräfte die die einzelnen Bogenquerschnitte angreifenden Momente, Normal- und Querkräfte und die durch sie hervorgerufenen Spannungen, oder wenn diese vorgeschrieben, die erforderlichen Querschnittsabmessungen ermitteln In den zahlreichen Fällen der Anwendung indes, in denen neben ruhenden auch bewegliche Lasten vorkommen, ist für letztere zuerst die Lage zu ermitteln, in welcher der durch sie erzeugte Beitrag zu dem Moment, der Normal- und Querkraft in dem zu untersuchenden Querschnitte je seinen Gröfstwert annimmt. Dazu kann wiederum, wie beim geraden Stabe oder Balken, mit Vorteil die Methode der Einflufslinien benutzt werden. (Vergl. Bd. I S. 155.) Bevor indes zu deren Entwicklung für die einzelnen statischen Werte geschritten wird, möge folgende allgemeine Betrachtung hier Platz finden:

Ein symmetrischer Dreigelenkbogenträger (Fig. 38) werde in seiner Ebene von beliebigen lotrechten Lasten P_1, P_2, P_3 usw. ergriffen. Die unter deren Wirkung in den Kämpferpunkten A und B auftretenden zunächst unbekannten Stützwiderstände W_a und W_b seien durch ihre lot- und wagerechten Seitenkräfte A und B und H_a und H_b ausgedrückt. Zur Bestimmung dieser vier Unbekannten stehen die drei statischen Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte in

einer Ebene und außerdem in Bezug auf C die Momentengleichung $M_C = 0$ zur Verfügung.

Die Momentengleichungen in Bezug auf die Kämpferpunkte A und B, durch welche H_a und H_b gerichtet sind, liefern für die

Fig. 38.



lotrechten Stützkräfte A und B die gleichen Werte wie für einen gleichbelasteten geraden Balken auf zwei Stützen von gleicher Weite, hinfort als „einfacher Balken" bezeichnet.

Die Gleichung der wagerechten Kräfte $H_a - H_b = 0$ liefert ferner $H_a = H_b = H$, welche Kraft als Horizontalschub bezeichnet

wird und bei nur lotrechten Lasten die für alle Querschnitte gleichbleibende wagerechte Seitenkraft der dort tätigen Mittelkraft ausdrückt. Die Bedingung $M_C = 0$ endlich führt zu der Gleichung $A \cdot \frac{l}{2} - \Sigma P \cdot c - H \cdot f = 0$, woraus

1) $$H = \frac{A \cdot \frac{l}{2} - \Sigma P \cdot c}{f} = \frac{M_C'}{f}.$$ Darin ist $\Sigma P \cdot c$ die Summe der Momente aller Lasten und $M_C' = A \cdot \frac{l}{2} - \Sigma P \cdot c$ das Moment des „einfachen Balkens", beide in Bezug auf den Scheitelquerschnitt durch C.

Der Horizontalschub H kann auch als Polweite eines zu den Lasten durch die Gelenkpunkte A, C und B gezeichneten Seilecks gewonnen werden. Die dazu erforderliche Konstruktion für die Bestimmung des Poles 0, wie sie oben unter a Fig. 36 erläutert wurde, ist in Fig. 38 angedeutet. Die einander entsprechenden Punkte sind gleich bezeichnet. c und c_1 im Hülfsseileck fallen bei nur lotrechten Lasten in c zusammen. Durch den Polstrahl $\overline{0_1 9}$ parallel ab wird die Lastensumme $\overline{1\,5}$ in die lotrechten Stützkräfte $\overline{1\,9} = A$ und $\overline{9\,5} = B$ geteilt. Eine durch 9 gezogene Wagerechte, bezw. — wenn A und B nicht in gleicher Höhe liegen — Parallele zu AB ist als Polstrahl zur Seite AB des durch die Punkte A, C und B gezeichneten Seilecks anzusehen und mufs daher durch den Pol 0 gehen, ist also geometrischer Ort desselben. Dieser Umstand kann gleichfalls zur Bestimmung des Poles 0 benutzt werden. Aus Gl. 1 folgt nämlich mit $M_C' = u_c \cdot \mathfrak{H}$ (Fig. 38,b) $H : u_c = \mathfrak{H} : f$. Daraus läfst sich H leicht konstruieren und der Pol 0 festlegen.

Würde man nunmehr die Mittelkraftlinie zu den Lasten durch A, C und B zeichnen, so könnte die Bestimmung von M, N und Q für einen beliebigen Querschnitt tt wie unter a geschehen. Davon ist indes hier abgesehen, weil zunächst festzustellen ist, welche Lage der etwa beweglichen Lasten zu den Gröfstwerten von M, N und Q führt und weil dann unter Umständen eine andere Ermittelung jener Werte vorteilhafter sein kann.

Für einen beliebigen Schnitt tt im Abstande x von A ist

2) $$M_x = M_x' - H \cdot y,$$

wenn M' das Moment des „einfachen Balkens" für einen Querschnitt

im Abstande x von A bezeichnet. Da $M_x' = lm \cdot \mathfrak{H}$ und nach obigem $H = \frac{u_c \cdot \mathfrak{H}}{f}$, so wird auch

$$3) \qquad M_x = \mathfrak{H}\left(lm - \frac{u_c \cdot y}{f}\right).$$

Zieht man nun von A über S und von B über C je eine Gerade, ferner durch deren Schnittpunkt N eine Lotrechte, welche die Verbindungsgerade bc in n schneidet und verbindet n mit a, so stellt die dadurch auf der Lotrechten durch m abgeschnittene Strecke $-mi$ den Klammerwert der Gleichung 3 dar; denn nach der Figur ist $li : y = u_c : f$, also $li = u_c \cdot \frac{y}{f}$ und danach

$$lm - u_c \cdot \frac{y}{f} = \overline{lm} - li = -\overline{m}i = -u.$$

Somit nach Gl. 3 auch

$$4) \qquad M_x = -\mathfrak{H} \cdot u.$$

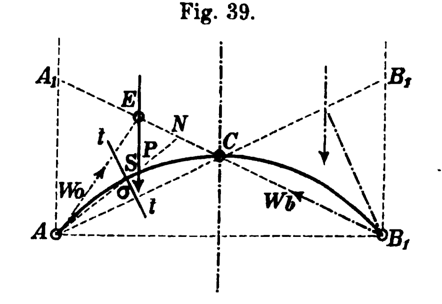
Je nachdem der Punkt i unterhalb oder oberhalb von m, bezw. aufserhalb oder innerhalb des Seileckes $adefgb$ liegt, fällt u und damit M_x negativ oder positiv aus.

Was nun die Beiträge der einzelnen Lasten in ihrer jeweiligen Lage zu dem Moment M_x anlangt, so ist die Lotrechte durch den Punkt N ersichtlich eine Belastungsscheide, derart, dafs Lasten links von N positive, rechts von N negative Beiträge zum Moment liefern.

Der Beweis hierfür ergibt sich aus folgender Überlegung:

Jede irgendwo auf dem sonst unbelasteten Bogen ruhende Last mufs sich mit den von ihr erzeugten Stützwiderständen W_a und W_b aus Rücksichten des Gleichgewichtes in einem Punkte E (Fig. 39) schneiden. Ruht die Last auf der einen, etwa linksseitigen Bogenhälfte, so mufs, wegen $M_C = 0$, der Stützwiderstand W_b an der andern, rechtsseitigen, die Richtung BC haben und derjenige W_a in A durch den Schnittpunkt E von W_b und P gerichtet sein.

Fig. 39.



Bewegt sich nun die Last P von links nach rechts über den Bogen hinweg, so schwingt während ihrer Bewegung auf der linksseitigen Bogenhälfte die Stützkraft W_a von der Richtung AA' in die Richtung AC, wogegen W_b in der Richtung BC verharrt. Völlig symmetrisch ist der Vorgang, wenn P über die rechtsseitige

Bogenhälfte hinwegläuft. Der Schnittpunkt E bewegt sich dabei auf dem Linienzuge A_1CB_1, der daher die Bezeichnung „Kämpferkraftschnittlinie" oder kurz „Kämpferkraftlinie" verdient, und, wenn es sich in W_a und W_b nach der Art der Belastung um Druckkraft handelt, auch als Kämpferdrucklinie bezeichnet wird.

Liegt die Last P rechts vom Schnitt tt, so wirkt sie auf das Bogenstück linksseits desselben nur durch die von ihr in A hervorgerufene Kämpferstützkraft W_a. Diese aber erzeugt nach obigem, je nachdem P links oder rechts von N liegt, in Bezug auf den Achspunkt S ein rechts- oder linksdrehendes, d. h. positives oder negatives Moment, und, wenn P durch N gerichtet ist, das Moment Null.

Rückt die Last P linksseits vom Schnitt tt, so wirkt auf das Bogenstück dort nicht nur die von ihr erzeugte Kämpferkraft W_a, sondern auch P selbst. Die Mittelkraft beider aber mufs nach obigem in die Richtung A_1C fallen, also in Bezug auf S gleichfalls rechts (positiv) drehen.

Soll daher im Schnitt tt das gröfste positive Moment (M_{max}) entstehen, so darf der Träger nur links von N, soll das gröfste negative Moment (M_{min}) entstehen, so mufs er rechts von N belastet werden.

Beseitigt man in Fig. 38 die Lasten rechts von N, so geht das Seileck $adefgb$ über in $adeb'$, der Punkt n rückt nach n', i nach i' und l nach l'; an Stelle von lm tritt $l'm$, li wird durch $l'i'$, mi durch $mi' = u'$ ersetzt und man erhält

$$M = \mathfrak{H} \cdot (l'm - l'i') = \mathfrak{H} \cdot mi' = \mathfrak{H} \cdot u'.$$

Dieses Moment stimmt genau überein mit dem durch die Lasten links von N (in der Figur P_1 und P_2) in einem „einfachen" Balken A_1N_1 (Fig. 38) im Schnitte lotrecht unter S erzeugten, und $aden'a$ ist das der Belastung dieses Balkens entsprechende Seileck. In ähnlicher Weise würde man das Moment der Lasten rechts von N ermitteln können.

Die im Querschnitt tt tätige Normal- und Querkraft erhält man durch entsprechende Zerlegung der auf den Querschnitt wirkenden Mittelkraft, die im Kraftsteck durch den Polstrahl $\overline{02}$ dargestellt ist. Es wird $N = \overline{82}$ und $Q = \overline{08}$. Ist φ der Winkel, welchen die Schnittebene tt mit der Lotrechten, bezw. die Tangente der Bogenlinie in S mit der Wagerechten einschliefst, so ergibt sich aus dem Kraftteck, wenn man durch 0 und 9 $\overline{8\,10} \parallel \overline{9\,11} \parallel tt$ und durch 2 und 9 $\overline{28}$ und $\overline{9\,10} \perp tt$ zieht und beachtet, dafs $\measuredangle\, \overline{0\,9\,10}$

$= \measuredangle \overline{2911} = \measuredangle \varphi$, $\overline{09} = H$ und $\overline{92} = A - P_1 = Q_x'$, gleich der Querkraft des „einfachen Balkens“ ist

5) $$N_x = Q_x' \cdot \sin\varphi + H \cdot \cos\varphi \quad \text{und}$$

6) $$Q_x = Q_x' \cdot \cos\varphi - H \cdot \sin\varphi.$$

Ist der Querschnitt des Bogenträgers und seine Kernlinien bekannt oder durch eine Überschlagsrechnung ermittelt und soll eine Kontrollrechnung oder eine endgültige Ermittelung der Querschnittsabmessungen erfolgen, so kann man sich gemäfs Gl. 5 u. 6 S. 70 der Kernmomente bedienen, deren Gröfstwerte in Bezug auf die in der Bogenebene liegenden Querschnittskernpunkte in völlig gleicher Weise ermittelt werden, wie dies oben für das Moment in Bezug auf den Achspunkt S geschehen ist. In Gl. 2 S. 73 tritt dann an Stelle von y die Ordinate des Kernpunktes, und durch diesen ist dann auch vom nächsten Kämpferpunkte (A) aus die Gerade zu ziehen, welche die Belastungsscheide N festlegt. Überhaupt kann man in gleicher Weise für jeden irgendwie mit dem Bogenträger verbundenen Punkt den Gröfstwert des Momentes ermitteln.

Geschieht die Berechnung der Randspannungen mit Hülfe des Kernmomentes, so ist eine besondere Ermittelung der Normalkraft natürlich nicht mehr erforderlich.

Das vorstehend für einen symmetrischen Bogenträger erläuterte Verfahren zur Bestimmung des Momentes, sowie der Normal- und Querkraft für irgend einen Querschnitt bleibt grundsätzlich dasselbe, auch wenn der Träger unsymmetrisch ist. Die Verbindungsgerade der Kämpferpunkte schliefst dann im allgemeinen einen Winkel α mit der Wagerechten ein; die Stützkräfte W_a und W_b, werden durch dieselben lotrechten Seitenkräfte A und B und je durch eine nun in die geneigte Richtung AB fallende Seitenkraft H_1 ausgedrückt; die wagerechte Seitenkraft $H = H_1 \cos\alpha$, der wirkliche Horizontalschub berechnet sich nach wie vor nach Gl. 1; die Ordinaten y und f sind von der geneigten AB zu messen; im übrigen bleibt alles ungeändert.

c) Einflufslinien; Gröfstwerte der Stützkräfte, Momente, Normal- und Querkräfte.

In folgendem sollen die Einflufslinien für unmittelbare Belastung entwickelt werden. Kommt mittelbare Belastung in Frage, so lassen sich die ihr entsprechenden Einflufslinien in bekannter Weise (vergl. Bd. I S. 158) aus derjenigen für unmittelbare Belastung ableiten.

1. **Einflufslinie für die lotrechten Stützkräfte A und B** (Fig. 40, a).

Eine von B nach A den Träger überschreitende Last 1 erzeugt, wenn sie sich in der Entfernung u von B befindet, in A die lotrechte Stützkraft

1) $$A = \frac{u}{l}.$$

Die der Gl. 1 entsprechende Gerade bd, welche auf der Stützlotrechten durch a die Strecke $ad = 1$ abschneidet, ist also Einflufslinie für A, diejenige für B liegt symmetrisch.

2. **Einflufslinie für den Horizontalschub H** (Fig. 40, b).

Die Last 1 im Abstande u von B ruft, solange sie sich auf der rechten Bogenhälfte befindet, nach Gl. 1 S. 73 einen Horizontalschub hervor von der Gröfse

2) $$H = \frac{M_C'}{f} = \frac{u}{l} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{f} = \frac{u}{2f}.$$

Tritt sie auf die linke Bogenhälfte über, so wird

2a) $$H = \frac{M_C'}{f} = \frac{u'}{2f} - \frac{\left(u' - \frac{l}{2}\right)}{f} \cdot 1 = \frac{l - u'}{2f}.$$

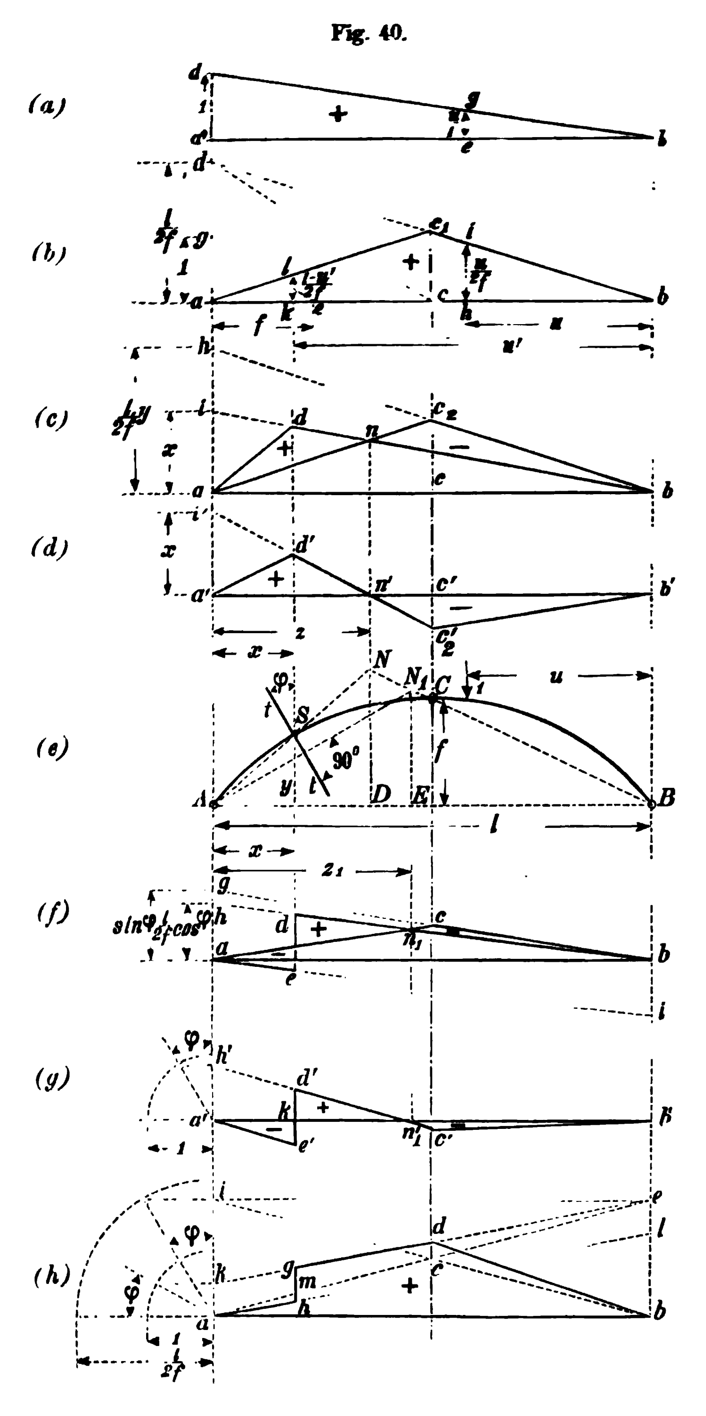
Jeder der Gl. 2 und 2a entspricht eine Gerade als Einflufslinie für die rechte und linke Bogenhälfte. Beide schneiden sich mit $u = \frac{l}{2}$ in der Scheitellotrechten in einer Höhe $cc_1 = \frac{l}{4f}$ über der Grundlinie ab und treffen die Auflagerlotrechten mit $u = 0$ und $u = l$ in der Höhe $\frac{l}{2f}$ über ab. Der symmetrische Linienzug ac_1b ist Einflufslinie. Ist der Bogen unsymmetrisch und sind l_1 und l_2 die wagerechten Entfernungen des Scheitelgelenkes C von A und B, so ergibt sich auf gleiche Weise $cc_1 = \frac{l_1 l_2}{l \cdot f}$, $ad = \frac{l_1}{f}$ und ac_1b als Einflufslinie des Horizontalschubes der wagerechten Seitenkraft der in der Richtung AB tätigen geneigten Stützkraft H_1.

3. **Einflufslinie des Momentes M** (Fig. 40, c).

Nach Gl. 2 S. 73 ist für einen Punkt S der Bogenmittellinie mit den Koordinaten x und y das Moment

3) $$M_x = M_x' - H \cdot y.$$

Fig. 40.



Die Ordinaten der Einflufslinie für M_x können wir danach als Differenz der Einflufsordinaten der Werte M_x' und $H \cdot y$ ansehen. Dem Moment M_x' des „einfachen" Balkens entspricht nach Bd. I S. 158 als Einflufslinie ein gebrochener Linienzug adb, dessen Schenkel bd in seiner Verlängerung auf der Stützlotrechten durch a $ai = x$ abschneidet, wodurch d und adb bekannt sind. — Für den zweiten negativen Teil $H \cdot y$ des Momentes erhält man die Einflufslinie aus derjenigen für den Horizontalschub (Fig. 40,*b*), indem man deren Ordinaten mit y multipliziert, also $ah = \frac{l}{2f} \cdot y$ macht, h mit b und c_2 mit a verbindet; der Linienzug ac_2b ist dann Einflufslinie des Wertes $H \cdot y$. Im Punkte n schneiden sich die Einflufslinien des ersten und zweiten Teiles im Ausdruck für M_x Gl. 3. Linksseits von n überschiefsen die positiven Ordinaten des ersten, rechtsseits die negativen des zweiten Teiles und die Unterschiede beider, links von n positiv, rechts davon negativ, sind die wirklichen Einflufsordinaten von M_x. Um sie von einer Grundlinie aus darzustellen, verwandeln wir die Dreiecke adn und nc_2b (Fig. 40,*c*) in $a'd'n'$ und $n'c_2' \cdot b'$ (Fig. 40,*d*), indem wir $a'i' = ai = x$ machen, n' auf $a'b'$ lotrecht unter n bestimmen, von i' über n' die Gerade $i'c_2'$ ziehen und c_2' mit b' sowie a' mit d' verbinden.

Wie unter *b* nachgewiesen, ist eine Lotrechte durch N Belastungsscheide des Momentes für tt; die gleiche Bedeutung hat aber n bezw. n'; beide müssen also mit N in derselben Lotrechten liegen. Die Einflufslinie $a'd'n'c_2'b'$ läfst sich daher auch direkt in der Form der Fig. 40,*d* zeichnen, da mit $a'i' = x$ die Lage von i' und durch die Lotrechte durch N auch n' bekannt ist.

In völlig gleicher Weise wie hier für den Achspunkt S kann die Einflufslinie für das Moment in Bezug auf die in der Bogenebene liegenden Kernpunkte der Querschnitte, also für die Kernmomente, oder für das Moment in Bezug auf irgend einen mit dem Bogen verbundenen Punkt gezeichnet werden. Die zur Bestimmung des Punktes N in Fig. 40,*e* von A aus durch S gezogene Gerade ist dann durch den betr. Momentenpunkt zu ziehen.

4. Einflufslinie der Querkraft Q (Fig. 40,*f*).

Nach Gl. 6 S. 76 ist

$$Q_x = Q_x' \cos\varphi - H \sin\varphi, \tag{4}$$

worin Q_x' die Querkraft des „einfachen“ Balkens ist. Wir wollen die Einflufsordinaten von Q_x wieder als Unterschied derjenigen von $Q_x' \cos \varphi$ und $H \sin \varphi$ ermitteln. Multipliziert man die Ordinaten der Einflufslinie, wie sie sich nach Bd. I S. 160 Fig. 129 für Q_x' ergeben mit $\cos \varphi$, so erhält man diejenigen für $Q_x' \cdot \cos \varphi$. Macht man daher in Fig. 40,*f* $ah = \cos \varphi \cdot 1$, verbindet h mit b, zieht durch a eine Parallele ai zu hb und im Abstande x von A eine Lotrechte, welche hb in d und ai in e schneidet, so ist $aedb$ die Einflufslinie von $Q_x' \cdot \cos \varphi$. — Diejenige von $H \sin \varphi$ erhält man wieder aus der Einflufslinie von H Fig. 40,*b*, indem man deren Ordinaten mit $\sin \varphi$ multipliziert. Macht man daher in Fig. 40,*f* ferner $ag = \frac{l}{2f} \sin \varphi$, verbindet g mit b und den dadurch bekannten Schnittpunkt c mit a, so ist acb Einflufslinie von $H \sin \varphi$.

Im Punkte n_1 schneiden sich die dem positiven ersten Teile des Ausdruckes für Q_x entsprechende Linie $aedb$ mit der dem negativen zweiten Teile zukommenden acb. Linksseits von n_1 bis de überschiefsen die positiven Ordinaten der ersteren, rechtsseits von n_1 bis b die der letzteren. Zwischen a und de addieren sich die negativen Ordinaten beider. Die Einflufsordinaten wechseln also sowohl in de als in der Lotrechten durch n_1 ihr Vorzeichen, beide Lotrechten sind daher Belastungsscheiden. Die Belastungsscheide durch N_1 verschwindet indes, sobald dieser Punkt durch den Scheitel C auf dessen rechte Seite tritt. Es fällt dann n_1 auf die Gerade bc.

Die Belastungsscheide durch n_1 gewinnt man auch, wenn man vom Kämpferpunkt A Fig. 40,*e* aus $AN_1 \perp tt$ zieht. Eine Last in N_1 ruft dann in A einen Kämpferdruck in der Richtung AN_1, also $\perp$ zu tt hervor, erzeugt somit in tt selbst nur eine Normal-, aber keine Querkraft; der Einflufs ist hier Null, links von N_1 positiv und rechts negativ.

Die in Fig. 40,*f* gewonnene Einflufslinie $aedn_1bca$ läfst sich leicht auch in die Form $a'e'd'n_1'c'b'a'$ Fig. 40,*g* umwandeln, worin h' durch $a'h' = \cos \varphi$ und n_1' auf der Geraden $a'b'$ durch das Lot durch N_1 bekannt ist. Da nach obigem N_1 und n_1 in einer Lotrechten, der Belastungsscheide liegen, so kann man die Einflufslinie in der Form Fig. 40,*g* auch direkt, d. h. ohne Fig. 40,*f* entwickeln. In Fig. 40,*g* links ist noch die geometrische Konstruktion von $a'h' = \cos \varphi$ angedeutet.

5. **Einflufslinie der Normalkraft** N (**Fig. 40,** h).

Diese wird aus Gl. 5 S. 76 in gleicher Weise wie die der Querkraft aus Gl. 6 S. 76 gewonnen. Die Konstruktion ist aus Fig. 40, h ohne weiteres ersichtlich. Es ist

5) $$N_x = H \cdot \cos\varphi + Q_x' \cdot \sin\varphi .$$

Dem ersten Teile rechtsseits der Gl. 5 entspricht die Einflußlinie acb, worin c durch den Schnitt der Geraden bi mit der Lotrechten durch C so festgelegt ist, dafs $ai = \frac{l}{2f} \cdot \cos\varphi$ wird. Die Einflußlinie des zweiten Teiles $Q_x' \cdot \sin\varphi$ wollen wir zunächst an der Geraden ace als Grundlinie entwickeln, indem wir $ak = \sin\varphi$ machen, k mit e verbinden, durch a zu ke die Parallele al und im Abstande x von A die Lotrechte gh ziehen; $ahge$ ist dann die Einflufslinie des Wertes $Q_x' \cdot \sin\varphi$. Die Einflufsfläche dieser Gröfse besteht aus dem positiven Teil gme und dem negativen amh. Ersterer addiert sich zu der dem Teil $H \cdot \cos\varphi$ entsprechenden positiven Fläche acb und letztere kommt von derselben in Abzug. Bringt man noch das Dreieck cde in die Form und Lage cdb, so entsteht der Linienzug $ahgdb$ als Einflufslinie für N_x. Die Einflußordinaten sind durchweg positiv. Für $\varphi = 0$ d. h. im Scheitelquerschnitt wird $N_x = H$.

Die geometrische Konstruktion der Strecken $ai = \cos\varphi \cdot \frac{l}{2f}$ und $ak = \sin\varphi$ ist in der Fig. 40, a links angedeutet.

Gröfstwerte der Stützkräfte, Momente, Normal- und Querkräfte.

Nachdem die Einflußlinien aller in Frage kommenden statischen Gröfsen entwickelt sind, kann man diese selbst, bezw. ihre Gröfstwerte in bekannter Weise ermitteln (vergl. Bd. I S. 155 ff.). Um diese Ermittelung in den häufiger vorkommenden Belastungsfällen zu erleichtern, möge hier noch folgendes Platz finden:

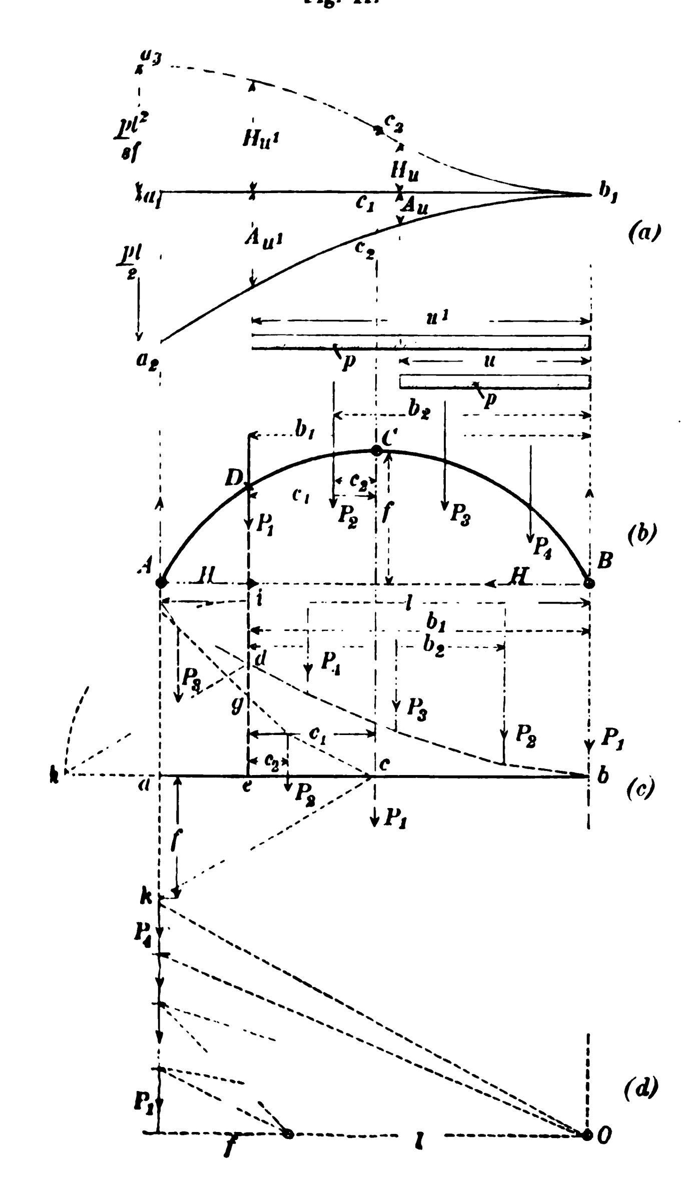
6. **Stützkräfte** A, B **und** H **für teilweise Belastung mit gleichmäfsig verteilter Last** p **für die Längeneinheit.**

Rückt die Belastung von rechts auf den Träger und ist sie bis zu einer Entfernung u von B vorgeschritten, so ist die dieser Laststellung entsprechende Einflufsfläche beg Fig. 40, a für die Stützkraft A, $F_u = \frac{u^2}{2l}$ und

6) $$A_u = \frac{p \cdot u^2}{2l} .$$

A_u steht also mit veränderlichem u in parabolischer Abhängigkeit. Die einmal gezeichnete Parabel $b_1 a_2$ Fig. 41 mit dem Scheitel in b_1 liegend, möge für diesen Verwendungszweck „A-Linie"

Fig. 41.



genannt werden. Sie ermöglicht ein unmittelbares Abgreifen von A_u für jede Laststellung. Reicht die Belastung von u bis u_1, so erhält man $A_u^{u_1} = A_{u_1} - A_u$. Der Stützkraft B entspricht eine symmetrisch gelegene Parabel.

Die der Laststellung u entsprechende Einflufsfläche bhi (Fig. 40, b) des Horizontalschubes ist, solange $u \leq \frac{l}{2}$, $F_u = \frac{u}{2f} \cdot \frac{u}{2} = \frac{u^2}{4f}$, also

7) $$H_u = \frac{p \cdot u^2}{4f}.$$

Für $u' \geqq \frac{l}{2}$ erhält man $F_{u'}$ als Unterschied der ganzen Einflufsfläche $a c_1 b$ und der dem unbelasteten Teile entsprechenden akl (Fig. 40, b) zu $F_{u'} = Fl \cdot abc_1 - Fl\ akl = \frac{l^2}{8f} - \frac{(l-u')^2}{4f}$, also

7 a) $$H_{u'} = \left[\frac{l^2}{8f} - \frac{(l-u')^2}{4f}\right] p.$$

Die Gleichungen 7 und 7a werden geometrisch durch die Parabeln $b_1 c_3$ und $c_3 a_3$ mit den Scheiteln in b_1 und a_3 (Fig. 41, a) welche zusammen die „H-Linie" bilden, ausgedrückt. Ist diese gezeichnet, so läfst sich für beliebige Laststellungen der Horizontalschub als Ordinate abgreifen.

Die Gröfstwerte von A, B und H treten bei voller Belastung ein.

7. Stützkräfte A, B und H für Einzellasten.

Kommen bewegliche Einzellasten P_1, P_2, P_3 usw. (Fig. 41, b) in Frage, so kann man die von ihnen erzeugten Stützkräfte A, B und H in bekannter Weise direkt mit Hülfe der entsprechenden Einflufslinien in der Form $A = \Sigma \eta P$, bezw. $H = \Sigma \eta P$ ermitteln, worin η die Einflufsordinaten in den Lastloten bezeichnet. Vielfach, namentlich wenn es sich um gröfsere Lastengruppen in verschiedenen Lagen handelt, ist es jedoch vorteilhafter, nachdem die Lasten, event. mit Hülfe der Einflufslinien, in die zweckentsprechende Stellung gebracht sind, die Werte A, B und H in ähnlicher Weise zu bestimmen, wie dies in Fig. 41, a für gleichmäfsig verteilte Belastung geschehen. Die A-Linie läfst sich in diesem Falle als Seileck zeichnen. Stellt man nämlich die etwa von B aus auf den Träger vorgerückte Lastengruppe, welche in dieser Stellung in A einen lotrechten Stützdruck $A = \frac{P_1 b_1 + P_2 b_2 + \dots}{l} = \frac{\Sigma \cdot P \cdot b}{l}$

erzeugt, in umgekehrter Reihenfolge so auf, dafs die erste Last P_1 über B zu stehen kommt und die anderen sich nach links in den durch ihre Gruppierung bestimmten Entfernungen anreihen und zeichnet in dieser Stellung mit der Polweite l ein Seileck zu ihnen, so ist ihr Gesamtmoment in Bezug auf einen Punkt D der Richtungslinie der Kraft P_1 in ihrer ursprünglichen Stellung (Fig. 41, c) $\Sigma P \cdot b = \overline{de} \cdot l$ und somit auch

$$8) \qquad A = \frac{\Sigma P \cdot b}{l} = \frac{\overline{de} \cdot l}{l} = \overline{de},$$

d. i. gleich der Ordinate des Seilecks unter P_1. Bewegt sich die Lastengruppe nun von B nach A, so schreitet der Punkt d auf dem Seileck fort, und in jeder Stellung ist $A = \overline{de}$. Die so gefundene A-Linie wird in symmetrischer Lage zur B-Linie. Sie läfst sich auch für beliebige „einfache" Balken zur bequemen Bestimmung des Stützdruckes einer beweglichen Gruppe von (gegeneinander unverschiebbaren) Einzellasten, etwa der Raddrücke eines Eisenbahnzuges, verwenden.

Die H-Werte ergeben sich wie folgt aus der A-Linie:

Nach Gl. 1 S. 73 ist $H = \frac{M_C'}{f}$, worin

$$M_C' = A\frac{l}{2} - (P_1 \cdot c_1 + P_2 \cdot c_2 + \ldots) = \frac{A \cdot l}{2} - \Sigma P \cdot c$$

ist, und c bezw. c_1, c_2 usw. die Abstände der links vom Scheitelgelenk (Fig. 41, b) befindlichen Lasten von diesem bedeuten.

$\Sigma P \cdot c$ erhält man wieder durch ein Seileck zu den Lasten, jetzt in solcher Stellung gezeichnet, dafs P_1 über den Scheitel zu stehen kommt und die übrigen Lasten in der gegebenen Gruppierung nach links sich anreihen. Als Polweite empfiehlt sich jetzt die Pfeilhöhe f des Bogens (vergl. Fig. 41, d). Man erhält dann $\Sigma P \cdot c = \overline{ge} \cdot f$ und

$$9) \qquad H = \frac{M_C'}{f} = \frac{Al}{2f} - \frac{\Sigma P \cdot c}{f} = \frac{Al}{2f} - \overline{ge}.$$

Da $\overline{de} = A$, so erhält man den ersten Teil des Ausdruckes für H, indem man $ak = f$ macht und durch d eine Parallele zu ck zieht, in der Strecke $\overline{eh} = \overline{ie}$ und damit nach Gl. 9

$$10) \qquad H = \overline{ie} - \overline{ge} = \overline{ig}.\text{*)}$$

*) Vergl. Müller-Breslau, Graph. Statik der Baukonstr. I 3. Aufl. S. 189.

8. Gröfstwerte des Momentes.

Da nach Fig. 40, d Bereiche positiven und negativen Einflusses vorhanden sind, hat man zunächst nach Mafsgabe der allgemeinen Darlegungen Bd. I S. 157 die bewegliche Belastung in diejenige Stellung zu bringen, in welcher der zu ermittelnde positive oder negative Gröfstwert entsteht, wobei, wenn es sich um Einzellasten verschiedener Gröfse handelt, die gröfsten Lasten in die Lotrechten der gröfsten Einflufsordinaten zu bringen sind.

Für Einzellasten kann dann die Ermittelung der Gröfstwerte M_{max} oder M_{min} mit Hülfe der in den Lastloten gemessenen Einflufsordinaten geschehen, so dafs man erhält $M_{max} = \Sigma P \cdot \eta$ oder auch $M_{min} = \Sigma P \cdot \eta$.

Ist die Zahl der Einzellasten indes eine verhältnismäfsig grofse, so kann es auch vorteilhaft sein, M_{max} und M_{min} mit Hülfe eines Seileckes in der unter b S. 73 u. f. erläuterten Weise zu bestimmen, nachdem die entsprechenden Laststellungen auf Grund der Einflufslinie herbeigeführt sind. Dabei kann man zur Vermeidung umständlicher Zeichnenarbeit das einmal gezeichnete Seileck trotz der erforderlich werdenden Lastverschiebungen gleichzeitig zur Bestimmung von M_{max} und M_{min} und auch für mehrere Querschnitte benutzen. Man braucht dann nur die Lotrechten durch die Gelenkpunkte des Bogens und durch die jedesmal leicht zu bestimmende Belastungsscheide N in die erforderliche Stellung zu den Lasten, bezw. zu dem einmal gezeichneten Seileck zu bringen.*)

Für gleichmäfsig verteilte Belastung geschieht die Berechnung von M_{max} und M_{min} vielfach zweckmäfsig aus der Einflufsfläche. Sind F_+ und F_- die positiven und negativen Anteile der Einflufsfläche für das Moment in einem bestimmten Trägerquerschnitt, so erhält man mit einer beweglichen Last p für die Längeneinheit

$$M_{p\,max} = F_+ \cdot p \quad \text{und} \quad M_{p\,min} = -F_- \cdot p;$$

für eine gleichzeitig den ganzen Träger bedeckende Last g für die Längeneinheit (Eigengewicht) aber $M_g = (F_+ - F_-) g$. Bei gleichzeitigem Wirken von g über den ganzen Träger und p im Bereiche des positiven oder negativen Einflusses

$$11)\quad M_{max} = (p+g) F_+ - g F_- = q \cdot F_+ - g \cdot F_- \quad \text{und}$$

$$12)\quad M_{min} = g \cdot F_+ - (g+p) F_- = g F_+ - q \cdot F_-, \quad \text{worin } q = p + g.$$

*) Weiteres hierüber vergl. Müller-Breslau, „Graphische Statik der Baukonstruktionen“ I. 3. Auflage S. 195.

Aus Fig. 40, *d* erhält man mit den dort angegebenen Bezeichnungen

$$13)\qquad F_{+} = z \cdot \frac{x}{z}\,\frac{z-x}{2} = x\frac{(z-x)}{2} \quad \text{und}$$

$$14)\qquad F_{-} = \frac{(l-z)}{2}\,\frac{x}{z}\cdot\left(\frac{l}{2}-z\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{l^2}{2z}-\frac{3}{2}l+z\right).$$

Verlangt man, dafs bei voller gleichmäfsiger Belastung des ganzen Trägers das Moment in allen Querschnitten gleich Null sei, so mufs für alle Schnitte, bezw. alle Werte von x auch die positive Einflufsfläche gleich der negativen, oder die Summe beider gleich Null sein. Das erfordert eine bestimmte Form der Bogenmittellinie, für die dann auch M_{max} und M_{min} absolut genommen einander gleich sind und gleichzeitig beide so klein wie möglich ausfallen.

Die Gleichsetzung der Werte F_{+} und F_{-} ergibt nach Gl. 13 u. 14

$$15)\qquad z = \frac{l^2}{3l-2x}.$$

Nach Fig. 40, *e* ist ferner $\frac{ND}{y} = \frac{z}{x}$ und $\frac{ND}{f} = \frac{l-z}{l/2}$, woraus folgt

$$16)\qquad z = \frac{2flx}{ly+2fx}.$$

Aus Gl. 15 u. 16 erhält man die Gleichung der Mittellinie für die obige Bedingung erfüllende Bogenform

$$17)\qquad y = \frac{4fx}{l^2}(l-x),$$ d. i. die Gleichung einer Parabel. (Vergl. Keck, Mechanik I, 3. Aufl. S. 207 Gl. 5.)

Damit also ein Dreigelenkbogenträger bei voller gleichmäfsiger Belastung Biegung nicht erfahre und diese im Falle ungünstigster Belastung so klein wie möglich ausfalle, mufs seine Mittellinie Parabelform erhalten.

Für einen so gestalteten Bogenträger ist nach Gl. 13 u. 15

$$F_{+} = F_{-} = \frac{(l^2 - x(3l-2x)}{3l-2x}\cdot\frac{x}{2}, \text{ also}$$

$$18)\qquad M_{p_{max}} = -M_{p_{min}} = p\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{l^2-x(3l-2x)}{3l-2x}.$$

In Gleichung 18 erscheinen die durch bestimmte Laststellungen in einem Querschnitte herbeigeführten Maximal- und Minimalmomente absolut genommen einander gleich und beide als Funktion von der Lage des Querschnittes, bezw. seiner Schwerpunktsabscisse x. Beide nehmen also auch für eine bestimmte Abscisse x ihren absoluten Gröfstwert an, der zufolge $\frac{dM_{p_{max}}}{dx} = 0$ für $x = 0{,}234\,l$ eintritt und sich hiermit nach Gl. 18 berechnet zu

19) $$M = 0{,}019\,p\,l^2.$$

Die Entfernung z von A, bis zu welcher die Last p von links oder rechts vorgerückt sein mufs, damit im Abstande $x = 0{,}234\,l$ von A das in Gl. 19 berechnete Gröfstmoment entsteht, ist nach Gl. 15

20) $$z = 0{,}395\,l = \text{rund } 0{,}4\,l.$$

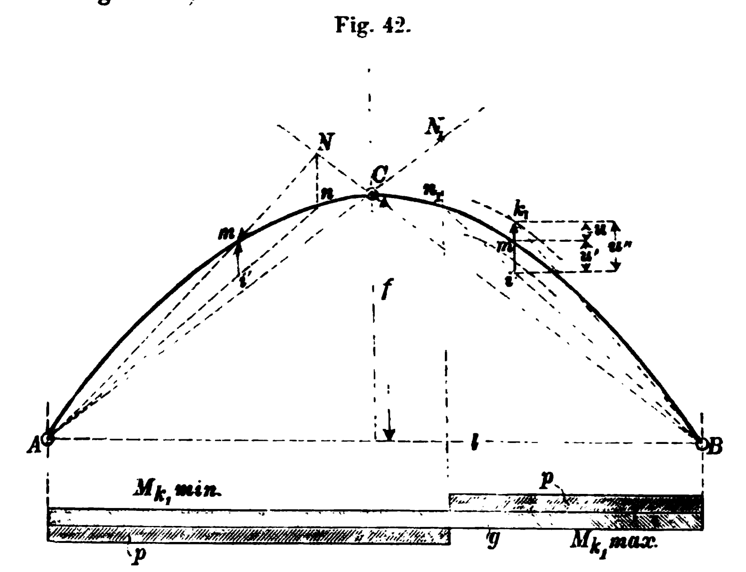
Ist der Bogenträger, wie zuweilen bei kleinen Spannweiten, von überall gleichem Querschnitt, so ist die Kenntnis eines andern als des in Gl. 19 berechneten absolut gröfsten Momentes für die Berechnung der gröfsten Biegungsspannungen, bezw. bei vorgeschriebenen Spannungen zur Bestimmung der Querschnittsabmessungen nicht erforderlich. Bei gröfseren Bauwerken mit veränderlichem Bogenquerschnitt ist $M_{p_{max}}$ für eine Anzahl von Querschnitten zu ermitteln. Dies kann vermittelst der Gl. 18 erfolgen, unter Umständen aber auch vorteilhaft mit Hülfe des unter b S. 73 erläuterten zeichnerischen Verfahrens durch Benutzung einer der Belastung entsprechenden Seillinie geschehen. Als solche kann nämlich, wenn die Bogenmittellinie eine Parabel ist, diese selbst benutzt werden, so dafs die Zeichnung einer besonderen Seillinie überhaupt nicht erforderlich wird. Die der parabolischen Bogenmittellinie als Seillinie zu der verteilten Belastung p entsprechende Polweite ist, wie oben S. 73 nachgewiesen, der Horizontalschub dieser Belastung $H = \frac{p\,l^2}{8f}$.

Soll nun beispielsweise in Bezug auf den Punkt m der Mittellinie $M_{p_{max}}$ ermittelt werden, so zieht man (Fig. 42 links) von A durch m eine Gerade bis zum Schnittpunkt N mit der Richtungslinie BC, bestimmt den Punkt n der Mittellinie lotrecht unter N und i' lotrecht unter m auf der Geraden An. Man erhält dann mit $mi' = u'$ und

21) $$M_{p_{max}} = H \cdot \overline{mi'} = \frac{p\,l^2}{8f} \cdot u' = -M_{p_{min}}.$$ (Vergl. Fig. 38 u. 42.)

Der Punkt i Fig. 38 fällt in Fig. 42 mit m zusammen, daher $mi = 0$ und für volle Belastung $M = H \cdot O = 0$ (wegen der parabolischen Bogenform).

Fig. 42.



In gleicher Weise lassen sich auch, wenn der Bogenquerschnitt — etwa durch vorläufige Ermittelung — und die Kernlinien schon bekannt geworden sind, die gröfsten Kernmomente für eine endgültige Berechnung bestimmen.

Man zieht jetzt (Fig. 42 rechts) von B aus durch den betreffenden Kernpunkt, etwa k_1, eine Gerade bis zum Schnitt N_1 mit der Richtungslinie AC, bestimmt auf der Bogenmittellinie n_1 lotrecht unter N_1 und m lotrecht unter k_1, ferner auf der Geraden Bn_1 den Punkt i' lotrecht unter k_1. Der Punkt i (Fig. 38) fällt nun nicht mit m, sondern mit k_1 zusammen. Mit $\overline{k_1 m} = u$, $\overline{m i'} = u'$, $\overline{k_1 i'} = u''$ und $u' + u = u''$ erhält man für die aus der Figur ersichtliche Belastung und $p + g = q$, $p = q - g$

$$22)\quad M_{k_{1p\,max}} = \frac{p l^2}{8 f} \cdot \overline{m i'} = \frac{p l^2}{8 f} \cdot u' \text{ und } M_{k_{1g}} = -\frac{g l^2}{8 f} \cdot k_1 m = -\frac{g l^2}{8 f} \cdot u,$$

$$\text{also } 23)\quad \begin{cases} M_{k_{1max}} = M_{k_{1p\,max}} + M_{k_{1g}} = \dfrac{l^2}{8 f}(p \cdot u' - g \cdot u) \\ \qquad = \dfrac{l^2}{8 f}\left[q u' - g(u' + u)\right] = \dfrac{l^2}{8 f} \cdot (q u' - g u''). \end{cases}$$

Um $M_{k_{1 min}}$ zu erhalten, denken wir uns den ganzen Träger mit q und außerdem rechts von N_1 mit $-q$ und mit g belastet, wodurch die in der Figur für $M_{k_{1 min}}$ angedeutete Laststellung entsteht. Es ergibt sich dann

$$24) \quad M_{k_{1 min}} = \frac{l^2}{8f}(-q\cdot u - q\cdot u' + g\cdot u') = \frac{l^2}{8f}(g\cdot u' - q\cdot u'').$$

In völlig gleicher Weise würde man für den Kernpunkt k_2 oder für irgend einen mit dem Bogen fest verbundenen Drehpunkt das Maximal- oder Minimalmoment bestimmen können.

In vorstehendem wurde unmittelbare Belastung vorausgesetzt; das Verfahren bleibt indes auch für mittelbare Belastung ungeändert, wenn man die Momentenbestimmungen in den Querschnitten vornimmt, in denen die Last (durch Querträger) in den Bogenträger übergeht. Andernfalls hat eine entsprechende Änderung einzutreten, die hier nicht weiter verfolgt werden soll.

Es soll hier noch die Frage beantwortet werden, in welchen Stellungen und in welchen Querschnitten eine über den Träger sich bewegende Einzelkraft P die absolut größten Momente erzeugt.

Die absolut genommen größten Einflußordinaten befinden sich im Scheitellot und in der Lotrechten durch den betreffenden Querschnittsschwerpunkt. Nach Fig. 40,*d* ist mit $z = \frac{l^2}{3l - 2\cdot x}$ erstere $\eta_c = \frac{x}{z}\left(\frac{l}{2} - z\right) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{l}$ und letztere $\eta_x = \frac{x}{z}(z - x) = \frac{l^2 x - 3lx^2 + 3x^3}{l^2}$.

η_c hat für einen Querschnitt im Abstande $x = 0{,}25\,l$ von A ihren Größtwert $\eta_{c_{max}} = 0{,}0625\,l$ und η_x nimmt für $x = 0{,}21\,l$ ihren Größtwert $\eta_{x_{max}} = 0{,}096\,l$ an. Die Last P erzeugt also, im Scheitel liegend, im Abstande $x = 0.25\,l$ von den Kämpferpunkten das überhaupt größte negative Moment $-0{,}0625\,P\cdot l$ und, wenn sie sich im Abstande $x = 0{,}21\,l$ von den Kämpferpunkten befindet, hier das überhaupt größte positive Moment $0{,}096\,P\cdot l$.

9. Größtwerte der Querkraft.

Auch die Einflußlinie der Querkraft läßt nach Fig. 40,*f* und 40,*g* Bereiche positiven und negativen Einflusses erkennen, und zwar zwei oder drei, je nachdem N_1 rechts oder links von C liegt.

Nachdem unter Berücksichtigung derselben die beweglichen Lasten in die den Größtwert der Querkraft für den betr. Quer-

schnitt herbeiführende Stellung gebracht sind, kann man die Werte Q_{max} und Q_{min} für Einzellasten wieder mit Hülfe der Einflufsordinaten in den Lastloten in der Form $Q = \Sigma \cdot P \cdot \eta$ bestimmen.

Für gleichmäfsig verteilte Belastung p bezw. g erhält man, wenn F_+ den Inhalt der positiven, F_- den der negativen Einflufsfläche bezeichnet,

25) $$Q_{max} = F_+(p+g) - F_- \cdot g \quad \text{und}$$

26) $$Q_{min} = F_+ g - F_- \cdot (p+g).$$

Bei den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen ist

27) $$F_+ = \cos\varphi \cdot \frac{(z_1 - x)^2}{2 z_1} \quad \text{und}$$

28) $$F_- = \frac{\cos\varphi}{2 z_1}\left[x^2 + \left(\frac{l}{2} - z_1\right) \cdot \left(l - z_1\right)\right].$$

Aus der Bedingung, dafs für jeden Schnitt tt $F_+ = F_-$, also $F_+ - F_- = 0$, somit die Querkraft für volle Belastung $Q = g(F_+ - F_-) = 0$ sei, ergibt sich die Mittellinie des Trägers wieder als Parabel. Die Gleichsetzung obiger Werte für F_+ und F_- führt zu

29) $$z_1 = \frac{l^2}{3l - 4x}.$$ Da die Tangente an die Bogenmittellinie in S parallel AN_1 ist, erhält man ferner aus der Figur $\frac{N_1 E}{z_1} = \frac{dy}{dx}$ und $\frac{N_1 E}{l - z_1} = \frac{f}{\frac{l}{2}}$, woraus folgt

30) $$z_1 = \frac{2f}{\frac{dy}{dx} + \frac{2f}{l}}.$$

Aus Gl. 29 und 30 erhält man $\frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2}(l - 2x)$, d. i.

31) $$y = \frac{4fx}{l^2}(l - x),$$ die Gleichung der Parabel.

Für einen Bogenträger mit parabolischer Mittellinie ist demnach bei voller gleichmäfsig verteilter Belastung auch die Querkraft in jedem Querschnitt gleich Null und ihr positiver und negativer Gröfstwert sind absolut genommen einander gleich. Annähernd trifft dieser Satz auch für flache Kreisbögen zu. Es ist daher bei dem Vorhandensein beweglicher Last für beide nur nötig, einen der Werte Q_{max} und Q_{min} zu ermitteln.

Die Ermittelung selbst kann mit Hülfe der Gl. 6 S. 76

32) $$Q_{x_{max}} = Q_x' \cos\varphi - H \sin\varphi$$

geschehen, wobei zu beachten ist, dafs, wenn es sich um den positiven Gröfstwert Q_{max} für einen Querschnitt handelt, zwischen diesem und dem nächsten Kämpferpunkte bewegliche Belastung p nicht vorhanden sein darf, dafs also $Q_x' = A$, gleich dem der Belastung entsprechenden lotrechten Stützdruck ist. Man kann daher Q_x' und H der A- und H-Linie (Fig. 41, a) entnehmen. Trägt man beide, wie in Fig. 43 geschehen, in ihren Richtungen von a ausgehend an die Schnittlinie tt und projiziert sie gegen dieselbe, so erhält man $Q_x' \cdot \cos\varphi = a b_1$ und $H \sin\varphi = b_1 c_1$, also $Q_{x_{max}} = a b_1 - b_1 c_1 = a c_1$.

In völlig gleicher Weise kann die Ermittelung der Gröfstwerte der Querkraft für Einzellasten geschehen, indem man jetzt $Q_x' = A$ und H der Fig. 41, c entnimmt.

Unter Umständen kann es indes auch vorteilhaft sein, $Q_{x_{max}} = -Q_{x_{min}}$ nach Gl. 32 aus den Koordinaten des Querschnittsschwerpunktes durch Rechnung zu gewinnen. Zu diesem Zwecke sind zunächst die Werte $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ auf x zurückzuführen.

Ist die Bogenmittellinie eine Parabel von der Gleichung $y = \frac{4fx}{l^2}(l - x)$, so ist für den Neigungswinkel φ der Schnittlinie tt gegen die Lotrechte, oder der Tangente im Schnitt an die Mittellinie gegen die Wagerechte

33) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l}\left(1 - 2\frac{x}{l}\right),$$

woraus man mit Hülfe bekannter goniometrischer Beziehungen erhält

34) $$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(4\frac{f}{l}\right)^2 \cdot \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)^2}} \quad \text{und}$$

35) $$\sin\varphi = \frac{4\frac{f}{l}\left(1 - 2\frac{x}{l}\right)}{\sqrt{1 + \left(4\frac{f}{l}\right)^2 \cdot \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)^2}}.$$

Da $\frac{f}{l}$ und $\frac{x}{l}$ meist runde Zahlen sind, bezw. $\frac{x}{l}$ als solche gewählt werden kann, gestaltet sich die Rechnung verhältnismäfsig einfach.

Bei der Berechnung von $Q_{x_{max}}$ und $Q_{x_{min}}$ für die einzelnen Schnitte tt ist zu unterscheiden, ob N_1 bezw. n_1 links oder rechts vom Scheitel C fällt bezw. $z_1 \lesseqgtr \frac{l}{2}$, oder gemäfs Gl. 29 $x \lesseqgtr \frac{l}{4}$ ist. Wie oben bereits erwähnt, hat die Lotrechte durch N_1 nur im ersten Falle die Bedeutung einer Belastungsscheide. In diesem Falle berechnet man $Q_{x_{max}} = -Q_{x_{min}}$ zweckmäfsig aus der positiven Einflufsfläche $kd'n_1'$ (vergl. Fig. 40,g) und erhält unter Berücksichtigung der Gl. 27, 29 und 34

$$36)\quad Q_{x_{max}} = -Q_{x_{min}} = F_{-} \cdot p = \frac{pl}{2} \cdot \frac{\left[1 - 3\frac{x}{l} + 4\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]^2}{\left(3 - 4\frac{x}{l}\right)\sqrt{1 + \left(\frac{4f}{l}\right)^2\left(1 - 2\frac{x}{l}\right)^2}}.$$

Verschwindet mit $z_1 > \frac{l}{2}$ bezw. $x > \frac{l}{4}$ die Belastungsscheide durch N_1, so erhält man am einfachsten aus der dann allein aus dem Dreieck $a'e'k$ (Fig. 41,g) bestehenden negativen Einflufsfläche unter Beachtung der Gl. 28, 29 und 34

$$37)\quad -Q_{x_{min}} = +Q_{x_{max}} = F_{-} \cdot p = \frac{pl}{2} \cdot \frac{\left(\frac{x}{l}\right)^2\left(3 - 4\frac{x}{l}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{4f}{l}\right)^2\left(1 - 2\frac{x}{l}\right)^2}}.$$

Auf der Grenze der Geltungsbereiche der Gl. 36 und 37 für $x = \frac{l}{4}$ d. i. $z_1 = \frac{l}{2}$ ergeben beide den gleichen Wert

$$Q_{x_{max}} = -Q_{x_{min}} = \frac{pl}{16 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2f}{l}\right)^2}}.$$

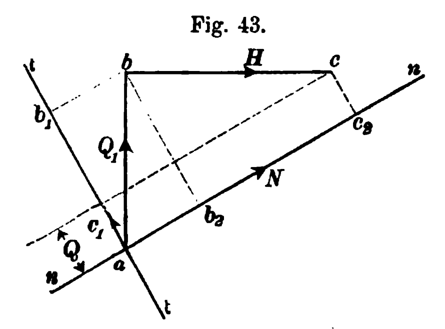
10. Gröfstwerte der Normalkraft.

Wie die Einflufslinie der Normalkraft Fig. 40,h erkennen läfst, tritt für einen beliebigen Schnitt tt der Gröfstwert der Normalkraft bei voller Belastung des Trägers ein. Ein Maximum im analytischen Sinne ist also für die Normalkraft nicht vorhanden.

Für Einzellasten kann man N_x nach Herbeiführung der entsprechenden Stellung der Lasten wieder in der Form $N_x = \Sigma \cdot P \cdot \eta$ bestimmen.

Benutzt man Gl. 5 S. 76, so kann man an Stelle der Rechnung wieder eine einfache geometrische Konstruktion treten lassen, indem man die in bekannter Weise ermittelten Werte Q_x' und H in ihren Richtungen von a ausgehend an die Schnittlinie tt (Fig. 43) an trägt und gegen die Normale nn projiziert. Man erhält dann $N_x = Q_x' \sin\varphi + H\cos\varphi = a b_2 + b_2 c_2 = a c_2$.

Fig. 43.



Für gleichmäßig verteilte volle Belastung ist für alle Schnitte $H = \frac{q\,l^2}{8f}$ und $Q_x' = q\left(\frac{l}{2} - x\right)$, also nach Gl. 5 S. 76 sowie Gl. 34 u. 35 S. 91

$$38)\qquad N_x = \frac{q\left[2f\left(1 - 2\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{l^2}{8f}\right]}{\sqrt{1 + \left(\frac{4f}{l}\right)^2\left(1 - 2\frac{x}{l}\right)^2}}.$$

Es möge hier noch N_x für den Fall abgeleitet werden, daſs eine bewegliche Belastung p den Träger vom rechtsseitigen Kämpferpunkte B bis zu einem Abstande z vom linksseitigen bedeckt. Es ist dann nach Gl. 6 u. 7a, indem man u mit $l - z$ und $l - u'$ mit z vertauscht, $Q_x' = A_z = \frac{p\cdot(l - z)^2}{2\,l}$ und $H_z = p\left(\frac{l^2}{8f} - \frac{z^2}{4f}\right)$, also unter Beachtung der Gl. 34 und 35

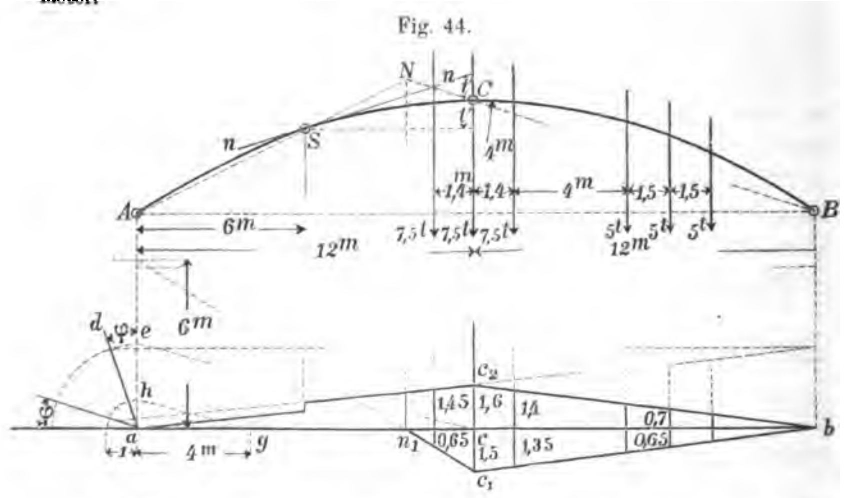
$$39)\qquad N_x = \frac{p\cdot f\left[2\left(1 - \frac{z}{l}\right)^2\left(1 - 2\frac{x}{l}\right) + \frac{1}{8}\left\{\left(\frac{l}{f}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{f}\right)^2\right\}\right]}{\sqrt{1 + \left(\frac{4f}{l}\right)^2\left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2}}.$$

Anwendungen.

Beispiel 1: Ein aus Blech und Winkeleisen genieteter parabolischer Dreigelenkbogenträger von 24 m Spannweite und 4 m Pfeilhöhe wird von der aus Fig 44 ersichtlichen Gruppe beweglicher Einzellasten (Raddrucke einer Lokomotive nebst Tender) getroffen. Sein Eigengewicht, sowie das der auf

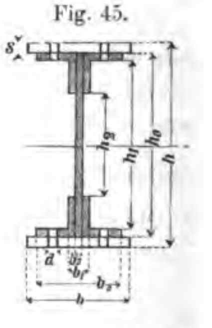
ihm ruhenden Bauteile beträgt in gleichmäfsiger Verteilung $g = 0{,}7^t$ für den Meter.

Fig. 44.



Welche Dicke s (Fig. 45) müssen die Gurtplatten erhalten, wenn ihre Breite zu 24 cm, die Höhe des Trägers einschl. Winkeleisen $h_0 = 60$ cm, die gleichschenkligen Winkeleisen zu $1{,}3 \times 8 \times 8$ cm, die Stärke des Steges zu 1,0 cm und die Niete durchweg zu 2,0 cm angenommen werden und die gröfste Randspannung zu 800 at vorgeschrieben ist? Die Randspannungen ergeben sich ausschliefslich aus dem Biegungsmoment M und der Normalkraft N; die Gröfstwerte beider sind daher zunächst zu ermitteln.

Fig. 45.



Der überhaupt gröfste Wert des Momentes tritt nach S. 87 u. 89 in einem Querschnitte in der Entfernung von etwa $x = \frac{l}{4}$ vom Kämpferpunkt A oder B ein. Die Belastungsscheide für das Moment liegt dabei mit dem Schnitt tt auf derselben Bogenhälfte und da für die gewählte Bogenform die Einflufsflächen beiderseits der Scheide gleich sind, so ist es für das Moment im wesentlichen einerlei, ob die bewegliche Last links oder rechts derselben angeordnet wird. N wird aber am gröfsten, wenn tunlichst viele Lasten auf dem Träger stehen; man hat daher die beweglichen Einzellasten in maximaler Stellung im Bereiche der negativen Einflufsfläche anzunehmen.

Wir bestimmen sowohl das durch sie erzeugte Moment, als ihren Beitrag N_P zur Normalkraft mit Hülfe der Einflufslinien. Für das Moment ist $n_1 c_1 b$ der negative Zug der Einflufslinie. Für die Normalkraft erhalten wir sie in der aus der Figur ersichtlichen Weise, indem wir ad senkrecht zur Tangente nn in S, $ec \parallel gh$ usw. ziehen (vergl. S. 81 und Fig. 40h u. 44). Daraus

ergibt sich der Linienzug $a c_3 b$. Wir stellen, um auch N_P möglichst grofs werden zu lassen, die mittlere der drei gröfseren Lasten in den Scheitel. Dann ergeben sich bei den aus der Figur ersichtlichen Einflufsordinaten

$$M = 7{,}5\,(0{,}65 + 1{,}5 + 1{,}35) + 5 \cdot 3 \cdot 0{,}65 = 36\ ^{\mathrm{mt}} \quad \text{und}$$
$$N_P = 7{,}5\,(1{,}45 + 1{,}6 + 1{,}40) + 5 \cdot 3 \cdot 0{,}70 = 44{,}0\ ^{\mathrm{t}}.$$

Die über den ganzen Träger verteilte Last g liefert zum Moment keinen, zur Normalkraft aber nach Gl. 38 mit $q = g = 0{,}7\ ^{\mathrm{t}}$, $\frac{x}{l} = \frac{1}{4}$ und $\frac{l}{f} = 6$ den Beitrag

$$N_g = \frac{0{,}7\left[2 \cdot 4\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{24^2}{8 \cdot 4}\right]}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}} = 13{,}2\ ^{\mathrm{t}}.$$

Im ganzen ist also $N = N_P + N_g = 44{,}0 + 13{,}2 = 57{,}2\ ^{\mathrm{t}} = 57\,200\ ^{\mathrm{kg}}$ und $M = 36{,}0^{\mathrm{mt}} = 3\,600\,000\ ^{\mathrm{cm\,kg}}$.

Der vorbezeichnete Querschnitt hat ohne Gurtplatten ein $W_0 = 2250\ ^{\mathrm{cm}^3}$ und eine Querschnittsfläche $F_0 = 126\ ^{\mathrm{cm}^2}$ und mit Gurtplatten von der Stärke s (vergl. Bd. I S. 20 u. 111) $W = \frac{W_0 h_0}{h} + F_k \cdot h_0 = \frac{2250 \cdot 60}{60 + 2 \cdot s} + (24 - 2 \cdot 2)\, s \cdot 60$ $= \frac{2250 \cdot 60}{60 + 2 \cdot s} + 20 \cdot s \cdot 60$ und $F = F_0 + 2\,(24 - 2 \cdot 2)\, s = 126 + 40\, s$. Nach Gl. 3 S. 70 ist nun

$$\sigma_1 = \frac{M}{W} + \frac{N}{F}, \quad \text{d. i. } 800 = \frac{3\,600\,000}{\frac{2250 \cdot 60}{60 + 2 \cdot s} + 1200\, s} + \frac{57\,200}{126 + 40 \cdot s}.$$

Die Lösung ergibt $s = 3{,}5\ ^{\mathrm{cm}}$, so dafs 2 Lamellen à $1{,}2\ ^{\mathrm{cm}}$ und eine $1{,}1\ ^{\mathrm{cm}}$ die erforderliche Stärke liefern.

Beispiel 2: Ein Träger von gleicher Pfeilhöhe und Spannweite wie Beispiel 1 ist in eine Strafsenbrücke eingefügt und hat eine ständige Belastung $g = 2{,}0\ ^{\mathrm{t}}$ und verteilte bewegliche $p = 1{,}2\ ^{\mathrm{t}}$ zu tragen. Er soll einen I-Querschnitt erhalten, welcher bei der Höhe h eine Flantschbreite $0{,}4\, h$, eine Flantschendicke von $0{,}06\, h$ und eine Stegdicke von $0{,}04\, h$, also ein Widerstandsmoment $W = 0{,}026\, h^3$ und eine Querschnittsfläche $F = 0{,}084\, h^2$ hat. Welche Höhe h ist erforderlich, wenn die Randspannung $\sigma_1 = 800\ ^{\mathrm{at}}$ vorgeschrieben ist?

Nach S. 87 tritt das negative Gröfstmoment im Querschnitt bei $x = 0{,}234\, l$ ein, wenn der Träger von einem Kämpferpunkte bis zu $z = 0{,}4\, l$ vom andern mit beweglicher Last p versehen ist. Es ist dann nach Gl. 19

$$M = 0{,}019\, p\, l^2 = 0{,}019 \cdot 1{,}2 \cdot 24^2 = 13{,}1\ ^{\mathrm{mt}} = 1\,310\,000\ ^{\mathrm{cmkg}}.$$

Der Beitrag der ständigen Belastung zur Normalkraft ist nach Gl. 38 mit $q = g = 2{,}0\ ^{\mathrm{t}}$ und $\frac{x}{l} = 0{,}234$

$$N_g = \frac{2{,}0\left[2 \cdot 4\,(1 - 2 \cdot 0{,}234)^2 + \frac{24^2}{8 \cdot 4}\right]}{\sqrt{1 + \left(4 \cdot \frac{1}{6}\right)^2 \cdot (1 - 2 \cdot 0{,}234)^2}} = 38\ ^{\mathrm{t}}$$

und für vorbezeichnete Stellung der beweglichen Last p nach Gl. 39 mit $z = 0{,}4\,l$

$$N_p = 1{,}2 \cdot 4 \cdot \frac{\left[2 \cdot 0{,}6^2 (1 - 2 \cdot 0{,}234) + \frac{1}{8} (6^2 - 2 \cdot 0{,}4^2 . 6^2)\right]}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{6}\right)^2 (1 - 2 \cdot 0{,}234)^2}} = 15{,}5^{\,t}.$$

Im ganzen ist also $N = N_g + N_p = 38 + 15{,}5 = 53{,}5^{\,t} = 53\,500^{\,kg}$ und aus der Gleichung $800 = \frac{M}{W} + \frac{N}{F} = \frac{1310000}{0{,}026\,h^3} + \frac{53500}{0{,}084\,h^2}$ erhalten wir $h = $ rd. 46^{cm}.

Beispiel 3: Welche gröfste Randspannung erzeugt eine sich über den Träger Beispiel 2 bewegende Einzellast (Chausseewalze) von $P = 8^{\,t}$, wenn neben derselben die ständige verteilte Last $g = 2{,}0^{\,t}$ f. d. Mtr. wirksam bleibt?

Nach S. 89 tritt das gröfste negative Moment im Querschnitt $x = \frac{l}{4}$ ein und zwar wenn die Last im Scheitel ruht. Es ist dann $M_{min} = -0{,}0625\,P \cdot l = -0{,}0625 \cdot 8 \cdot 24 = 12^{\,mt} = 1\,200\,000^{\,cmkg}$. Das gröfste positive Moment tritt nach S. 89 im Querschnitte $x = 0{,}21\,l$ ein, wenn die Last über demselben liegt und beträgt dann

$$M_{max} = 0{,}096 \cdot P \cdot l = 0{,}096 \cdot 8 \cdot 24 = 18{,}3^{\,mt} = 1\,830\,000^{\,cmkg}.$$

Es bleibt noch die Normalkraft N für beide Querschnitte zu ermitteln.

Die Last P erzeugt bei ihrer Lage im Scheitel einen Stützdruck $A = \frac{P}{2}$ und $H = \frac{Pl}{4f} = 1{,}5\,P$, also im Querschnitt $x = \frac{l}{4}$ nach Gl. 34 u. 35 u. Gl. 5 S. 76 mit $Q' = A = \frac{P}{2}$

$$N_{P_c} = Q' \sin\varphi + H \cos\varphi = P \cdot \frac{\left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 1{,}5\right]}{\sqrt{1 + \left(4 \cdot \frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}} = 1{,}58\,P = 12{,}64^{\,t}.$$

Befindet sich P bei $x = 0{,}21\,l$, so wird $A = 0{,}79\,P$ und $H = \frac{0{,}21\,P \cdot l}{2f} = 0{,}63\,P$ und demnach, da $Q' = A = 0{,}79\,P$

$$N_{P_x} = Q' \sin\varphi + H \cos\varphi = P \cdot \frac{\left(0{,}79 \cdot 4 \cdot \frac{1}{6}(1 - 2 \cdot 0{,}21) + 0{,}63\right)}{\sqrt{1 + \left(4 \cdot \frac{1}{6}\right)^2 (1 - 2 \cdot 0{,}21)^2}} = 0{,}87\,P = 6{,}96^{\,t}.$$

Die durch die ständige Last g erzeugte Normalkraft beträgt nach Gl. 38 für den Querschnitt $x = \frac{l}{4}$

$$N_g = 2{,}0 \cdot \frac{\left[2 \cdot 4\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{24^2}{8 \cdot 4}\right]}{\sqrt{1 + \left(\frac{4 \cdot 1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}} = 38{,}0^{\,t},$$

und für $x = 0{,}21\,l$

$$N_g = 2{,}0 \cdot \frac{\left[2 \cdot 4 (1 - 2 \cdot 0{,}21)^2 + \frac{24^2}{8 \cdot 4}\right]}{\sqrt{1 + \left(4 \cdot \frac{1}{6}\right)^2 (1 - 2 \cdot 0{,}21)^2}} = 38{,}5^{\,t}.$$

Danach ist für den Querschnitt

$x = \frac{l}{4}$, $M = -1\,200\,000$ cmkg und $N = 12{,}64 + 38{,}0 = 50{,}64$ t = rd. 50 600 kg

und für den Querschnitt

$x = 0{,}21\,l$ $M = 1\,830\,000$ cmkg und $N = 6{,}96 + 38{,}5 =$ rd. 45,5 t = 45 500 kg.

Mit $W = 0{,}026\,h^3 = 0{,}026 \cdot 46^3 = 2530$ cm³ und $F = 0{,}084\,h^2 = 0{,}084 \cdot 46^2 = 177$ cm² ergibt sich somit in der Innenkante des Schnittes $x = \frac{l}{4}$ eine Druckspannung $\sigma_2 = \frac{1\,200\,000}{2530} + \frac{50\,600}{177} =$ rd. 760 at und in der Aufsenkante des Schnittes $x = 0{,}21\,l$ $\sigma_1 = \frac{1\,830\,000}{2530} + \frac{45\,500}{177} =$ rund 980 at.

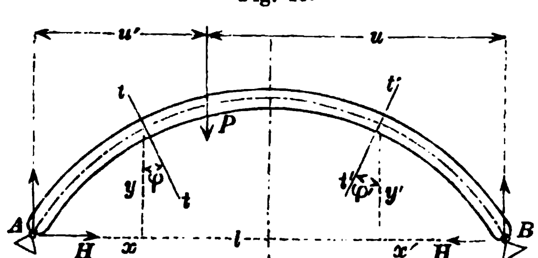
Handelt es sich nicht, wie hier angenommen, um unmittelbare, sondern um mittelbare Belastung, so hat eine entsprechende Korrektion stattzufinden, die indes in vorliegendem Falle zu einem kaum merklich abweichenden Ergebnis führt.

V. Der Zweigelenkbogenträger.

a) Allgemeines.

Jeder in zwei festen Stützgelenken ruhende, von Kräften in seiner lotrecht gedachten Krümmungsebene ergriffene einfach gekrümmte Stab wird als Zweigelenkbogenträger bezeichnet. (Fig. 46.) Sein Gleichgewichtszustand in Bezug auf die äufseren Kräfte ist nach den Dar-

Fig. 46.



legungen auf S. 6 einfach statisch unbestimmt. Durch Fortlassung des Scheitelgelenkes aus dem unter IV behandelten Dreigelenkbogenträger verschwindet die für die Bestimmung des Horizontalschubes benutzte Gleichgewichtsbedingung $M_C = 0$. An Stelle der widerstandslosen Drehbarkeit beider Bogenhälften im Scheitelgelenk tritt dortselbst im Gleichgewicht der Kräfte das von beiden Bogenhälften aufeinander ausgeübte Spannungsmoment, das sich in denselben

fortpflanzt und den Träger befähigt, bis zum gewissen Grade auch ohne Mitwirkung irgend eines Horizontalschubes, lediglich mit Hülfe lotrechter Stützkräfte A und B, den angreifenden Lasten gegenüber im Gleichgewicht zu sein.

Bei einer die Leistung eines Horizontalschubes ausschließsenden Lagerung des Trägers würde die mit dem Spannungsmoment einhergehende Biegung allerdings zu einer elastischen Entfernung der Stützpunkte A und B voneinander führen, die zu verhindern (zu „bekämpfen") die ausschließsliche Wirkung des an den „Kämpferpunkten" auftretenden Horizontalschubes ist. Aus dieser ihm obliegenden Leistung ergibt sich auch seine Gröfse. Denkt man sich nämlich eines der festen Kämpfergelenke, etwa A, wagerecht verschieblich, so tritt eine nach den Ausführungen unter III S. 50 zu berechnende wagerechte elastische Verschiebung des Punktes A ein und nach denselben Regeln läfst sich die Kraft H berechnen, welche diese Verschiebung ganz oder teilweise rückgängig zu machen oder auch zu verhindern im stande ist. (Vergl. Bd. I S. 126 unter e.)

Ist nach vorstehenden Gesichtspunkten in weiter unten näher darzulegender Weise für einen hier symmetrisch angenommenen Zweigelenkbogenträger der Horizontalschub H bestimmt und sind auch die lotrechten Stützkräfte A und B wie für einen „einfachen" Balken ermittelt, so lassen sich daraus in gleicher Weise, wie unter IV für den Dreigelenkbogenträger geschehen, die Momente, Normal- und Querkräfte für beliebige Querschnitte gewinnen. Die Ableitung von Regeln zur Bestimmung des Horizontalschubes mufs also der erste Schritt der statischen Untersuchung des Zweigelenkbogens sein, die hier zunächst unter der Annahme nur lotrechter Lasten erfolgen möge.

b) Berechnung des Horizontalschubes, Einflufslinie desselben.

Lotrechte Einzellast. Wir nehmen zunächst eine lotrechte Einzellast P im Abstande u von B, bezw. $l - u = u'$ von A wirkend an. (Fig. 47.) Das ergibt in A und B die lotrechten Stützkräfte

$$A = \frac{u}{l} \cdot P \quad \text{und} \quad B = \frac{u'}{l} \cdot P.$$

Der in den Kämpferpunkten angreifende Horizontalschub H werde als statisch nicht bestimmbare, unbekannte Gröfse in die

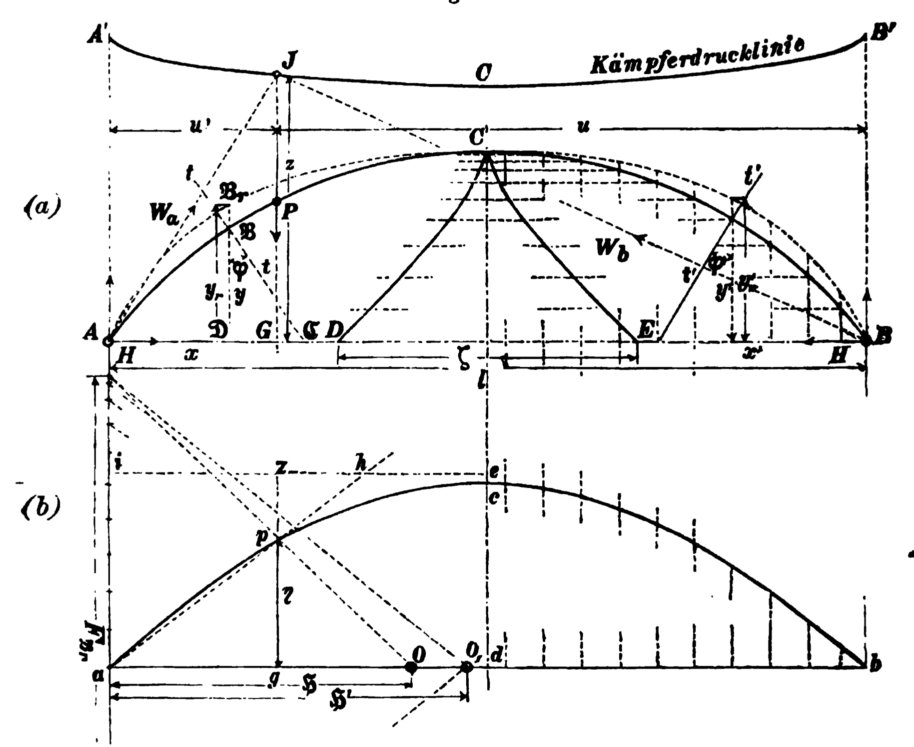
Rechnung eingeführt. Auf einen Querschnitt tt links von P (Fig. 47) im Abstande x von A wirkt damit ein Moment

1) $$M_x = A \cdot x - H \cdot y = \frac{P \cdot u}{l} \cdot x - H \cdot y$$ und nach

Gl. 5 S. 76 eine Normalkraft

2) $$N_x = Q_x' \cdot \sin\varphi + H \cdot \cos\varphi = \frac{P \cdot u}{l} \cdot \sin\varphi + H \cos\varphi.$$ *)

Fig. 47.



Für einen Schnitt $t't'$ rechts von P im Abstande x' von B erhält man ebenso

1a) $$M_{x'} = B \cdot x' - H \cdot y' = \frac{P \cdot u'}{l} \cdot x' - H \cdot y',$$

2a) $$N_{x'} = Q_{x'}' \sin\varphi' + H \cdot \cos\varphi' = \frac{P \cdot u'}{l} \sin\varphi' + H \cos\varphi'.$$

*) Diese Gleichung ist, wie man leicht erkennt, für den Zwei- ebenso wie für den Dreigelenkbogen gültig.

Sehen wir H zunächst nicht als einen absoluten Widerstand der starren Kämpferpunkte, sondern als eine aktive Kraft an, so ergibt sich aus dem Zusammenwirken derselben mit der Last P und den lotrechten Stützkräften A und B eine gewisse gegenseitige elastische Verschiebung Δl der Kämpferpunkte A und B in der Richtung ihrer Verbindungslinie, die wir als positiv oder negativ bezeichnen wollen, je nachdem Δl sich als Vergrößerung oder Verkleinerung der Spannweite l ausweist.

Zur Bestimmung von Δl denken wir uns den Bogenträger im Querschnitte der Last P festgehalten und berechnen die Verschiebungen $\Delta u'$ und Δu der Punkte A und B. Es wird dann $\Delta l = \Delta u' + \Delta u$. Wir erhalten nach Gl. 4a S. 53, wenn wir Δx_1 mit Δu, bezw. $\Delta u'$, M mit $-M_x$, bezw. $-M_{x'}$ und N mit $-N_x$ bezw. $-N_{x'}$ vertauschen*) und $y_1 = 0$ setzen,

$$\left\{\begin{aligned} \Delta u' &= \int_0^{u'} \frac{M_x \cdot y\, ds}{JE} - \int_0^{u'} \frac{N_x \cdot dx}{EF} = \int_0^{u} \frac{1}{JE}\left(\frac{P \cdot u}{l} \cdot x \cdot y - Hy^2\right) ds \\ &\quad - \int_0^{u'} \frac{1}{FE}\left(P \cdot \frac{u}{l} \sin\varphi + H \cdot \cos\varphi\right) dx, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \Delta u &= \int_0^{u} \frac{M_{x'} y' \cdot ds}{JE} - \int_0^{u} \frac{N_{x'} \cdot dx'}{EF} = \int_0^{u} \frac{1}{JE}\left(\frac{P \cdot u'}{l} x' y' - H \cdot y'^2\right) ds \\ &\quad - \int_0^{u} \frac{1}{FE}\left(P \cdot \frac{u'}{l} \sin\varphi' + H \cdot \cos\varphi'\right) dx' \end{aligned}\right.$$

und durch Addition beider Werte

$$3)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta l &= \int_0^{u'} \frac{1}{JE}\left(\frac{P \cdot u}{l} \cdot x \cdot y - H \cdot y^2\right) ds + \int_0^{u} \frac{1}{JE}\left(\frac{P \cdot u'}{l} \cdot x' \cdot y' - H \cdot y'^2\right) ds \\ &- \int_0^{u'} \frac{1}{FE}\left(\frac{P \cdot u}{l} \sin\varphi + H \cos\varphi\right) dx - \int_0^{u} \frac{1}{FE}\left(\frac{P \cdot u'}{l} \sin\varphi' + H \cdot \cos\varphi'\right) dx'. \end{aligned}\right.$$

---

*) Die negativen Vorzeichen von M_x und N_x entsprechen dem entgegengesetzten Sinne dieser Größen in Fig. 32.

Ersetzt man ds durch $\frac{dx}{\cos\varphi}$, bezw. durch $\frac{dx'}{\cos\varphi'}$ und nimmt den Trägerquerschnitt konstant an, so folgt nach entsprechender Gruppierung

$$
4)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Delta l = \frac{P}{JE}&\left[\frac{u}{l}\int_0^{u'}\frac{x\cdot y}{\cos\varphi}\cdot dx + \frac{u'}{l}\int_0^{u}\frac{x'y'}{\cos\varphi'}\,dx' - \frac{J}{F}\left\{\frac{u}{l}\int_0^{u'}\sin\varphi\cdot dx\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{u'}{l}\int_0^{u}\sin\varphi'\cdot dx'\right\}\right] - \frac{H}{JE}\left[\int_0^{u'}\frac{y^2\cdot dx}{\cos\varphi} + \int_0^{u}\frac{y'^2\cdot dx'}{\cos\varphi'}\right.\\
&\left.+\frac{J}{F}\left\{\int_0^{u'}\cos\varphi\cdot dx + \int_0^{u}\cos\varphi'\cdot dx'\right\}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Der positive erste Teil von Δl drückt den auf Entfernung der Kämpferpunkte A und B gerichteten Einfluſs der Last P, der negative zweite den die Näherung jener Punkte anstrebenden Einfluſs von H aus. Ist durch irgend welche Umstände ein bestimmtes Δl bedingt, etwa bei starrer Lagerung der Kämpferpunkte $\Delta l = 0$, so drückt Gl. 4 eine bestimmte Abhängigkeit zwischen P und H aus. Die unmittelbare analytische Benutzung der Gl. 4 zur Berechnung des Horizontalschubes H aus einer gegebenen Last P setzt die Kenntnis der Abhängigkeit zwischen x, y und φ, d. h. die Gleichung der Bogenmittellinie voraus. Vielfach fällt aber auch dann die Lösung der Integrale sehr umständlich aus und es fragt sich, ob und welche Vereinfachungen der Gl. 4 ohne wesentliche Beeinträchtigung ihrer Genauigkeit möglich sind.

Es wird sich zeigen, daſs die mit dem Faktor $\frac{J}{F}$ behafteten, der deformierenden Wirkung der Normalkraft entstammenden Glieder sowohl im Minuenden (erste eckige Klammer), als bei nicht sehr flacher Bogenform auch im Subtrahenden (zweite eckige Klammer) rechtsseits der Gl. 4 gegenüber den andern Werten verhältnismäſsig sehr klein ausfallen. Das betreffende Glied der ersten Klammer wird um so kleiner, je kleiner das Pfeilverhältnis und damit der Gröſstwert von φ sich gestaltet und umgekehrt. In dem Grenzfalle, wo der flache Bogen in die Form eines geraden Stabes übergeht, wird überall $\varphi = 0$ und damit der Wert des ganzen Gliedes gleich Null.

In dem anderen extremen Falle, wo der Bogen etwa Halbkreisform annimmt und P in der Bogenmitte ruht, also $x = r(1 - \sin\varphi)$, $\sin\varphi = \frac{r-x}{r}$ und $u = u' = \frac{l}{2} = r$ ist, wird

$$\frac{J}{F}\left\{\frac{u}{l}\int_0^u \sin\varphi \cdot dx + \frac{u'}{l}\int_0^{u'} \sin\varphi' \cdot dx'\right\} = 2\frac{J}{F}\cdot\frac{r}{2r}\int_0^r \frac{r-x}{r}\cdot dx = \frac{r}{2}\cdot\frac{J}{F} = \frac{l}{4}\cdot\frac{J}{F}.$$

Das zweite Glied des Subtrahenden wird um so gröſser, je kleiner das Pfeilverhältnis und je kleiner also der Gröſstwert von φ ist und umgekehrt. Im äuſsersten Falle, wo der flache Bogen in die Form des geraden Stabes übergeht, $\varphi = 0$ und $\cos\varphi = 1$ ist, wird der Wert des Gliedes gleich $\frac{J}{F}\left[\int_0^{u'} dx + \int_0^u dx'\right] = \frac{J}{F}\cdot l$ und mit $x = r(1 - \sin\varphi)$, also $dx = -r\cos\varphi \cdot d\varphi$ für den Halbkreis

$$\begin{cases} \frac{J}{F}\left\{\int_0^{u'} \cos\varphi \cdot dx + \int_0^u \cos\varphi' \cdot dx'\right\} = -2\frac{J}{F}\cdot r\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2\varphi \cdot d\varphi = \frac{\pi}{2}\cdot r\cdot\frac{J}{F} \\ = \frac{\pi}{4}\cdot l\,\frac{J}{F} = 0{,}785\, l\,\frac{J}{F}. \end{cases}$$

Während also der Bogen von einer völlig gestreckten Form (Pfeilverhältnis gleich Null) bis zum Halbkreise sich ändert, schwankt der Wert des ersten mit dem Faktor $\frac{J}{F}$ behafteten Gliedes der Gl. 4 zwischen 0 und $\frac{l}{4}\cdot\frac{J}{F}$ und der des zweiten zwischen $l\frac{J}{F}$ und $0{,}785\, l\frac{J}{F}$.

Wir wollen in folgendem daher das erste Glied vernachlässigen und das zweite auf $l\frac{J}{F}$ abrunden. Beide Vereinfachungen gleichen sich insofern in gewissem Grade aus, als sowohl der Minuend wie der Subtrahend in Gl. 4 dadurch vergröſsert wird. Weiter unten wird sich zeigen, daſs der damit begangene Fehler in der Tat praktisch völlig verschwindend ist.

Damit nimmt Gl. 4 die Form an

$$5)\quad \begin{cases} \Delta l = \frac{P}{JE}\left[\frac{u}{l}\int_0^{u'} \frac{xy \cdot dx}{\cos\varphi} + \frac{u'}{l}\int_0^u \frac{x'y'dx'}{\cos\varphi'}\right] - \frac{H}{JE}\left[\int_0^{u'} \frac{y^2 \cdot dx}{\cos\varphi} \right. \\ \left. + \int_0^u \frac{y'^2 \cdot dx'}{\cos\varphi'} + l\frac{J}{F}\right]. \end{cases}$$

Die genaue allgemeine analytische Lösung der Gl. 5 bietet auch jetzt noch Schwierigkeiten. Es soll daher vor weiterem eine

graphische Lösung

entwickelt und als Mittellinie eine beliebige aber symmetrische Kurve angenommen werden.

Wir ziehen zu diesem Zwecke in irgend einem Punkte $\mathfrak{B}$ der Bogenmittellinie (Fig. 47) eine zu dieser senkrechte Schnittlinie tt bis zum Schnittpunkte $\mathfrak{C}$ mit der Kämpferlinie AB und bestimmen auf der Lotrechten durch $\mathfrak{B}$ den Punkt $\mathfrak{B}_r$ so, daſs $\mathfrak{B}_r\mathfrak{D} = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ $= \frac{y}{\cos\varphi} = y_r$ wird. Wird für jeden Punkt $\mathfrak{B}$ der Bogenmittellinie der zugehörige Punkt $\mathfrak{B}_r$ bestimmt, so erhält man in der Verbindung aller dieser Punkte eine die Bogenmittellinie begleitende, in der Figur gestrichelt angegebene Kurve, die hier kurz als $\mathfrak{B}_r$-Linie bezeichnet werden möge, während wir unter der $\mathfrak{B}_r$-Fläche mit dem Inhalte $F_{\mathfrak{B}_r}$ die von der $\mathfrak{B}_r$-Linie und der Kämpferlinie AB begrenzte Fläche verstehen wollen.

Ersetzen wir in Gl. 5 $\frac{y}{\cos\varphi}$ durch y_r, bezw. $\frac{y'}{\cos\varphi'}$ durch y_r', so erhalten wir

$$
6)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta l = \frac{P}{JE}\left[\frac{u}{l}\int_0^{u'} x\cdot y_r\,dx + \frac{u'}{l}\int_0^{u} x' y_r'\cdot dx'\right] - \frac{H}{JE}\Bigg[\int_0^{u'} y\cdot y_r\cdot dx \\ + \int_0^{u} y'\cdot y_r'\cdot dx' + \frac{J}{F}\cdot l\Bigg]. \end{aligned} \right.
$$

Die Integrale der Gl. 6, in welcher y_r, bezw. y_r' die Ordinaten der $\mathfrak{B}_r$-Linie bezeichnen, lassen sich nun wie folgt deuten und bestimmen:

Es ist $\int_0^{u'} \frac{ux}{l} y_r\,dx + \int_0^{u} \frac{u'x'}{l}\cdot y_r'\,dx = M^P_{\mathfrak{B}_r}$, gleich dem Biegungsmomente eines mit der $\mathfrak{B}_r$-Fläche belasteten einfachen Balkens von der Stützweite l in Bezug auf den Lotschnitt durch P; denn, sehen wir die Teilchen $y_r\cdot dx$ und $y_r'\cdot dx'$ der $\mathfrak{B}_r$-Fläche links und rechts von P je als Einzellasten an, so sind ihre Biegungsmomente in Bezug auf P $\frac{u\cdot x}{l}\cdot dx\cdot y_r$ und $\frac{u'x'}{l}\cdot dx'\cdot y_r'$.

Ferner ist $\int_0^{u'} y\cdot y_r dx + \int_0^{u} y'\cdot y_r' dx' = 2\,S_{\mathfrak{B}_r}$, d. h. annähernd gleich dem doppelten statischen Moment der $\mathfrak{B}_r$-Fläche in Bezug auf die Kämpferlinie AB, so verstanden, dafs die als wagerechte Kräfte zu denkenden Flächenteilchen $y_r\cdot dx$ mit ihren Schwerpunkten auf der Bogenmittellinie liegend, also am Hebelarm y wirkend, einen Momentenbeitrag $y_r dx\cdot y$ liefern. Wir bezeichnen diese Momentensumme mit $2\,S_{\mathfrak{B}_r}$, weil sie ersichtlich annähernd doppelt so grofs ist, als das eigentliche statische Moment der $\mathfrak{B}_r$-Fläche in Bezug auf die Kämpferlinie AB.

Führt man die Momente $M^P_{\mathfrak{B}_r}$ und $2\,S_{\mathfrak{B}_r}$ an betreffender Stelle in Gl. 6 ein, so folgt

$$7)\qquad \Delta l = \frac{P}{JE}\cdot M^P_{\mathfrak{B}_r} - \frac{H}{JE}\left(2\,S_{\mathfrak{B}_r} + l\frac{J}{F}\right).$$

Die Momente $M^P_{\mathfrak{B}_r}$ und $2\,S_{\mathfrak{B}_r}$ können, wenn ihre analytische Berechnung für eine bestimmte Bogenform nicht etwa einfacher ausfällt, immer auf graphischem Wege für jede Bogenform leicht ermittelt werden. Durch das dargelegte Verfahren läfst sich also für jede Bogenform, wenn zwei der drei Gröfsen Δl, P oder H gegeben sind, die dritte bestimmen.

Die Lösung der Gl. 7 für H ergibt

$$8)\qquad H = \frac{P\cdot M^P_{\mathfrak{B}_r}}{2\,S_{\mathfrak{B}_r} + l\frac{J}{F}} - \frac{\Delta l J E}{2\,S_{\mathfrak{B}_r} + l\cdot\frac{J}{F}}.$$

Mit $\Delta l = 0$, d. h. bei völliger Starrheit der Kämpferpunkte A und B, verschwindet das zweite Glied.

Einflufs der Temperatur. Obiger Entwickelung liegt die Annahme zu Grunde, dafs der Bogen im Augenblicke des Angriffs der äufseren Kräfte spannungslos ist. Wird er nun bei einer bestimmten Temperatur unbelastet und spannungslos zwischen die unverschieblich angenommenen Kämpfergelenke eingebracht und tritt eine Temperaturänderung ein, so entsteht mit derselben, je nachdem es sich um eine Erwärmung oder Abkühlung handelt, ein positiver oder negativer Horizontalschub H, der die Längenänderung verhindert. Letztere aber würde, wenn einer der Kämpferpunkte, etwa A, verschieblich, ein H also nicht vorhanden wäre, $\Delta l = \varepsilon\cdot t\cdot l$ sein, worin ε die Ausdehnungsziffer und t die Temperaturänderung bedeutet. H mufs nun im stande sein, diese als eingetreten gedachte Längenänderung rückgängig zu machen,

also eine gleich grofse negative Längenänderung herbeizuführen. Setzen wir daher in Gl. 8 $\Delta l = -\varepsilon \cdot t \cdot l$ und nehmen gleichzeitig eine lotrechte Last P wirkend an, so wird

$$9)\qquad H = \frac{P \cdot M_{\mathfrak{B}_r}^P}{2\,S_{\mathfrak{B}_r} + l \cdot \frac{J}{F}} + \frac{\varepsilon \cdot t \cdot l \cdot JE}{2\,S_{\mathfrak{B}_r} + l\frac{J}{F}}.$$

Elastische Nachgiebigkeit der Kämpferpunkte. Sind die Punkte A und B nicht starr, sondern etwa durch ein elastisches Band gegenseitig festgehalten, welches, wie der Bogen, vor dem Kräfteangriff spannungslos war, so hat dasselbe, nachdem das Gleichgewicht zwischen den äufseren und inneren Kräften eingetreten ist, den Horizontalschub aufzunehmen und erfährt demgemäfs eine Verlängerung $\Delta l = \frac{\sigma}{E_1} \cdot l = \frac{H \cdot l}{F_1 \cdot E_1}$, worin F_1 den Querschnitt und E_1 das Elastizitätsmafs des Bandes bezeichnet. Damit wird nach Gl. 7

$$10)\qquad H = \frac{P \cdot M_{\mathfrak{B}_r}^P}{2\,S_{\mathfrak{B}_r} + l \cdot \frac{J}{F} + \frac{JE}{F_1 E_1}\,l},$$

oder, wenn nur die Spannung σ_1 des Bandes vorgeschrieben ist, mit $\Delta l = \frac{\sigma_1}{E_1} \cdot l$

$$10a)\qquad H = \frac{P \cdot M_{\mathfrak{B}_r}^P}{2\,S_{\mathfrak{B}_r} + l \cdot \frac{J}{E}} - \frac{\sigma_1}{E_1} \cdot \frac{l \cdot JE}{2\,S_{\mathfrak{B}_r} + l \cdot \frac{J}{F}}.$$

Hat das Material des elastischen Bandes die gleiche Wärmedehnungsziffer ε wie der Bogenträger selbst und unterliegen beide denselben Temperaturänderungen, so bleiben diese ohne Einflufs auf H. Wird Bogen und Band ungleichen Temperaturänderungen unterworfen, so ist die Differenz im Sinne der Gl. 9 zu berücksichtigen, indem man t mit $t_1 - t_2$ vertauscht.

Zur Bestimmung des nur von der Bogenform und Spannweite abhängigen statischen Momentes $2\,S_{\mathfrak{B}_r}$ zeichnen wir zu der $\mathfrak{B}_r$-Fläche, deren Teile $y_r \cdot dx$ wir zu diesem Zwecke als wagerechte, in den entsprechenden Punkten der Bogenmittellinie wirkende Kräfte ansehen, mit einer geeigneten Polweite $\mathfrak{H}$ und dem Pol 0 (Fig. 47) eine Seillinie DCE. Dabei ist der den Inhalt $F_{\mathfrak{B}_r}$ der $\mathfrak{B}_r$-Fläche darstellende, in der Figur nur zu einer Hälfte angegebene Streckenzug wegen seiner noch anderweiten Benutzung der Einfachheit halber

in lotrechter Lage angenommen und die Seilecksseiten senkrecht zu den entsprechenden Polstrahlen gezeichnet. Wir erhalten dann bei den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen

$$2\, S_{\mathfrak{B}_r} = \zeta \cdot \mathfrak{H}.$$

Die Gröfse $M^P_{\mathfrak{B}_r}$ hängt von der Lage der Last P ab und tritt in den Ausdrücken für H, Gl. 8—10, als Zähler eines Quotienten von der Form $\frac{M^P_{\mathfrak{B}_r}}{\mathfrak{N}}$ auf, worin $\mathfrak{N} = 2\, S_{\mathfrak{B}_r} + C$ ist, mit C als einer vom Trägerquerschnitt und von der Nachgiebigkeit der Kämpferpunkte A und B abhängigen Konstanten. Wir wählen daher zur Zeichnung der Seillinie acb (Fig. 47) für die Bestimmung von $M^P_{\mathfrak{B}_r}$ eine Polweite $\mathfrak{H}' = \frac{n \cdot \mathfrak{N}}{l}$ mit n als ganzer Zahl und erhalten, wenn η die Ordinate der Seillinie in der Lotrechten durch P ist,

$$\frac{M^P_{\mathfrak{B}_r}}{\mathfrak{N}} = \frac{\mathfrak{H}' \cdot \eta}{\mathfrak{N}} = \frac{n \cdot \mathfrak{N} \cdot \eta}{l \cdot \mathfrak{N}} = \frac{n}{l} \cdot \eta.$$ Mit l als Mafseinheit für η wird nach Gl. 8

$$H = \frac{P \cdot M^P_{\mathfrak{B}_r}}{\mathfrak{N}} + C' = P \cdot n \cdot \eta + C',$$ worin C' eine von der Temperatur und der Nachgiebigkeit der Kämpferpunkte A und B abhängige Konstante ist.

Bei starren Kämpferpunkten und gleichbleibender Temperatur ist $C = l \frac{J}{F}$ und C' gleich Null, also $\mathfrak{N} = 2\, S_{\mathfrak{B}_r} + l \cdot \frac{J}{F}$ und

$$H = P \cdot n \cdot \eta. \tag{11}$$

Die Seillinie acb (Fig. 47) erscheint daher als Einflufslinie des Horizontalschubes mit n als Multiplikator.

Biegungslinie als Einflufslinie.

Das durch die Seillinie acb bezw. durch Gl. 11 ausgedrückte Einflufsgesetz für H kann man wie folgt gewissermafsen physisch entstanden denken: Ist der Bogen in B starr festgehalten und in A wagerecht verschieblich, so erzeugt jeder als aktive Kraft gedachte bei A tätige Horizontalschub eine ihm verhältnisgleiche elastische Verschiebung Δl_H, deren absolute Gröfse dieselbe ist, einerlei, ob H nach links oder rechts verschiebend wirkt und einerlei, ob H allein oder noch andere Kräfte auf den Bogen wirken. Ist nun $\Delta l_{H=1}$ die durch eine Kraft $H = 1$ erzeugte Verschiebung, so leuchtet ein,

dafs zur Hervorbringung irgend einer bestimmten Verschiebung Δl eine Kraft $H = \frac{\Delta l}{\Delta l_{H=1}}$ erforderlich ist. Wird Δl durch eine Einzellast P hervorgerufen und nach dieser Entstehung mit Δl_P bezeichnet, so würde die Kraft H, die diese Verschiebung rückgängig zu machen oder zu verhindern im stande wäre, $H = \frac{\Delta l_P}{\Delta l_{H=1}}$ sein müssen.

Legt man der Last P den Wert Eins bei und ersetzt Δl_P durch $\Delta l_{P=1}$, so erhält man in

12) $$H = \eta = \frac{\Delta l_{P=1}}{\Delta l_{H=1}}$$ die Gleichung der Einflufslinie

für H in allgemeiner Form mit $\frac{1}{\Delta l_{H=1}}$ als Multiplikator. Ist nun $\Delta y_{H=1}$ die elastische Anderung, welche die Ordinate y der Bogenlinie im jeweiligen Lastangriffspunkte unter der Wirkung von $H=1$ erfährt, so besteht nach dem Maxwell'schen Satze von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen (S. 34) die Beziehung $\Delta l_{P=1} = \Delta y_{H=1}$. Damit kann man Gl. 16 auch schreiben

13) $$\eta = \frac{\Delta y_{H=1}}{\Delta l_{H=1}}.$$

In Gl. 13 drückt $\Delta y_{H=1}$ die unter der Wirkung einer Kraft $H = 1$ entstehende elastische lotrechte Verschiebung der einzelnen Punkte der Bogenlinie aus und Gl. 13 stellt in diesem Sinne die Gleichung der Biegungslinie derselben, sowie gleichzeitig das Einflufsgesetz für H dar, wobei es völlig einerlei ist, ob die Kraft $H = 1$ nach rechts oder links wirkend angenommen wird. In einem Falle hebt sich der Bogen, im andern senkt er sich; immer aber kann das Mafs der Hebung oder Senkung als Einflufsordinate für H angesehen werden.

Mit dieser Erkenntnis ist zwar für die Anwendung in vorliegendem Falle nicht viel Neues gewonnen; sie wird aber zur Entwickelung von Einflufslinien in anderen Fällen wichtige Dienste leisten. Die Werte $\Delta l_{P=1} = \Delta y_{H=1}$, wie auch der Konstantwert $\Delta l_{H=1}$ in Gl. 12 u. 13 lassen sich aus Gl. 6 oder 7 gewinnen, indem man einmal $H = 0$ und $P = 1$ und ein anderes Mal $P = 0$ und $H = 1$ setzt. Mit Hülfe der Figur erhält man $\Delta l_P = \frac{P \cdot \mathfrak{N} \cdot n \cdot \eta}{l \cdot JE}$,

$$\Delta l_H = \frac{H \cdot \zeta \cdot \mathfrak{H} + l \frac{J}{F}}{JE}.$$

Die hier entwickelten graphischen Regeln zur Bestimmung des Horizontalschubes können als grundsätzlich genau und allgemein anwendbar gelten. Für Bögen mit kleinem Pfeilverhältnis und dementsprechend kleinen Winkelwerten φ kann man mit Annäherung in Gl. 5 $\cos\varphi = 1$ setzen. An Stelle der $\mathfrak{B}_r$-Linie tritt dann die wirkliche Bogenlinie, während im übrigen das Verfahren völlig ungeändert bleibt. Da indes die Entwickelung der $\mathfrak{B}_r$-Linie aus der wirklichen Bogenlinie sich äufserst einfach gestaltet, so bietet das angedeutete Näherungsverfahren bei graphischer Behandlung der Sache kaum eine Vereinfachung und soll daher hier nicht weiter verfolgt werden.

Behandelt man nach oben dargelegtem Verfahren vergleichsweise einen Kreis- und einen Parabelbogen von den Pfeilverhältnissen $\frac{f}{l}$ gleich $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$, so ergibt sich zunächst der Inhalt $F_{\mathfrak{B}_r}$ der $\mathfrak{B}_r$-Fläche auf die Spannweite l als Längeneinheit bezogen zu

Pfeilverhältnis	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
		$-\mathfrak{B}_r$-Fläche $= F_{\mathfrak{B}_r}$	
Kreisbogen	$0{,}275\,l^2$	$0{,}193\,l^2$	$0{,}146\,l^2$
Parabel	$0{,}26\,l^2$	$0{,}183\,l^2$	$0{,}142\,l^2$

Zeichnet man die Seillinie zur Bestimmung des statischen Momentes $2\,S_{\mathfrak{B}_r}$ mit der Polweite $\mathfrak{H} = 0{,}1\,l^2$ und die Einflufslinie des Horizontalschubes mit einer solchen $\mathfrak{H}' = \frac{n \cdot \mathfrak{N}}{l} = \frac{n}{l}\left(2\,S_{\mathfrak{B}_r} + l \cdot \frac{J}{F}\right) = \frac{n}{l}\left(0{,}1\,l^2 \cdot \zeta + l \cdot \frac{J}{F}\right)$ $= n\left(0{,}1\,l \cdot \zeta + \frac{J}{F}\right) = 3 \cdot \left(0{,}1 \cdot l + \frac{J}{F}\right)$, so ergeben sich die aus nachstehender Zusammenstellung ersichtlichen Werte für ζ, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{H}'$, sowie für die Einflufsordinaten $n \cdot \eta$ von H in der Bogenmitte, wobei wieder ein Querschnitt von $\frac{J}{F} = 0{,}0004\,l^2$ zu Grunde gelegt ist.

Pfeilverhältnis	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
		Werte von ζ	
Kreisbogen	$0{,}72\,l$	$0{,}39\,l$	$0{,}235\,l$
Parabel	$0{,}65\,l$	$0{,}355\,l$	$0{,}230\,l$
		Werte von $\mathfrak{N} = \zeta \cdot 0{,}1\,l^2 + 0{,}0004\,l^3$	
Kreisbogen	$0{,}0724\,l^3$	$0{,}0394\,l^3$	$0{,}0239\,l^3$
Parabel	$0{,}0654\,l^3$	$0{,}0359\,l^3$	$0{,}0234\,l^3$
		Werte für $\mathfrak{H}' = n \cdot \frac{\mathfrak{N}}{l} = 3 \cdot \frac{\mathfrak{N}}{l}$	
Kreisbogen	$0{,}2172\,l^2$	$0{,}1182\,l^2$	$0{,}0717\,l^2$
Parabel	$0{,}1962\,l^2$	$0{,}1077\,l^2$	$0{,}0702\,l^2$

Pfeilverhältnis	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
	Einflufsordinate $n \cdot \eta = 3 \cdot \eta$ für die Bogenmitte		
Kreisbogen	$3 \cdot 0{,}183$ $= 0{,}55$	$3 \cdot 0{,}25$ $= 0{,}75$	$3 \cdot 0{,}315$ $= 0{,}945$
Parabel	$3 \cdot 0{,}197$ $= 0{,}59$	$3 \cdot 0{,}26$ $= 0{,}78$	$3 \cdot 0{,}32$ $= 0{,}96$
Unterschied	7 %	4 %	1,5 %

Aus vorstehenden Darlegungen erkennt man, inwieweit und für welche Pfeilverhältnisse es zulässig ist, einen Kreisbogen durch einen Parabelbogen zu ersetzen.

Es soll nun noch festgestellt werden, in welchen Grenzen bei den gewählten Pfeilverhältnissen der Fehler der auf S. 102 vorgenommenen Abkürzungen für die Bogenmitte ausfällt.

Das vernachlässigte, mit dem Faktor $\frac{J}{F}$ behaftete Glied der ersten (eckigen) Klammer Gl. 4 wird dort von dem übrigen Werte der Klammergröfse, der gleich $M^P_{\mathfrak{B}_r}$ ist, abgezogen. Nach obigem ist für das gewählte kleinste Pfeilverhältnis $M^P_{\mathfrak{B}_r} = \mathfrak{H}' \cdot \eta \cdot l = 0{,}0717 \cdot l^2 \cdot 0{,}315\, l = 0{,}0225\, l^3$, für die übrigen Pfeilverhältnisse aber gröfser. Das vernachlässigte Glied ist nach S. 102 selbst für den Halbkreis nur gleich $\frac{l}{4} \cdot \frac{J}{F}$, in vorliegendem Falle also gleich $\frac{l}{4} \cdot 0{,}0004\, l^2 = 0{,}0001\, l^3$. Der durch Aufseracbtlassung desselben begangene Fehler ist also selbst in ungünstigen Fällen noch kleiner als $\frac{1}{2}$ %.

Der durch Abrundung des mit $\frac{J}{F}$ multiplizierten Gliedes der zweiten (eckigen) Klammer der Gl. 4 auf $l \cdot \frac{J}{F}$ entstandene Fehler ist nach S. 102 für den Halbkreis gleich $l \frac{J}{F} - 0{,}785 \cdot l \cdot \frac{J}{F} = 0{,}215\, l \frac{J}{F}$, für den zu Grunde gelegten Querschnitt also gleich $0{,}215\, l \cdot 0{,}0004\, l^2 = 0{,}000086\, l^3$. Für flachere Bögen fällt er entsprechend kleiner aus. Er führt eine Vergröfserung des ganzen mit $\mathfrak{N}$ bezeichneten Klammerwertes, der für den gewählten flachsten Bogen gleich $0{,}0234\, l^3$ ist, herbei, die weniger als $\frac{0{,}000086}{0{,}0234} = 0{,}0037$, d. i. weniger als 0,4 % ausmacht. Da beide Fehler sich aufserdem noch in gewissem Grade ausgleichen, so können sie in der Tat in allen Fällen als praktisch völlig verschwindend gelten.

Es mag hier noch darauf hingewiesen werden, dafs das ganze Glied $l \cdot \frac{J}{F}$ hier gleich $0{,}0004\, l^3$, für das Pfeilverhältnis $\frac{f}{l} = \frac{1}{3}$ bei Parabelform des Bogens nur $\frac{0{,}0004}{0{,}0654} = 0{,}006$ d. i. 0,6 % des Gesamtwertes von $\mathfrak{N}$ ausmacht, mit dem es durch Addition verbunden

ist und dafs dieser Anteil an $\mathfrak{R}$ bei $\frac{f}{l} = \frac{1}{4}$ auf $\frac{0{,}0004}{0{,}0394} = 0{,}01$, oder rd. 1 % und bei $\frac{f}{l} = \frac{1}{5}$ auf $\frac{0{,}0004}{0{,}0234} = 0{,}017$, oder rd. 1,7 % steigt.

Nach vorstehender Bemerkung kann man in vielen Fällen der Anwendung, insbesondere bei nicht zu geringen Pfeilhöhen oder bei vorläufigen Ermittelungen das ganze Glied $l \cdot \frac{J}{F}$ vernachlässigen und gelangt dann für die Bestimmung des Horinzontalschubes zu der erheblich einfacheren Gleichung

14) $$H = P \cdot \frac{M^P_{\mathfrak{B}_r}}{2\, S_{\mathfrak{B}_r}}.$$

Zeichnet man jetzt die Seillinien acb und DCE (Fig. 47) mit derselben Polweite $\mathfrak{H}$, so wird $M^P_{\mathfrak{B}_r} = \mathfrak{H} \cdot \eta$ und $2\, S_{\mathfrak{B}_r} = \mathfrak{H} \cdot \zeta$ und daher

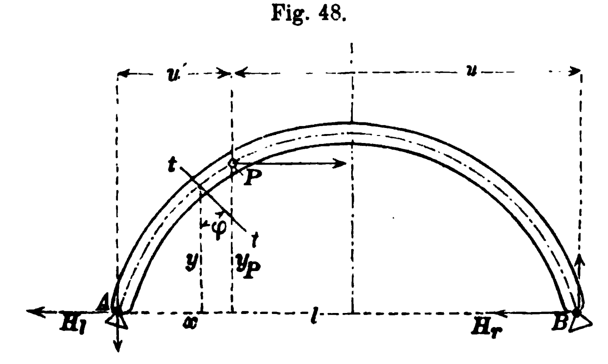
14a) $$H = P \cdot \frac{\eta}{\zeta}.$$

Danach ist η mit ζ als Mafseinheit Einflufsordinate und acb Einflufslinie von H.

Die Benutzung der Gl. 14 und 14a gestaltet sich um so vorteilhafter, als nicht, wie in allen übrigen Gleichungen, bereits die Kenntnis des Trägerquerschnittes vorausgesetzt wird.

Wagerechte Einzelkraft. Es mögen nun vor weiterem die allgemeinen Regeln zur Ermittelung des durch eine wagerechte Kraft P hervorgerufenen Horizontalschubes abgeleitet werden. Wie man leicht erkennt, müssen jetzt die in den Kämpferpunkten A und B (Fig. 48) an-

Fig. 48.



greifenden wagerechten Stützwiderstände beide der angreifenden Kraft entgegengesetzt gerichtet und im allgemeinen der Gröfse

nach voneinander verschieden sein. Wir wollen sie daher mit H_l und H_r bezeichnen. Die statischen Gleichgewichtsbedingungen liefern nun folgende 3 Gleichungen:

14) $$H_l + H_r = P \quad \text{und}$$

15) $$A + B = 0,$$

sowie in Bezug auf B die Momentengleichung

16) $$-A \cdot l + P \cdot y_P = 0.$$

Die vierte zur Bestimmung der vier Unbekannten A, B, H_l und H_r erforderliche Gleichung soll wieder aus der gegenseitigen elastischen Verschiebung Δl der beiden Punkte A und B in der Richtung ihrer Verbindungslinie abgeleitet werden. Wir denken uns H_l und H_r wieder als aktive Kräfte und erhalten nach Gl. 4a S. 53, wenn wir den Träger in P festgehalten annehmen mit

$A = -B = \dfrac{P \cdot y_P}{l}$ und $ds = \dfrac{dx}{\cos\varphi}$

$$\left\{\begin{aligned} \Delta u' &= \int_0^{u'} M_x \cdot y \cdot \frac{ds}{JE} + \int_0^{u'} N_x \cdot \frac{dx}{FE} = -\int_0^{u'} \frac{P \cdot y_P}{l \cdot JE} \cdot \frac{xy}{\cos\varphi} \cdot dx \\ &\quad + \int_0^{u'} \frac{H_l}{JE} \cdot \frac{y^2\,dx}{\cos\varphi} + \int_0^{u'} \frac{H_l}{FE} \cdot \cos\varphi\, dx + \int_0^{u'} \frac{P \cdot y_P}{l \cdot FE} \sin\varphi\, dx \end{aligned}\right.$$

und

$$\left\{\begin{aligned} \Delta u &= \int_0^{u} M_{x'} \cdot \frac{y' \cdot ds}{JE} + \int_0^{u} N_{x'} \cdot \frac{dx'}{FE} = \int_0^{u} \frac{P \cdot y_P}{l \cdot JE} \cdot \frac{x' y'}{\cos\varphi'} \cdot dx' \\ &\quad - \int_0^{u} \frac{H_r}{JE} \cdot \frac{y'^2 \cdot dx'}{\cos\varphi'} - \int_0^{u} \frac{H_r}{FE} \cos\varphi' \cdot dx' - \int_0^{u} \frac{P \cdot y_P}{l \cdot FE} \sin\varphi' \cdot dx' \end{aligned}\right.$$

und daraus, wenn der Querschnitt konstant angenommen wird und $\dfrac{y}{\cos\varphi}$ bezw. $\dfrac{y'}{\cos\varphi'}$ wieder als Ordinaten y_r und y_r' der $\mathfrak{B}_r$-Linie angesehen werden

$$\left\{\begin{aligned} \Delta l = \Delta u' + \Delta u &= \frac{P \cdot y_P}{l \cdot JE}\left\{\int_0^{u} x' \cdot y_r' \cdot dx' - \int_0^{u'} x \cdot y_r \cdot dx\right\} + \frac{P \cdot y_P}{l \cdot FE}\left\{\int_0^{u'} \sin\varphi \cdot dx \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{u} \sin\varphi' \cdot dx'\right\} - \left\{\frac{H_r}{JE}\int_0^{u} y' \cdot y_r' \cdot dx' - \frac{H_l}{JE}\int_0^{u'} y \cdot y_r \cdot dx\right\} \\ &\quad - \left\{\frac{H_r}{FE} \cdot \int_0^{u} \cos\varphi' \cdot dx' - \frac{H_l}{EF}\int_0^{u'} \cos\varphi \cdot dx\right\}. \end{aligned}\right.$$

Ersetzt man gemäfs Gl. 14 H_l durch $P - H_r$ und läfst das Glied $\frac{P \cdot y_P}{l \cdot FE}\left\{\int_0^{u'} \sin\varphi \cdot dx - \int_0^{u} \sin\varphi' \cdot dx'\right\}$ als sehr klein aufser acht, so folgt

$$17)\left\{\begin{aligned} \Delta l = & \frac{P \cdot y_P}{l \cdot JE}\left\{\int_0^{u} x' \cdot y'_r \cdot dx' - \int_0^{u'} x \cdot y_r \cdot dx\right\} + \frac{P}{JE}\int_0^{u'} y \cdot y_r \cdot dx + \frac{P}{FE}\int_0^{u'} \cos\varphi \cdot dx \\ & - \frac{H_r}{JE}\left\{\int_0^{u} y' \cdot y'_r \cdot dx' + \int_0^{u'} y \cdot y_r \cdot dx\right\} - \frac{H_r}{FE}\left\{\int_0^{u'} \cos\varphi \cdot dx + \int_0^{u} \cos\varphi' \cdot dx'\right\}.\end{aligned}\right.$$

Rundet man nun wieder (vergl. S. 102) $\int_0^{u'} \cos\varphi \cdot dx + \int_0^{u} \cos\varphi' \cdot dx$ auf l und mit der gleichen Berechtigung $\int_0^{u'} \cos\varphi \cdot dx$ auf u' ab, indem man $\cos\varphi = 1$ setzt, beachtet ferner, dafs $\int_0^{u} x' \cdot y'_r \cdot dx'$ und $\int_0^{u'} x \cdot y_r \cdot dx$ die statischen Momente M_r und M_l der als lotrechte Kräfte gedachten Teile $y_r dx$ der $\mathfrak{B}_r$-Fläche rechts und links von P in Bezug auf die Kämpferpunkte A und B sind, dafs $\int_0^{u} y' \cdot y'_r \cdot dx' + \int_0^{u'} y \cdot y_r \cdot dx$ das statische Moment $2\,S_{\mathfrak{B}_r}$ der ganzen $\mathfrak{B}_r$-Fläche und $\int_0^{u'} y \cdot y_r \cdot dx$ dasjenige $2\,S_{0\mathfrak{B}_r}^{u'}$ des Teiles derselben links von P von $x = 0$ bis $x = u'$ in Bezug auf die Sehne AB ist, so schreibt sich Gl. 17 wie folgt:

$$18)\quad \Delta l = \frac{P}{JE}\left[\frac{y_P}{l}(M_r - M_l) + 2\,S_{0\mathfrak{B}_r}^{u'} + \frac{J}{F} \cdot u'\right] - \frac{H_r}{JE}\left[2\,S_{\mathfrak{B}_r} + \frac{J}{F} \cdot l\right].$$

Ist Δl bekannt, so läfst sich nach Gl. 18 H_r aus P bestimmen. Für $\Delta l = 0$, starre Kämpferpunkte A und B und konstante Temperatur wird

$$19)\qquad H_r = \frac{P \cdot \left[\frac{y_P}{l}(M_r - M_l) + 2\,S_{0\mathfrak{B}_r}^{u'} + \frac{J}{F} \cdot u'\right]}{2\,S_{\mathfrak{B}_r} + \frac{J}{F} \cdot l}.$$

Die Werte M_r, M_l, $S_{0\mathfrak{B}_r}^{u'}$ und $S_{\mathfrak{B}_r}$ kann man für jede beliebige Bogenform bei gegebenem Kraftangriff wieder graphisch ermitteln und danach H_r bestimmen.

In den zahlreichsten und wichtigsten Fällen der Anwendung, in denen es sich um Windkräfte handelt, wie bei Dachkonstruktionen, kommen verhältnismäfsig grofse Pfeilverhältnisse in Betracht, in denen die Glieder $\frac{J}{F}\cdot l$ und $\frac{J}{F}\cdot u'$ gegen die übrigen Werte rechtsseits der Gl. 19 verschwindend klein ausfallen. Greift P beispielsweise in der Trägermitte an, so haben beide Glieder gar keinen Einflufs auf H_r und H_l, denn es ist dann $M_r - M_l = 0$, $2\,(S_{\mathfrak{B}_r})_0^{l/2} = \frac{1}{2}\,2\,S_{\mathfrak{B}_r}$ und ebenso $\frac{u'J}{F} = \frac{l}{2}\cdot\frac{J}{F} = \frac{1}{2}\cdot\frac{J}{F}\cdot l$, also mit und ohne beide Glieder $H = \frac{P}{2}$, welches Ergebnis auch an sich ohne weiteres als richtig erkennbar ist. Vernachlässigen wir danach beide Glieder, so wird

$$H_r = \frac{P\cdot\left[\frac{y_P}{l}(M_r - M_l) + 2\,(S_{\mathfrak{B}_r})_0^{u'}\right]}{2\cdot S_{\mathfrak{B}_r}}. \tag{20}$$

In Fig. 49 ist die in Gl. 20 enthaltene Beziehung zwischen H_r und P graphisch entwickelt. Es wurde mit derselben Polweite $\mathfrak{H}$ und dem Pole 0 zu der $\mathfrak{B}_r$ = Fläche eine Seillinie acb im lotrechten und DCE im wagerechten Sinne gezeichnet. Dabei sind die Tangenten der letzteren der Einfachheit halber senkrecht zu den entsprechenden Polstrahlen gezogen. Wegen der angenommenen Symmetrie ist der Bogen nur zur Hälfte dargestellt. Bei den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen ist nun $M_r = \mathfrak{H}\cdot eb$, $M_l = \mathfrak{H}\cdot gb$, also $M_r - M_l = \mathfrak{H}\cdot eg$, wobei zu bemerken ist, dafs $\mathfrak{H}\cdot gb$ das gleiche Moment des dem Teile der $\mathfrak{B}_r$-Fläche links von P symmetrisch gelegenen Teiles der rechten Bogenseite in Bezug auf B ausdrückt. Ferner ist $2\,(S_{\mathfrak{B}_r})_0^{u'} = \mathfrak{H}\cdot\zeta'$ und $2\,S_{\mathfrak{B}_r} = \mathfrak{H}\cdot\zeta$, also

$$H_r = \frac{P\cdot\left[\frac{y_P}{l}\cdot\mathfrak{H}\cdot eg + \mathfrak{H}\cdot\zeta'\right]}{\mathfrak{H}\cdot\zeta} = \frac{P\cdot\left[\frac{y_P}{l}\cdot eg + \zeta'\right]}{\zeta}.$$

Wählt man jetzt etwa auf der Wagerechten durch c einen Pol 0_1 im Abstande l von bd, zieht durch irgend einen Punkt i auf der Bogensehne AB je eine Gerade rechtwinklig zu 0_1e und 0_1g und durch P eine Wagerechte, welche jene in k und l schneidet, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $e0_1g$ und kil

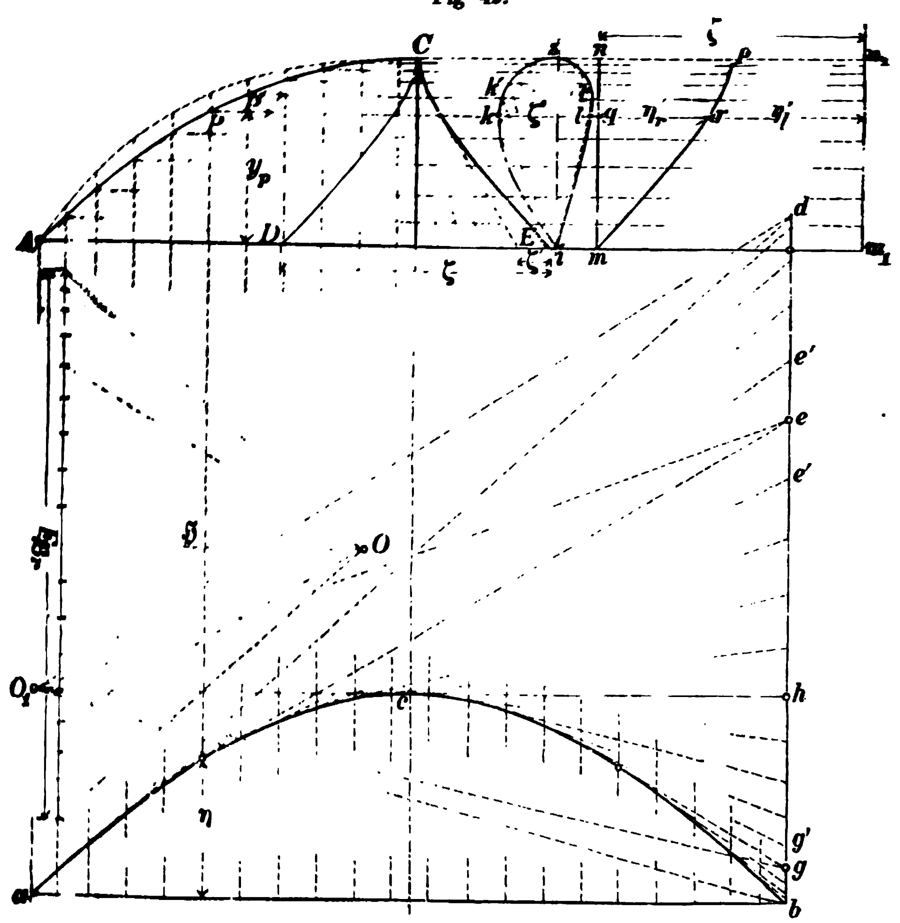
$$\frac{y_P}{l}\cdot eg = kl = \zeta'' \text{ und demnach auch } H_r = \frac{P[\zeta'' + \zeta']}{\zeta}.$$

Sieht man die Strecke ζ als Maßeinheit für $\zeta'' + \zeta'$ an, so wird für $P = 1$

$$H = \eta_l' = \zeta'' + \zeta' . \tag{21}$$

Läßt man die Kraft P von P nach P' rücken, so treten e' und g' an die Stelle von e und g und die Strahlen $ik' \perp O_1 e'$ und

Fig 49.



$il' \perp O_1 g'$ bestimmen auf der Wagerechten durch P' die Punkte k' und l'. Wandert P auf der Bogenlinie, so beschreiben die Geraden ik und il einen Strahlenbüschel um i und die Schnittpunkte k und l mit den entsprechenden Wagerechten legen die geschlossene Kurve $ikgl$ fest. Trägt man deren Sehnen ζ'' mit den zugehörigen

Strecken ζ' von einer Lotrechten mn aus in der jeweiligen Richtungslinie von P zusammen als Ordinaten $qr = \zeta'' + \zeta' = \eta'_r$ auf, so erhält man in mrp die Einflußlinie von H_r. In Bezug auf eine Lotrechte $m_1 n_1$ im Abstande ζ von mn ist mrp Einflußlinie von H_l. Wandert P von A nach C, so wächst H_r von Null auf $\frac{P}{2}$ und H_l nimmt von P bis auf $\frac{P}{2}$ ab.

Die Seillinie acb stellt, wie bereits auf S. 110 erwähnt, bei den oben vorgenommenen Abkürzungen die Einflußlinie des Horizontalschubes für lotrechte Bogenbelastung dar, wenn man ζ als Maßeinheit ihrer Ordinaten η ansieht.

Beliebig geneigte Einzelkraft.

Ist hiernach eine beliebig geneigte Einzelkraft gegeben, so kann man den durch sie hervorgerufenen Horizontalschub finden, indem man sie in ihre lot- und wagerechte Seitenkraft Y und X zerlegt. Man erhält dann unter Bezugnahme auf Fig. 49 für nicht zu flache Bögen

22) $$H_r = \frac{X \cdot \eta'_r + Y \cdot \eta}{\zeta} \quad \text{und}$$

22a) $$H_l = \frac{X \cdot \eta'_l + Y \cdot \eta}{\zeta}.$$

Analytische Lösung.

In folgendem soll noch dargelegt werden, inwieweit für besondere Bogenformen eine in vielen Fällen vorteilhaftere und bequemere, hinreichend genaue analytische Ermittelung des Horizontalschubes möglich ist.

Parabolische Bogenform mit kleiner Pfeilhöhe.

Wir setzen zunächst eine parabolische Bogenform voraus. Die Gleichung der Bogenlinie bezogen auf einen der Kämpferpunkte als Koordinatenanfang lautet dann mit f als Pfeilhöhe

23) $$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}.$$

Für Bogenträger mit kleinen Pfeilverhältnissen kann man mit einer meist genügenden, weiter unten noch zu besprechenden Annäherung in Gl. 5 $\cos\varphi = 1$ setzen. Man erhält dann

24) $$\begin{cases} \Delta l = \frac{P}{JE}\left[\frac{u}{l}\cdot\int_0^{u'} x\cdot y\cdot dx + \frac{u'}{l}\int_0^{u} x'\cdot y'\cdot dx'\right] \\ \quad - \frac{H}{JE}\left[\int_0^{u'} y^2\cdot dx + \int_0^{u} y'^2\cdot dx + l\frac{J}{F}\right]. \end{cases}$$

Für den ersten Klammerwert wird, wenn man nach Maßgabe der Gl. 23 y durch x, bezw. y' durch x' ersetzt, u' mit $l-u$ vertauscht und die Integration ausführt

$$\frac{4f}{l^2}\left[\frac{u}{l}\int_0^{u'} x^2(l-x)\,dx+\frac{u'}{l}\int_0^{u} x'^2(l-x')\,dx'\right]=\frac{f\cdot u\cdot u'}{3\cdot l^3}\left[u'^2(4l-3u')+u^2(4l-3u)\right]$$

$$=\frac{f\cdot u(l-u)}{3}\left(1+\frac{u}{l}-\frac{u^2}{l^2}\right).$$

Die beiden Integrale der zweiten Klammer drücken das doppelte statische Moment $2\,S_B$ der Bogenfläche in Bezug auf die Kämpferlinie aus und man erhält danach

$$\int_0^{u'} y^2\cdot dx+\int_0^{u} y'^2\cdot dx'=2\cdot\frac{2}{3}\cdot f\cdot l\cdot\frac{2}{5}\cdot f=\frac{8}{15}\cdot f^2\cdot l.$$

Damit geht Gl. 24 über in

$$25)\quad \Delta l=\frac{P}{JE}\cdot f\cdot\frac{u(l-u)}{3}\left(1+\frac{u}{l}-\frac{u^2}{l^2}\right)-\frac{H}{JE}\left(\frac{8}{15}\cdot f^2\cdot l+l\cdot\frac{J}{F}\right).$$

Die Benutzung der Gl. 25 zur Bestimmung einer der Größen Δl, H oder P, wenn die beiden andern gegeben sind, kann nun in bekannter Weise geschehen und dabei auch der Einfluß der Temperatur oder einer elastischen Nachgiebigkeit der Kämpferpunkte auf Δl in der auf S. 104 u. 105 erläuterten Weise berücksichtigt werden. Wir wollen hier konstante Temperatur und starre Kämpferpunkte, also $\Delta l=0$, voraussetzen und erhalten dann bei Lösung für H

$$26)\quad H=\frac{P\cdot\frac{5}{8}\cdot u(l-u)\left(1+\frac{u}{l}-\frac{u^2}{l^2}\right)}{l\cdot f\left(1+\frac{15}{8}\cdot\frac{J}{f^2\cdot F}\right)}.$$

Mit $P=1$ ist Gl. 26 als annähernde Gleichung der Einflußlinie für H anzusehen. Es möge nun zunächst festgestellt werden, welche Abweichungen gegenüber der grundsätzlich genauen graphischen Ermittelung für die Pfeilverhältnisse $\frac{f}{l}=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ und $\frac{J}{F}=0{,}0004\,l^2$ (Gl. 26) ergibt. Wir erhalten für die Träger-

mitte, d. i. für $u=\frac{l}{2}$ folgende annähernde Einflußwerte, denen die S. 109 mitgeteilten auf graphischem Wege ermittelten vergleichsweise hinzugefügt sind,

Pfeilverhältnis	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
Annähernde Werte von H für $P=1$ . .	0,58	0,77	0,96
Graphisch ermittelte Werte von H für $P=1$	0,59	0,78	0,96
Unterschied . . . . rund	2 %	$1^1/_4$ %	—

Die Annäherungsergebnisse nach Gl. 26 weichen also für Pfeilverhältnisse unter 1:5 für die Trägermitte nicht mehr merklich von den genauen ab.

Gl. 26 ist indes noch einer Vereinfachung fähig, wenn man für den mit u nicht sehr veränderlichen Wert der zweiten Klammer einen mittleren Festwert einführt.

Setzen wir $\frac{5}{8}\left(1+\frac{u}{l}-\frac{u^2}{l^2}\right)=k$ und das vom Querschnitt abhängige Glied $\frac{15}{8}\cdot\frac{J}{f^2\cdot F}=\xi$, so nimmt Gl. 26 die Form an

$$H=P\cdot\frac{k\cdot u(l-u)}{f\cdot l(1+\xi)}. \tag{27}$$

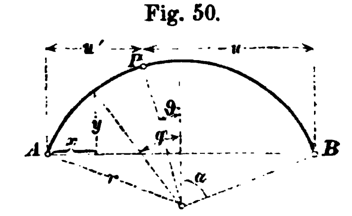
Um zu einer Bewertung von k zu gelangen, beachten wir, daſs $1+\frac{u}{l}-\frac{u^2}{l^2}$ für $u=0$ und $u=l$ den Wert 1 und für $u=\frac{l}{2}$ den Wert $\frac{5}{4}$ annimmt, k also jedenfalls zwischen $\frac{5}{8}$ und $\frac{25}{32}$ liegen müſste. Tatsächlich ist derjenige Wert von k, welcher möglichste Übereinstimmung mit den genauen Ermittelungen ergibt, etwas von dem Pfeilverhältnis des Bogens abhängig. Eine Vergleichsrechnung zeigt, daſs die Zahl k etwa zwischen 0,75 und 0,80 schwankt, wachsend mit dem Pfeilverhältnis.

Für das Verhältnis $\frac{1}{5}$ führt $k=0{,}78$ zu ziemlich genauer Übereinstimmung, während die für flache Bögen vielfach benutzte Zahl $k=0{,}75$ eine Abweichung von ca. 4 % ergibt. Bei kleineren Pfeilverhältnissen erhält man mit $k=\frac{3}{4}$ meist praktisch befriedigende Ergebnisse.

Kreisbogenform.

Wir ersetzen jetzt in Gl. 5 die rechtwinkligen Koordinaten x und y durch die entsprechenden Winkelfunktionen, und zwar ist mit Bezug auf Fig. 46 u. 50

Fig. 50.



$$y = r(\cos\varphi - \cos\alpha) \quad y' = r(\cos\varphi' - \cos\alpha) \quad u = r(\sin\alpha + \sin\vartheta)$$
$$x = r(\sin\alpha - \sin\varphi) \quad x = r(\sin\alpha - \sin\varphi') \quad u' = r(\sin\alpha - \sin\vartheta)$$
$$dx = -r\cos\varphi\, d\varphi \quad dx' = -r\cos\varphi'\, dx' \quad l = 2r\sin\alpha\,.$$

Damit schreibt sich Gl. 5, wenn man das negative Vorzeichen von dx und dx' durch Umkehrung der Integrationsgrenzen berücksichtigt

$$\left\{\begin{aligned} \Delta l = \frac{P}{JE}\cdot\frac{r^3}{2\sin\alpha}\Bigg[&(\sin\alpha + \sin\vartheta)\int_{\vartheta}^{\alpha}(\sin\alpha - \sin\varphi)(\cos\varphi - \cos\alpha)\,d\varphi \\ &+ (\sin\alpha - \sin\vartheta)\int_{-\vartheta}^{\alpha}(\sin\alpha - \sin\varphi')(\cos\varphi' - \cos\alpha)\,d\varphi'\Bigg] \\ &- \frac{H}{JE}\left[r^3\int_{-\alpha}^{+\alpha}(\cos\varphi - \cos\alpha)^2 d\varphi + 2\cdot r\sin\alpha\cdot\frac{J}{F}\right]. \end{aligned}\right.$$

Führt man die Integration aus und setzt für die vorkommenden Quadrate und Produkte trigonometrischer Funktionen eines Winkels die Funktionen der doppelten Winkel, so erhält man

$$28)\left\{\begin{aligned} \Delta l = &\frac{Pr^3}{4JE}[\cos 2\vartheta + 4\cos\alpha(\cos\vartheta + \vartheta\cdot\sin\vartheta) - 2\alpha\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha - 2] \\ &- \frac{Hr^3}{4JE}\left[4\alpha(2 + \cos 2\alpha) - 6\sin 2\alpha + \frac{8\sin\alpha}{r^2}\cdot\frac{J}{F}\right]. \end{aligned}\right.$$

Bei konstanter Temperatur und starren Kämpferpunkten, also $\Delta l = 0$, ergibt die Lösung für H

$$29)\quad H = P\cdot\frac{\cos 2\vartheta + 4\cos\alpha(\cos\vartheta + \vartheta\cdot\sin\vartheta) - 2\alpha\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha - 2}{4\alpha(2 + \cos 2\alpha) - 6\sin 2\alpha + \frac{8\sin\alpha}{r^2}\cdot\frac{J}{F}}.$$

Für den Halbkreis wird mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\cos\alpha = 0$, $\cos 2\alpha = -1$, $\sin\alpha = 1$, $\sin 2\alpha = 0$

$$30)\qquad H = P\cdot\frac{\cos 2\vartheta + 1}{2\pi + \frac{8}{r^2}\cdot\frac{J}{F}}.$$

Setzt man wieder einen Querschnitt mit

$$\frac{J}{F} = 0{,}0004\, l^2 = 0{,}0004 \cdot (2r)^2 = 0{,}0016\, r^2$$

voraus, so wird das zweite Glied im Nenner 0,0128, d. i. 1/5 % des ersten, also gegen dieses völlig verschwindend.

Die Berücksichtigung etwaiger Temperaturänderungen oder Nachgiebigkeit der Kämpferpunkte kann wieder in der auf S. 104 und 105 erläuterten Weise geschehen.

Die Benutzung der Gl. 29 gestaltet sich sehr umständlich. Ist nach Lage der Umstände eine analytische Behandlung nicht zu umgehen, so kann man, wenn es sich um flache Kreisbogen handelt, diese durch eine Parabel ersetzen und Gl. 26 oder 27 anwenden. Bei Bögen mit gröfseren Pfeilhöhen kann man das vom Querschnitt abhängige Glied im Nenner der Gl. 29 vernachlässigen.

Vertauscht man in Gl. 30 $1 + \cos 2\vartheta$ mit $2\cos^2\vartheta = 2(1 - \sin^2\vartheta)$ und beachtet, dafs $\sin\vartheta = \frac{r - u'}{r}$, so erhält man

$$H = \frac{P \cdot u'(2r - u')}{r^2 \cdot \pi} = \frac{P \cdot 4 \cdot u'(l - u')}{l^2 \cdot \pi}. \tag{30a}$$

Der Halbkreis ist also für das Pfeilverhältnis 1:2 die Bogenform, für welche die Einflufslinie des Horizontalschubes eine Parabel ist.

Diese Tatsache erkennt man auch, wenn man beachtet, dafs für den Halbkreis im Sinne der Gl. 6 S. 103 $y_r = \frac{y}{\cos\varphi} = r$, die $\mathfrak{B}_r$-Linie (vergl. S. 103) also eine wagerechte Gerade und $M^P_{\mathfrak{B}_r}$ in Gl. 8 S 104 das Biegungsmoment eines einfachen Balkens mit der Stützweite $2\,r$ und der gleichmäfsigen Belastungshöhe r ist.

c) Bestimmung der Kämpferdrucklinie.

Jede auf den Bogenträger wirkende Last P steht mit den durch sie hervorgerufenen Kämpferwiderständen W_a und W_b im Gleichgewicht und schneidet sich mit ihnen in einem Punkte J (Fig. 47). Die Lage des Punktes J ist nur von der Richtung und Lage der Kraft P, nicht aber von deren Gröfse abhängig. Verschiebt man die etwa lotrecht angenommene Last P parallel, so entspricht jeder Lage ein bestimmter Schnittpunkt J der Kämpferwiderstände oder Kämpferdrücke. Die Verbindungslinie aller dieser Schnittpunkte, die für den Zweigelenkbogen im allgemeinen eine ebene Kurve ist, nennen wir Kämpferdrucklinie. Zu ihrer zeichnerischen Bestimmung gelangt

man wie folgt: W_a Fig. 47 ist Mittelkraft von A u. H, ihre Richtungsziffer also gleich $\frac{A}{H}$ und der Abschnitt $HJ = z$, den sie auf der Richtungslinie von P abschneidet, daher $z = \frac{A}{H} \cdot u'$. Für $P = 1$ ist $A = \frac{u}{l}$ und $H = n \cdot \eta$, also auch $z = \frac{u}{l} \cdot \frac{u'}{n \cdot \eta}$. Wählt man, wie in Fig. 47 geschehen, l als Längeneinheit, macht $de = \frac{u}{n}$ und zieht durch e eine Wagerechte ei und von a durch p eine Gerade bis zum Schnitt h mit der ei, so ist, zufolge Ähnlichkeit der Dreiecke agp und aih, $z = ih$, denn es ist $ih : u' = ai : \eta = \frac{u}{n} : \eta$, also $ih = \frac{u'}{\eta} \cdot \frac{u}{n}$. In gleicher Weise lassen sich beliebig viele Punkte J der Kämpferdrucklinie bestimmen.

Hat der Bogenträger Parabelform und wird H nach einer der Annäherungsgleichungen 26 oder 27 bestimmt, so erhält man mit $u' = l - u$ und $1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{J}{f^2 \cdot F} = \xi$ im ersten Falle

$$1) \qquad z = \frac{A}{H} \cdot u' = \frac{P \cdot u}{l} \, \frac{8 l f \cdot (1 + \xi)(l - u)}{P \cdot 5 u (l - u)\left(1 + \frac{u}{l} - \frac{u^2}{l^2}\right)} = \frac{8}{5} \cdot f \cdot \frac{(1 + \xi)}{1 + \frac{u}{l} - \frac{u^2}{l^2}}.$$

und im zweiten

$$2) \qquad z = \frac{P \cdot u}{l} \cdot \frac{f \cdot l (1 + \xi)(l - u)}{P \cdot k u (l - u)} = \frac{f (1 + \xi)}{k}.$$

Im letzteren Falle ist z also eine von u unabhängige Konstante, und die Kämpferdrucklinie eine wagerechte Gerade.

Für einen Bogen vom Pfeilverhältnis $\frac{1}{4}$ und $\frac{J}{F} = 0{,}0004\, l^2$ wird $1 + \xi = 1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{0{,}0004\, l^2}{f^2} = 1{,}012$ und nach Gl. 1 für die Trägermitte mit $u = \frac{l}{2}$ $z = 1{,}3 f$ und über dem Kämpfer $z = 1{,}62 f$. Nach Gl. 2 wird mit $k = 0{,}75$ durchweg $z = 1{,}35 f$. Die genaue graphische Ermittelung ergibt in der Bogenmitte $z = 1{,}28 f$ und über den Kämpfern $z = 1{,}70$. Hat der Bogen die Form einer Kreislinie, so sind zur Berechnung von z die Werte $A = \frac{P \cdot u}{l}$ und H nach Gl. 29 zu benutzen. Der Halbkreis ist für das Pfeilverhältnis 1 : 2

die Bogenform, für welche die Kämpferdrucklinie **genau** eine gerade Linie ist. Unter Berücksichtigung der Gl. 30a S. 119 erhalten wir nämlich $z = u' \cdot \frac{A}{H} = u' \cdot \frac{P \cdot (l - u') \cdot \pi \cdot l^2}{l \cdot 4 \cdot P \cdot u'(l - u')} = \frac{\pi \cdot l}{4} = \frac{\pi \cdot r}{2}$, also konstant.

d) Einflufslinie und Gröfstwert des Biegungsmomentes, der Normal- und Querkräfte.

1. Einflufslinie und Gröfstwert des Biegungsmomentes.

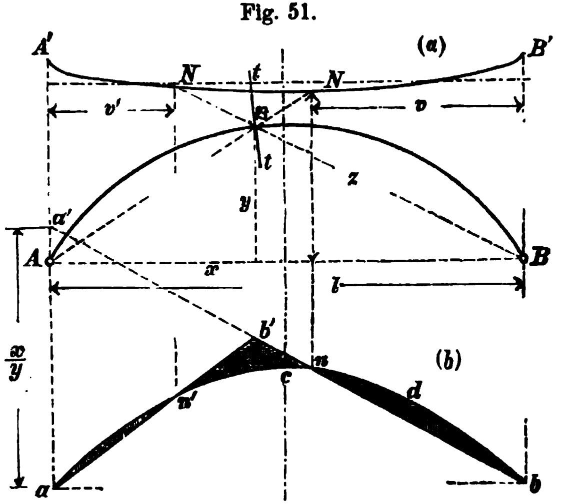
Für einen beliebigen Querschnitt im Schwerpunktsabstande x von A ist das Biegungsmoment

$$1) \qquad M_x = A \cdot x - H \cdot y = y\left(\frac{M_x'}{y} - H\right).$$

Dem ersten positiven Teile der Klammer entspricht die Einflufslinie des einfachen Momentes, deren Ordinaten durch y dividiert erscheinen; dem zweiten negativen Teile die Einflufslinie des Horizontalschubes. Der Unterschied der Ordinaten beider ist die Einflufsordinate des Momentes an betreffender Stelle mit dem Multiplikator y.

Ist die Einflufslinie des Horizontalschubes bekannt, so gelangt man zu derjenigen des Biegungsmomentes unter Benutzung der Kämpferdrucklinie wie folgt: Man zieht von einem Kämpferpunkte, am besten von dem dem betr. Querschnitt am nächsten gelegenen Punkte A aus, durch den Schnittpunkt $\mathfrak{B}$ (Fig. 51) der Bogenmittellinie mit der Schnittlinie tt eine Gerade bis zum Schnitt mit der Kämpferdrucklinie, so ist der Schnittpunkt N

Fig. 51.



aus den auf S. 74 dargelegten Gründen Belastungsscheide. Ein Lot durch N legt den Punkt n auf der Kurve acb fest. Zieht man nun

von b aus noch eine Gerade durch n bis zum Schnittpunkte b' mit dem Lot durch 𝔅 und verbindet b' mit a, so stellt $ab'b$ die Einflufslinie, das Dreieck $ab'b$ die positive Einflufsfläche für M_x' und die Fläche acb, die in Bezug auf das Moment M_x negative Einflufsfläche von H dar. Die Verlängerung der Geraden bb' bis zum Kämpferlot durch A schneidet auf diesem aufserdem die Strecke $aa' = \frac{x}{y}$ ab, welcher Umstand kontrollweise benutzt werden kann. Die resultierende Einflufsfläche von M_x besteht aus dem positiven Teil $n'b'n$ und den beiden negativen an' und bdn. Für Querschnitte nahe den Kämpferpunkten liegt eine der Geraden ab' oder bb' ganz aufserhalb der Kurve acb, schneidet diese nicht und einer der beiden negativen Teile der Einflufsfläche verschwindet.

In gleicher Weise lassen sich, wenn der Trägerquerschnitt bereits bekannt und die Kernlinien eingezeichnet sind, die Einflufslinien für die Kernmomente gewinnen (vergl. S. 88).

Für die Benutzung der Einflufslinien zur Bestimmung des gröfsten Momentes für etwa vorhandene bewegliche Belastung gelten die in Bd. I S. 155 ff. entwickelten allgemeinen Regeln. Ist die Einflufslinie des Horizontalschubes für eine beliebige Bogenform auf zeichnerischem Wege ermittelt, so lassen sich die Einflufsflächen zur Bestimmung der Momentengröfstwerte für gleichmäfsig verteilte Lasten im allgemeinen auch nur durch direkte graphische Integration oder event. durch Anwendung des Planimeters gewinnen.

Ist die Bogenform flach parabolisch und auch die Einflufslinie des Horizontalschubes mit Hülfe der oben erläuterten Annäherungsmethode als Parabel ermittelt, die Kämpferdrucklinie, also eine wagerechte Gerade (in der Figur punktiert), so lassen sich mit gleicher Annäherung auch die Gröfstmomente für gleichmäfsig verteilte bewegliche Belastung analytisch bestimmen. Wir berechnen zu diesem Zwecke den positiven und negativen Anteil der Einflufsfläche F_+ und F_-. Dabei möge der Bequemlichkeit wegen mit Bezug auf Gl. 23 S. 115 und 27 S. 117 gesetzt werden $\frac{4f}{l^2} = \lambda$ und $\frac{k}{l \cdot f(1+\xi)} = \lambda'$. Dann schreibt sich die Gleichung der parabolischen Bogenlinie

$$2) \qquad y = \lambda x (l - x)$$

und die Gleichung der Einflufslinie für den Horizontalschub

$$3) \qquad \eta_H = \lambda' u (l - u).$$

Ferner ist nach Gl. 2 S. 120

$$4)\qquad z = \frac{1}{l\lambda'}.$$

Für den Abstand v der Belastungsscheide N von B entnehmen wir der Fig. 51 a $\frac{x}{y} = \frac{l-v}{z} = (l-v)\,l\cdot\lambda'$, woraus

$$5)\qquad x = y\,(l-v)\,l\cdot\lambda' \quad \text{und}$$

$$6)\qquad v = l - \frac{x}{y\lambda'\cdot l} = l - \frac{1}{\lambda\lambda' l\,(l-x)}.$$

Ist noch eine Belastungsscheide N' im Abstande v' von A vorhanden, so erhält man für diese in gleicher Weise $v' = l - \frac{l-x}{y\lambda' l}$. Fällt eine der Strecken v oder v' negativ aus, so erkennt man daraus, daſs der betreffende Teil der negativen Einfluſsfläche verschwindet und es ist dann v, bezw. v' gleich Null zu setzen.

Die Einfluſsordinate η_{M_x} des Momentes im Abstande u von B ist nach Gl. 1 und 3 und Fig. 46

$$7)\qquad \eta_{M_x} = \eta_{M_x'} - y\cdot\eta_H = \frac{x}{l}\cdot u - y\cdot\lambda' u\,(l-u).$$

Der Inhalt der negativen Einfluſsfläche rechts von N ist

$$F_-^v = -\int_0^v \eta_{M_x}\cdot du = -\int_0^v \left[\frac{x}{l}\cdot u - y\cdot\lambda' u\,(l-u)\right] du = -\left|\frac{x}{l}\cdot\frac{v^2}{2} - \frac{y.\lambda'}{6}v^2(3\,l-2v)\right|,$$

oder wenn wir gemäſs Gl. 5 x durch y ersetzen $F_-^v = \frac{y\cdot\lambda'\cdot v^3}{6}$. Besteht noch eine Belastungsscheide N', so ergibt sich für die negative Einfluſsfläche links derselben in gleicher Weise $F_-^{v'} = \frac{y\cdot\lambda' v'^3}{6}$, im ganzen also

$$8)\qquad F_- = {}_-^{v} + F_-^{v'} = \frac{y\cdot\lambda'}{6}(v^3 + v'^3),$$

worin F_-, F_-^v u. $F_-^{v'}$ die Absolutwerte der negativen Einfluſsfläche, bezw. ihrer Anteile ohne Rücksicht auf die Vorzeichen ausdrücken.

Beachten wir, daſs der Inhalt der ganzen parabolischen Einfluſsfläche von H mit dem Multiplikator y gleich ist $y\cdot\int_0^l \eta_H\cdot du = \lambda'\cdot y\int_0^l u\,(l-u)\cdot du = \frac{\lambda' l^3\cdot y}{6}$ und derjenige von M_x' (Dreieck abb') gleich $y\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{x-l}{l}\cdot\frac{l}{2} = \frac{x\,(l-x)}{2} = \frac{y}{2\lambda}$, so erhalten wir die ganze Einfluſsfläche von M_x in der Differenz beider zu

$$9)\qquad F_e = \frac{y}{6\lambda}(3 - \lambda\lambda' l^3).$$

Da nun $F_e = F_+ - F_-$, so ist damit auch F_+ bekannt; nämlich nach Gl. 8 und 9

10) $$F_+ = F_e + F_- = \frac{y}{6\lambda}[3 + \lambda\lambda'(v^3 + v'^3 - l^3)].$$

Ist danach eine ständige verteilte Last g und eine bewegliche p für die Längeneinheit vorhanden, so erhält man, wenn man gemäfs Gl. 2 in den Ausdrücken für die Einflufsflächen y mit x vertauscht

11) $$\left\{\begin{aligned} M_{x\,max} &= g \cdot F_e + p \cdot F_+ \\ &= \frac{x(l-x)}{6}\left[g(3 - \lambda'\lambda l^3) + p\left(3 + \lambda\lambda'(v^3 + v'^3 - l^3)\right)\right], \end{aligned}\right.$$

oder auch mit $p + g = q$

11 a) $$M_{x\,max} = \frac{x(l-x)}{6}\left[q(3 - \lambda\lambda' l^3) + p\lambda\lambda'(v^3 + v'^3)\right]$$

und weiter

12) $$M_{x\,min} = g \cdot F_e - p \cdot F_- = \frac{x(l-x)}{6}\left[g(3 - \lambda\lambda' l^3) - p\lambda\lambda'(v^3 + v'^3)\right].$$

Bei voller Belastung des ganzen Bogenträgers nur mit g, also $p = 0$, wird für die Trägermitte mit $x = \frac{l}{2}$ nach Gl. 11 oder 12

13) $$M_{g\,m} = \frac{gl^2}{8}\left(1 - \frac{\lambda\lambda' l^3}{3}\right) = \frac{gl^2}{8}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{k}{(1+\xi)}\right).$$

Mit $k = {}^3/_4$ und $\frac{J}{F} = 0{,}0004\, l^2$ wird

für $\frac{f}{l} = \frac{1}{4}$, $1 + \xi = 1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{J}{f^2 \cdot F} = 1{,}012$ und $M_{g\,m} = 0{,}012 \frac{gl^2}{8}$

„ „ $= \frac{1}{8}$ $1 + \xi = 1{,}048$ und $M_{g\,m} = 0{,}048 \frac{gl^2}{8}$,

d. i. 1,2 % bezw. 4,8 % des Gröfstmomentes eines „einfachen“ Balkens.

In Gl. 11 und 12 erscheinen die Momente $M_{x\,max}$ und $M_{x\,min}$ von der auch in v und v' enthaltenen Querschnittsabscisse x abhängig und es tritt die Frage auf, für welche Querschnitte bezw. für welche Abszissen x sie ihre absoluten Gröfstwerte annehmen. Eine direkte und allgemeine Beantwortung derselben aus der Gleichung $\frac{d\,M_{x\,max}}{dx} = 0$ bezw. $\frac{d\,M_{x\,min}}{dx} = 0$ würde sehr umständlich ausfallen. Wir können uns aber durch eine Vergleichsrechnung ein für allemal für die Anwendung hinreichenden Aufschlufs verschaffen. Da meistens das im allgemeinen gröfsere $M_{x\,max}$ für die Bestimmung der Ab-

messungen oder der Spannungen maſsgebend ist, möge folgende Betrachtung auf diesen Wert beschränkt bleiben.

Denkt man sich x allmählich von Null bis l wachsen, so ändert sich $M_{x\,max}$ verhältnisgleich dem Inhalte der positiven Einfluſsfläche. Trägt man von einer Geraden $a'b'$ (Fig. 54c) im jeweiligen Querschnittslot den Wert einer dieser Gröſsen als Ordinate auf, so ergibt sich für einen Bogen vom Pfeilverhältnis $\frac{f}{l}=\frac{1}{6}$ und den mittleren Wert von $\frac{J}{F}=0{,}0004\,l^2$ die aus Fig. 54c ersichtliche Linie $a_1e_1c_1d_1b_1$, welche die Abhängigkeit des Maximalmomentes von x darstellt und in der Bogenmitte ein Minimum und beiderseits ziemlich genau in der Mitte zwischen Kämpfer und Bogenmitte je ein Maximum aufweist. Diese Lage des Querschnittes gröſsten Maximalmomentes für verteilte Belastung ändert sich auch bei anderen für die Anwendung vorwiegend in Frage kommenden Pfeilverhältnissen und parabolischer Bogenform nicht merklich und man kann daher, um den Gröſstwert von $M_{x\,max}$ zu erhalten, in Gl. 11 $x=\frac{l}{4}$ setzen.

Es soll hier noch die für die Wirkung beweglicher Einzellasten wichtige Frage beantwortet werden, für welche Querschnitte die in das Querschnittslot fallende gröſste Einfluſsordinate der positiven Momenten-Einfluſsfläche zu einem Maximum oder Minimum wird. Setzt man in Gl. 7 $u=l-x$, so erhält man die gröſste Einfluſsordinate η_{max} im Querschnittslot zu $\eta_{max}=y\left(\frac{x(l-x)}{l\cdot y}+\lambda'\cdot x(l-x)\right)$ und, wenn es sich um einen Parabelbogen handelt mit $y=\lambda x(l-x)$ und $\lambda' x(l-x)=\eta_H$

$$14)\qquad \eta_{max}=y\left(\frac{1}{\lambda l}-\eta_H\right)=y\left(\frac{l}{4f}-\eta_H\right).$$

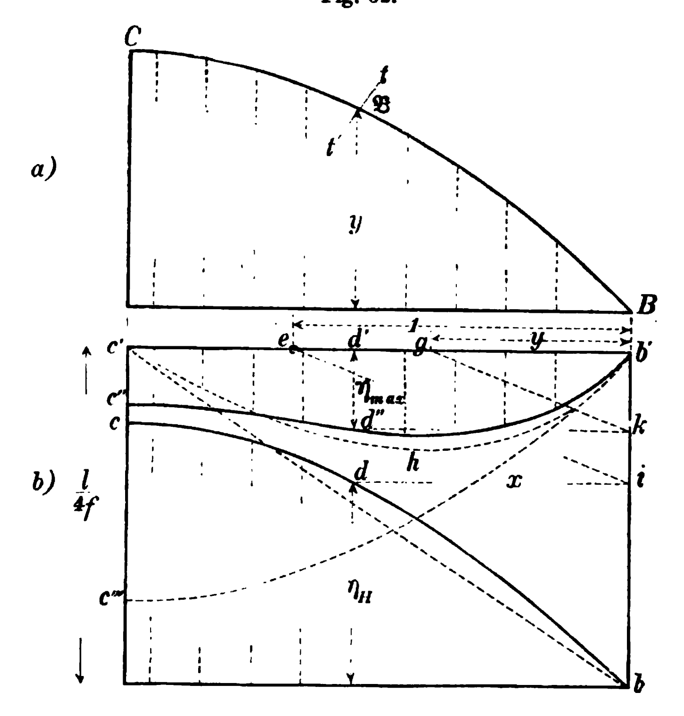
Dieser Ausdruck läſst sich leicht zeichnerisch darstellen.

Es sei bc (Fig. 52) die eine Hälfte der Einfluſslinie für H und BC die halbe parabolische Bogenlinie. Macht man $bb'=\frac{l}{4f}$ und zieht durch b' die Wagerechte $b'c'$, so ist $\frac{l}{4f}-\eta_H=dd'$ und $\eta_{max}=y\cdot dd'$, die gröſste Einfluſsordinate des Momentes für einen Querschnitt im Abstande x von B. Macht man weiter $b'e=1$ und $b'g=y$, zieht durch d die Wagerechte di und durch g

$gk \parallel ei$, endlich durch k eine Wagerechte bis zum Schnitt d'' mit dem Querschnittslot, so ist

$$d'd'' = b'k = y \cdot b'i = y \cdot dd' = y\left(\frac{l}{4f}\right) - \eta_H = \eta_{max}.$$

Fig. 52.



Bestimmt man für eine hinreichende Zahl von weiteren Querschnitten die Punkte d'', so erhält man in deren Verbindungslinie $b'd''c''$ die Linie der Maximaleinflußordinaten des Momentes.

Sie läßt in anschaulicher Weise das Biegungsmoment $P \cdot \eta_{max}$ erkennen, welches eine sich über den Träger hinweg bewegende Last jedesmal in Bezug auf ihren Angriffsquerschnitt ausübt. Man sieht, daß dieses Moment in der Bogenmitte ein relatives Minimum und in zwei symmetrisch gelegenen Querschnitten ein Maximum wird. Zum Vergleich ist die entsprechende Linie $b'hc'$ für den Dreigelenkbogen hinzugefügt, dessen H-Einflußlinie die gerade bc' darstellt. Die Parabel $b'c'''$ drückt die Maximaleinflußlinie des Momentes für den einfachen Balken aus, deren Gleichung $\eta_{max} = \frac{x(l-x)}{l}$ ist.

Als Längeneinheit ist in der Figur $\frac{l}{3}$ gewählt und ein Pfeilverhältnis von $\frac{f}{l}=\frac{1}{4}$ angenommen. Liegt P in der Trägermitte, so ist hier für den Zweigelenkbogen $M_m=0{,}056\,P\cdot l$, für Dreigelenkbogen $M_m=0$ und für den einfachen Balken $M_m=\frac{P\cdot l}{4}=0{,}25\,P\cdot l$. Die Maximalmomente befinden sich sowohl für den Zwei- als Dreigelenkbogen etwa im Abstande gleich 0,21 bis $0{,}22\,l$ vom Kämpfer und betragen für den ersteren rund $0{,}084\,Pl$ und für letzteren rund $0{,}096\,Pl$, das macht einen Unterschied zu Gunsten des Zweigelenkbogens von 12,5 % oder $^1/_8$. Dieser Unterschied, sowie der aus der Figur ersichtliche bessere Momentenausgleich und demnach gleichmäfsigere Materialausnutzung und gröfsere Steifigkeit stellen in der Hauptsache den statischen Vorzug des Zwei- gegenüber dem Dreigelenkbogen dar.

Ist bei flachen Parabelbögen die H-Einflußlinie nach der Annäherungsgleichung $\eta_H=\lambda' x(l-x)$ bestimmt, so erhält man nach Gl. 14 mit $y=\lambda x(l-x)$ analytisch

$$15)\qquad \eta_{max}=\frac{x(l-x)}{l}-\lambda\cdot\lambda'\cdot x^2(l-x)^2.$$

Aus $\frac{d\,\eta_{max}}{dx}=0$ folgt $x_1=\frac{l}{2}$, $x_{2,3}=\frac{l}{2}\pm\sqrt{\frac{l^2}{4}-\frac{1}{2\lambda\lambda' l}}$.

Der erste Wert von x entspricht dem Minimum von η_{max}, die beiden letzten je einem Maximum. Für das Pfeilverhältnis $\frac{1}{4}$, $\frac{J}{F}=0{,}0004\,l^2$ und $k={}^3/_4$ wird $\lambda=\frac{4f}{l^2}=\frac{1}{l}$ und $\lambda'=\frac{k}{lf(1+\xi)}$ $=\frac{3}{l^2(1+\xi)}=\frac{3}{l^2\left(1+\frac{15}{8}\cdot\frac{J}{f^2\cdot F}\right)}=\frac{3}{1{,}012\,l^2}=\frac{2.96}{l^2}$ und danach x_2 $=0{,}785\,l$ und $x_3=0{,}215\,l$. Damit wird der Kleinstwert von η_{max} gleich $0{,}065\,l$ und beide Gröfstwerte $0{,}085\,l$. Die Gröfstwerte stimmen mit den auf graphischem Wege ermittelten Werten so gut wie völlig überein. Der Kleinstwert dagegen ergibt sich durch das analytische Annäherungsverfahren erheblich gröfser.

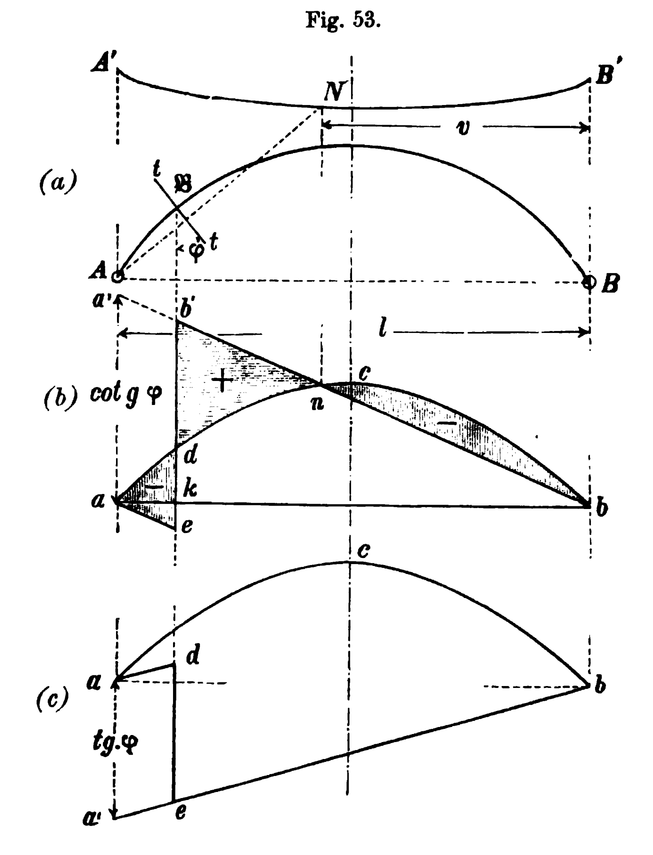
2. Einflufslinie und Gröfstwert der Querkraft.

Für einen beliebigen Querschnitt tt (Fig. 53) im Abstande x von A ist nach Gl. 6 S. 76

15) $$Q_x = Q_x' \cos\varphi - H \sin\varphi = \sin\varphi\,(Q_x' \operatorname{cotg}\varphi - H).^{*)}$$

Daraus ergibt sich die Einflufslinie der Querkraft wie folgt: Zieht man von dem dem Querschnitt zunächst gelegenen Kämpferpunkte, etwa A, aus eine Senkrechte zur Schnittlinie tt, so erhält

Fig. 53.



man im Schnitt N mit der Kämpferdrucklinie eine Belastungsscheide. Ein Lot durch N legt auf der Einflufslinie acb des Horizontalschubes den Punkt n fest. Zieht man von b aus über n eine Gerade

*) Diese Gleichung ist, wie man leicht erkennt, nicht nur für den Drei-, sondern auch für den Zweigelenkbogen gültig.

bis zum Schnitt b' mit dem Querschnittslot durch 𝔅 und ferner $ae \parallel bb'$, so ist, wie man leicht erkennt, $aedb'nbc$ die Einflufsfläche der Querkraft, worin das positiv zu nehmende Dreieck $bb'k$ und das negative aek der Querkraft des „einfachen“ Balkens entspricht.

Links vom Schnitt tt und rechts von n befinden sich Bereiche negativen Einflusses; zwischen beiden herrscht positiver Einflufs.

Zur Kontrolle der Zeichnung kann noch der Umstand benutzt werden, dafs, weil in Gl. 15 die Querkraft des „einfachen“ Balkens mit cotg φ multipliziert erscheint, die Gerade bb' in ihrer Richtung auf dem Kämpferlot durch A die Strecke $aa' = \operatorname{cotg}\varphi$ abschneidet.

Für die Ermittelung der Gröfstwerte der Querkraft gilt hier im allgemeinen das unter 1 über die Bestimmung der Momentengröfstwerte Gesagte.

Besitzt der Bogen flache Parabelform, so fällt die Querkraft bei völlig gleichmäfsiger Belastung, welche beim Dreigelenkbogen gleich Null war, so klein aus, dafs sie aufser Acht bleiben kann. Der positive und negative Anteil der Einflufsfläche sind also fast völlig gleich und können in Summa gleich Null gesetzt werden.

Für die Ermittelung der durch gleichmäfsig verteilte bewegliche Belastung hervorgerufenen gröfsten positiven und negativen Querkräfte sind die Einflufsflächen zunächst zu bestimmen. Für den Abstand v der Belastungsscheide N vom Kämpfer B gilt nach Fig. 53 u. Gl. 2 S. 122 die Beziehung

$$\frac{z}{l-v} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \lambda(l-2x),$$

woraus folgt, da nach Gl. 4 S. 123 $z = \frac{1}{\lambda' l}$,

$$v = l - \frac{1}{\lambda'\cdot\lambda\cdot l\cdot(l-2x)}. \tag{16}$$

Mit $\operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{\lambda(l-2x)}$ erhält man die Einflufsordinate η_{Q_x} der Querkraft im Abstande u von B nach Gl. 15 zu

$$\eta_{Q_x} = \sin\varphi\left\{\frac{u}{\lambda\cdot l\cdot(l-2x)} - \eta_H\right\} = \sin\varphi\left\{\frac{u}{\lambda\cdot l\cdot(l-2x)} - \lambda' u(l-u)\right\},$$

und den negativen Teil der Einflufsfläche rechts von N

$$F_{-}^{v} = \int_{u=0}^{u=v}\eta_{Q_x}\cdot du = \sin\varphi\left\{\int_{u=0}^{u=v}\frac{u\cdot du}{\lambda\cdot l\cdot(l-2x)} - \lambda'\int_{u=0}^{u=v}u(l-u)\,du\right\}.$$

Führt man die Integration aus und setzt nach Gl. 16

$$\frac{1}{\lambda \cdot l \cdot (l-2x)} = (l-v)\lambda'.$$

so erhält man

$$F_-^v = -\sin\varphi \frac{\lambda' \cdot v^3}{6}.$$

Der negative Teil der Einflußfläche auf der Strecke x links vom Schnitt tt wird

$$F_-^x = -\int_0^x \eta_{Q_x} \cdot du = -\sin\varphi \left\{ \int_0^x \frac{u \cdot du}{\lambda \cdot l\,(l-2x)} + \lambda' \int_0^x u\,(l-u)\,du \right\}$$

$$= -\sin\varphi \left\{ \frac{x^2}{2\lambda l\,(l-2x)} + \frac{\lambda' x^2}{6}(3l-2x) \right\},$$

und die ganze negative Einflußfläche

$$F_- = F_-^x + F_-^v.$$

Bei Belastung der negativen Einflußstrecken mit p erhält man $Q_{x\,min} = p \cdot F_- = p\,(F_-^x + F_-^v)$, d. i., wenn man für F_-^x und F_-^v obige Werte einsetzt

17) $$Q_{x\,min} = -\frac{p \cdot \sin\varphi\,\lambda'}{6}\left\{3x^2(2l-v) + v^3 - 2x^3\right\},$$

worin v der Gl. 16 und $\sin\varphi$ der Gl. 35 S. 91 zu entnehmen sind.

Da für volle Belastung des Trägers annähernd $Q_x = Q_{x\,min} + Q_{x\,max} = 0$, so wird

18) $$Q_{x\,max} = -Q_{x\,min}.$$

3. Einflußlinie und Größe der Normalkraft.

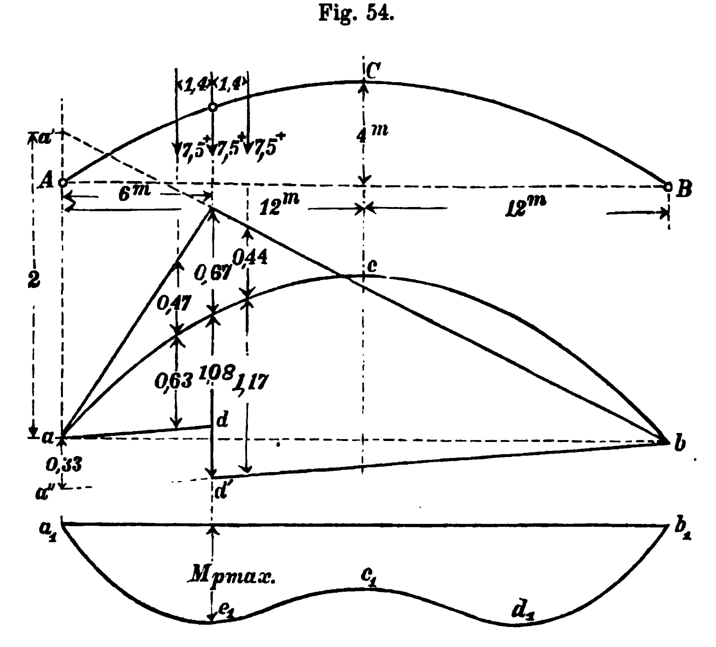
Für einen Querschnitt tt im Abstande x von A (Fig. 53 c) ist nach Gl. 5 S. 76

19) $$N_x = Q_x' \sin\varphi + H \cdot \cos\varphi = \cos\varphi\,(Q_x' \cdot \operatorname{tg}\varphi + H).$$

In Fig. 53 c ist wieder acb Einflußlinie des Horizontalschubes. Macht man $aa' = \operatorname{tg}\varphi$ und verbindet a' mit b, zieht durch a eine Parallele zu $a'b$ und bringt das Querschnittslot durch $\mathfrak{B}$ in d zum Schnitt mit derselben und in e zum Schnitt mit der $a'b$, so ist $acbed$ die durchweg positive Einflußfläche der Normalkraft N_x mit dem Multiplikator $\cos\varphi$. In allen Querschnitten entsteht also bei voller

Belastung des Trägers die gröfste Normalkraft. Gebiete entgegengesetzten Einflusses fehlen hier. Die Einflufsfläche kann namentlich bei beweglichen Einzellasten und, wenn die Bogenlinie frei gebildet

Fig. 54.



keiner bestimmten einfachen Gleichung folgt, auch für bewegliche verteilte Belastung mit Vorteil Anwendung zur Ermittelung der Normalkraft finden.

Ist die Bogenlinie eine flache Parabel und die Annäherungsgleichung der Einflufslinie des Horizontalschubes $\eta_H = \lambda' u (l-u)$, so erhält man bei voller Belastung mit p für den Schnitt tt im Abstande x von A die „einfache" Querkraft $Q_x' = \frac{p}{2}(l-2x)$ und $H = p\int_0^l \eta_H \cdot du = p\int_0^l \lambda' u (l-u)\, du = \frac{p\lambda' \cdot l^3}{6}$. Aus der Gleichung der Bogenlinie $y = \lambda x (l-x)$ folgt weiter $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \lambda(l-2x)$ und daher nach Gl. 19

$$N_x = \frac{p \cdot \cos\varphi}{6}\left\{3\lambda(l-2x)^2 + \lambda' l^3\right\}. \tag{20}$$

Es soll hier noch für den Fall, dafs der Träger von beiden Kämpferpunkten ab auf Strecken v und v', oder in seinem Mittelteil zwischen diesen Strecken mit p belastet ist, die Normalkraft für einen in jenem Mittelteil liegenden Querschnitt bestimmt werden. Im ersten Falle wird $Q_x' = p \cdot \frac{v^2 - v'^2}{2l}$ und

$$H = p\lambda' \left\{ \int_0^v u(l-u) \cdot du + \int_0^{v'} u'(l-u') du' = \frac{p \cdot \lambda'}{6} \left\{ v^2(3l-2v) + v'^2(3l-2v') \right\} \right.,$$

daher die Normalkraft N_x^s für Seitenbelastung

$$21) \quad N_x^s = \frac{p \cdot \cos\varphi}{6} \left[\frac{3\lambda}{l}(l-2x)(v^2 - v'^2) + \lambda' \left\{ v^2(3l-2v) + v'^2(3l-2v') \right\} \right].$$

Die Normalkraft N_x^m für Mittelbelastung wird, weil diejenige für volle Belastung $N_x = N_x^s + N_x^m$ ist

$$22) \quad N_x^m = N_x - N_x^s.$$

Anwendungen.

Beispiel 1: In Beispiel 1 S. 93 wurden für einen aus Blech und Winkeleisen genieteten parabolischen Dreigelenkbogenträger von 24 m Spannweite und 4 m Pfeilhöhe aus einer gegebenen ständigen verteilten Belastung nebst einer Gruppe beweglicher Einzellasten das gröfste Biegungsmoment mit zugehöriger Normalkraft berechnet und daraus unter Zugrundelegung einer Randspannung von 800 at die Querschnittsabmessungen bestimmt. Es sollen jetzt für jenen Träger als Zweigelenkbogen, also unter Fortlassung des Scheitelgelenkes das gröfste Biegungsmoment und die zugehörige Normalkraft sowie aus beiden die eintretenden gröfsten Randspannungen berechnet werden.

Bei der verhältnismäfsig kleinen Pfeilhöhe verwenden wir zur Bestimmung des Horizontalschubes die Annäherungsgleichung 27 S. 117 und setzen $k = {}^3/_4$. Der Seite 95 berechnete Querschnitt hat ein $W = \frac{W_0 h_0}{h} + F_k \cdot h_0 = \frac{2250 \cdot 60}{67} + 70 \cdot 60 = 6215 \text{ m}^3$, $J = 6215 \cdot 33{,}5 = 208\,000 \text{ cm}^4$, $F = 126 + 2 \cdot 3{,}5 . 20 = 266 \text{ cm}^2$ und demnach $\frac{J}{F} = 780 \text{ cm}^2 = 0{,}078 \text{ m}^2$. Mit $f = 4$ m und $l = 24$ m wird

$$\xi = \frac{15}{8} \cdot \frac{0{,}078}{4^2} = \text{rd. } 0{,}009, \quad \lambda = \frac{4f}{l^2} = \frac{4 \cdot 4}{24^2} = 0{,}0278,$$

$$\lambda' = \frac{k}{l \cdot f(1+\xi)} = \frac{{}^3/_4}{24 \cdot 4 \cdot 1{,}009} \text{ rd. } 0{,}0077.$$

Die Gleichung der H-Linie ist daher $\eta_H = 0{,}0077\, u\,(l-u)$. Das führt zu der in Fig. 54 gezeichneten Parabel acb mit der Pfeilhöhe $0{,}0077 \cdot \frac{l^2}{4} = 0{,}0077 . \frac{24^2}{4} = 1{,}105$.

Das gröfste Biegungsmoment der wirkenden Einzellasten entsteht etwa in dem Querschnitt $x = \frac{l}{4} = 6$, für welchen $y = \lambda \cdot x (l - x) = 0{,}0278 \cdot 6 (24 - 6) = 3^{m}$ ist. Der Abschnitt $a a'$ Fig. 54 ist danach $\frac{x}{y} = \frac{6}{3} = 2$.

Damit liegt die Einflufsfigur für das Biegungsmoment fest. Wir machen noch $a b'' = \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \lambda (l - 2x) = 0{,}0278 \cdot (24 - 12) = 0{,}33$, verbinden a'' mit b und ziehen $a d \parallel a'' b$ bis zum Querschnittslot, dann ist $a c b d' d a$ die Einflufsfläche der Normalkraft.

Man überzeugt sich leicht, dafs das gröfste Biegungsmoment sowohl, als auch die gröfste Normalkraft entsteht, wenn die mittleren der drei gröfseren beweglichen Einzellasten à $7{,}5^{t}$ im Querschnittslot steht und die Gruppe der kleineren Lasten à 5^{t} sich nach links anschliefst. Letztere bleiben indes ihres Abstandes wegen ohne wesentlichen Einflufs. Danach ergeben sich in den Lastloten die aus der Figur ersichtlichen Einflufsordinaten und wir erhalten mit $y = 3$ als Multiplikator

$$M_p = 3 (0{,}47 + 0{,}67 + 0{,}44) \cdot 7{,}5 = 35{,}5^{mt}, \text{ und mit } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4f}{l}\right)^2 \left(1 - \frac{2 \cdot x}{l}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = 0{,}95 \text{ als Multiplikator}$$

$$N_p = 0{,}95 (1{,}17 + 1{,}08 + 0{,}63)\, 7{,}5^{t} = 20{,}6^{t}.$$

Die ständige Last $g = 0{,}7^{t}$ f. d. Mtr. liefert nach Gl. 9 S. 123, wenn man g gleich 0,7 setzt

$$M_{g_x} = \frac{0{,}7 \cdot 3}{6 \cdot 0{,}0278} (3 - 0{,}0278 \cdot 0{,}0077 \cdot 24^{3}) = 0{,}505^{mt}$$

und nach Gl. 20 S. 131

$$N_{g_x} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}95}{6} \cdot \left\{3 \cdot 0{,}0278 (24 - 2 \cdot 6)^2 + 0{,}0077 \cdot 24^3\right\} = 13{,}2^{t}.$$

Im ganzen ist also

$$M_{x\,max} = 35{,}5 + 0{,}505 = 36{,}05^{mt} = 3\,605\,000^{cmkg} \text{ und}$$

$$N_x = 20{,}6 + 13{,}2 = 33{,}8^{t} = 33\,800^{kg}.$$

Daraus ergibt sich die gröfste Randspannung nach Gl. 3 S. 70 zu

$$\sigma_1 = \frac{3\,605\,000}{6215} + \frac{33\,800}{266} = 707^{at}$$ gegen 800^{at} beim Dreigelenkbogen, d. i. rund 12 % weniger.

Beispiel 2: In gleicher Weise soll nun für den in Beispiel 2 S. 95 berechneten Dreigelenkbogenträger mit I-Querschnitt als Zweigelenkbogen für die dort angegebene Belastung die gröfste Randspannung ermittelt werden.

Nach Seite 95 ist $W = 0{,}026\, h^3 = 0{,}026 \cdot 46^3 = 2520^{\text{cm}^3}$, $J = W \cdot \frac{h}{2}$ $= 2520 \cdot 23 = 58000^{\text{cm}^4}$, $F = 0{,}084 \cdot 46^2 = 178^{\text{cm}^2}$, $\frac{J}{F} = 327^{\text{cm}^2} = 0{,}0327^{\text{m}^2}$,
$\xi = \frac{15}{8} \cdot \frac{0{,}0327}{4^2} = 0{,}0038$, $\lambda = \frac{4 \cdot 4}{24^2} = 0{,}0278$, $\lambda' = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{24 \cdot 4 \cdot 1{,}0038} = 0{,}0078$.

Nach den Darlegungen auf S. 125 nehmen wir auch hier an, dafs im Querschnitt bei $x = \frac{l}{4} = 6^{\text{m}}$ das gröfste Moment auftritt. Für die bewegliche Last liegt die Belastungsscheide nach Gl. 6 S. 123 im Abstande
$v = l - \frac{1}{\lambda \cdot \lambda' \cdot l(l-x)} = 24 - \frac{1}{0{,}0278 \cdot 0{,}0078 \cdot 24 \cdot 18} = 13{,}3^{\text{m}}$ vom Kämpfer B,
d. i. $10{,}7^{\text{m}}$ von A. Die Belastung der letzteren Strecke führt zu $M_{x\,max}$. Nach Gl. 11 S. 124 wird mit $g = 2{,}0$ und $p = 1{,}2$

$$M_{x\,max} = \frac{6(24-6)}{6}\Big[2 \cdot (3 - 0{,}0278 \cdot 0{,}0078 \cdot 24^3) + 1{,}2\,\{3 + 0{,}0278 \cdot 0{,}0078 \cdot (13{,}3^3 - 24^3)\}\Big] = 11{,}0^{\text{mt}}.$$

Nach Gl. 35 S. 91 ist für $x = 3{,}0^{\text{m}}$ $\cos\varphi = 1 : \sqrt{1 + \left(4 \cdot \frac{4}{24}\right)^2 \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{4}\right)^2} = 0{,}95$.

Bei voller Belastung des Trägers mit $p + g = q = 2 + 1{,}2 = 3{,}2^{\text{t}}$ würde daher nach Gl. 20 S. 131 im Querschnitt $x = 6$ die Normalkraft

$$N_x = \frac{3{,}2 \cdot 0{,}95}{6}\{3 \cdot 0{,}0278\,(24 - 2 \cdot 6)^2 + 0{,}0078 \cdot 24^3\} = 60{,}4^{\text{t}}.$$

Wir denken uns jetzt, um N_x für die dem Momentengröfstwert entsprechende Laststellung zu erhalten, die $13{,}3^{\text{m}}$ lange Strecke vom Kämpfer B ab im negativen Sinne mit $p = 1{,}2$ belastet und erhalten nach Gl. 20 S. 132 mit $v = 13{,}3^{\text{m}}$ und $v_1 = 0$

$$N_x^s = -\frac{0{,}95}{6} \cdot 1{,}2\left[\frac{3 \cdot 0{,}0278}{24}(24 - 2 \cdot 6)\,13{,}3^2 + 0{,}0078 \cdot 13{,}3^2\,(3 \cdot 24 - 2 \cdot 13{,}3)\right] = 13{,}4^{\text{t}}.$$

Die im Querschnitt wirklich tätige Normalkraft ist somit $N_x = 60{,}4 - 13{,}4 = 47^{\text{t}}$ und die gröfsten Randspannungen sind

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = -\left(\frac{47000}{178} \pm \frac{1130000}{2520}\right) = -265 \pm 450), \text{ d. i. } \sigma_1 = -715^{\text{at}},\ \sigma_2 = +185^{\text{at}}.$$

Erstere tritt an der konvexen, letztere an der konkaven Trägerseite auf. Die gröfste Randspannung σ_1 ist hier um rund 12% kleiner als beim Dreigelenkbogenträger.

Beispiel 3: Welche gröfsten Randspannungen ruft eine über den Träger hinweg rollende Einzellast von $P = 8^{\text{t}}$ im Zusammenwirken mit der ständigen verteilten Last $g = 2\,{}^{\text{t}}/_{\text{m}}$ hervor und wo entstehen dieselben?

Nach Gl. 15 S. 127 erzeugt die Last P im Abstande x vom Kämpfer in ihrem Angriffsquerschnitte ein Moment

$$M_{P_x} = P\left\{\frac{x(l-x)}{l} - \lambda\,\lambda'\,x^2(l-x)\right\}. \quad \text{Mit } \lambda = 0{,}0278,\ \lambda' = 0{,}0078,$$

$P = 8^{\text{t}}$ und $l = 24^{\text{m}}$ wird $M_{P_x} = 0{,}33\,x\,(l-x) - 0{,}0017\,x^2\,(24-x)^2$.

Die ständige Belastung $g = 2^t$ bringt nach Gl. 9 in jenem Querschnitte ein Moment $M_{g_x} = F_e \cdot g = g \frac{x(l-x)}{6}(3 - \lambda \lambda' l^2)$ hervor, das mit obigen Werten für λ, λ', l und g sich berechnet zu $M_{g_x} = 0{,}017 \cdot x(24 - x)$. Insgesamt entsteht daher in dem Querschnitte ein Moment

$$M_x = 0{,}347\,(24 - x)\,x - 0{,}0017\,x^2\,(24 - x)^2,$$

welcher Wert für $x = 0$ und $x = l = 24^m$ verschwindet, für $x = \frac{l}{2} = 12$ zu einem Minimum und für $x = 0{,}23\,l =$ rund $5{,}50^m$ und $x = 0{,}77\,l =$ rund $18{,}50^m$ zu einem Maximum wird, das $M_{x_{max}} = 17{,}6^{m/t}$ beträgt.

Die im Querschnitt $x = 5{,}5^m$ herrschende Normalkraft, soweit sie durch die ständige verteilte Last g entsteht, wird nach Gl. 20 S. 131 mit $p = g = 2^{t/m}$

$$N_{g_x} = \frac{2}{6 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{4 \cdot 4}{24}\right)^2 \left(1 - 2 \cdot \frac{5{,}5}{24}\right)^2}} \left\{3 \cdot 0{,}0278\,(24 - 2 \cdot 5{,}5)^2 + 0{,}0078 \cdot 24^3\right\}$$
$$= 37{,}6^t.$$

Die Einzellast 8^t ergibt nach Gl. 27 S. 117 ein $H = 8 \cdot 0{,}0078 \cdot 5{,}50 \cdot (24 - 5{,}5) = 6{,}35^t$ und eine „einfache" (lotrechte) Querkraft $Q_x' = A = \frac{24{,}0 - 5{,}5}{24} \cdot 8 = 6{,}15^t$, also nach Gl. 19 S. 130 und Gl. 34 u. 35 S. 91

$$N_{P_x} = \frac{6{,}15 \cdot 4 \cdot \frac{4}{24}\left(1 - 2 \cdot \frac{5{,}5}{24}\right) + 6{,}35}{\sqrt{1 + \left(\frac{4 \cdot 4}{24}\right)^2 \left(1 - 2 \cdot \frac{5{,}5}{24}\right)^2}} = \text{rund } 8^t.$$

Mithin im ganzen $N_x = 37{,}6 + 8{,}0 = 45{,}6^t$.

Damit werden die Randspannungen $\sigma_{1,2} = -\left(\frac{45\,600}{178} \pm \frac{1\,760\,000}{2530}\right)^{at}$ d. i. $\sigma_1 = -955^{at}$, $\sigma_2 = +439^{at}$ und zwar σ_1 an der Innen- und σ_2 an der Aufsenkante des Querschnittes.

VI. Der Bogenträger ohne Gelenke.

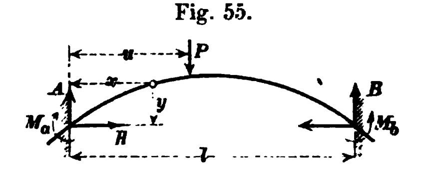
a) Allgemeines.

Der Bogenträger ohne Gelenke vermag an jeder Stelle, also auch in den Kämpferquerschnitten gewisse Biegungsmomente aufzunehmen. Wir wollen in folgendem in den Ebenen der Kämpferquerschnitte eine solche Einspannung voraussetzen, dafs der Träger hier wie in allen übrigen Querschnitten den angreifenden äufseren Kräften gegenüber einen seiner Elastizität und Festigkeit entsprechenden Widerstand zu leisten vermag. Dieser „Stützwiderstand" besteht für jeden Kämpferquerschnitt in einer im Schwerpunkt

desselben angreifenden, nach Gröfse und Richtung unbekannten Stützkraft und in einem Stützmoment. Um also den äufseren Gleichgewichtszustand klarzulegen, sind für jedes „Widerlager", d. h. für jede der beiden „Stütz-" oder „Einspannungsebenen" drei unbekannte statische Werte zu bestimmen. Da hierfür nur die den drei statischen Gleichgewichtsbedingungen entsprechenden Bestimmungsgleichungen zur Verfügung stehen, ist der vorliegende Unterstützungsfall dreifach statisch unbestimmt, so dafs drei Gleichungen aus dem elastischen Verhalten des Trägers abgeleitet werden müssen.

Wir wollen die lot- und wagerechte Seitenkraft A und H der an der linksseitigen Einspannung auftretenden Stützkraft und das dort herrschende Stützmoment M_a (vgl. Fig. 55) als „statisch unbestimmte Gröfsen" ansehen. Ihre Bestimmung mufs wiederum der erste Schritt zur statischen Untersuchung des Bogenträgers ohne Gelenke sein.

Fig. 55.



b) Bestimmung der Stützkräfte und der Stützmomente für eine lotrechte Einzellast.

Wir benutzen die Castigliano'schen Formänderungssätze (vergl. S. 21) und denken uns zu diesem Zwecke den Träger nur an dem rechtsseitigen Widerlager unwandelbar festgehalten, an dem linksseitigen aber frei und hier von den zu bestimmenden statischen Stützwerten als aktive Kräfte ergriffen. Als Belastung werde eine lotrechte Einzellast P im Abstande u vom Kämpfer A vorausgesetzt.

Unter dieser Annahme herrscht auf der Strecke zwischen A und P im Abstande x von A ein Moment

1) $\quad M_x = A \cdot x - H \cdot y + M_a \quad$ und eine Normalkraft

2) $\quad N_x = A \cdot \sin\varphi + H \cos\varphi, \quad$ während für Querschnitte auf der Strecke zwischen P und B Moment und Normalkraft sich wie folgt ausdrücken

1 a) $$M_{x_1} = A \cdot x - P(x - u) - H \cdot y + M_a,$$

2 a) $$N_{x_1} = (A - P) \sin\varphi + H \cdot \cos\varphi.$$

Diese Momente und Kräfte leisten nach Gl. 2 S. 19 eine Formänderungsarbeit

$$3)\qquad \mathfrak{A} = \int_0^u \frac{M_x^2 \cdot ds}{2JE} + \int_u^l \frac{M_{x1}^2 \cdot ds}{2JE} + \int_0^u \frac{N_x^2 \cdot ds}{2FE} + \int_u^l \frac{N_{x1}^2 \cdot ds}{2EF},$$

wobei der der Querkraft entsprechende, im allgemeinen verschwindend kleine Anteil (vergl. S. 28) aufser Acht gelassen ist.

Setzt man die Werte der Gl. 1 u. 2, 1a u. 2a in Gleichung 3 ein, so erscheint $\mathfrak{A}$ als Funktion der drei Unbekannten A, H und M_a. Durch partielle Differentiation nach diesen und indem man beachtet, dafs $\int_0^u f(x)\,ds + \int_u^l f(x)\,ds = \int_0^l f(x)\,ds$, erhält man

$$4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial H} = & -A\int_0^l \frac{xy \cdot ds}{JE} + H \cdot \int_0^l \frac{y^2 \cdot ds}{JE} - M_a \cdot \int_0^l \frac{y \cdot ds}{JE} + P \cdot \int_u^l \frac{xy \cdot ds}{JE} \\ & - P \cdot u \int_u^l \frac{y \cdot ds}{JE} + A \int_0^l \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi\, ds}{F \cdot E} + H \cdot \int_0^l \frac{\cos^2\varphi\, ds}{F \cdot E} \\ & - P \cdot \int_u^l \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot ds}{F \cdot E}, \end{aligned}\right.$$

$$5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial A} = & A \cdot \int_0^l \frac{x^2 \cdot ds}{JE} - H \cdot \int_0^l \frac{x \cdot y \cdot ds}{JE} + M_a \int_0^l \frac{x \cdot ds}{JE} - P \int_u^l \frac{x^2 ds}{JE} \\ & + P \cdot u \int_u^l x \cdot ds + A \int_0^l \frac{\sin^2\varphi \cdot ds}{FE} + H \cdot \int_0^l \frac{\cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot ds}{F \cdot E} \\ & - P \cdot \int_u^l \frac{\sin^2\varphi \cdot ds}{F \cdot E}, \end{aligned}\right.$$

$$6)\ \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial M_a} = + A \cdot \int_0^l \frac{x \cdot ds}{JE} - H \cdot \int_0^l \frac{y \cdot ds}{JE} + M_a \int_0^l \frac{ds}{JE} - \frac{P}{JE} \int_u^l x \cdot ds + \frac{P \cdot u}{JE} \int_u^l ds.$$

Aus den auf S. 101 u. 102 dargelegten Gründen können in Gl. 4 u. 5 die Glieder, welche $\sin\varphi$ enthalten, als verschwindend klein vernachlässigt und in Gl. 4 der Wert $\int^{l}\frac{\cos^2\varphi\cdot ds}{F\cdot E}$ auf $\frac{l}{FE}$ abgerundet werden.

Da der Bogenträger in seinem linksseitigen Endquerschnitt vorerst frei beweglich gedacht wurde, so stellen die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial A}$, $\frac{\partial A}{\partial H}$ und $\frac{\partial A}{\partial M_a}$, wie auf S. 21 und 22 dargelegt, die unter der Wirkung der Kräfte A, H und P und des Momentes M_a eintretende elastische Bewegung des frei gedachten Endquerschnittes dar und zwar drückt $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial A}$ die lotrechte, $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial H}$ die wagerechte Verschiebung und $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial M_a}$ die Verdrehung desselben aus.

Sind durch irgend welche Umstände bestimmte Bewegungen bedingt, so erscheinen durch die Gleichungen 4—6 die Stützwerte A, H und M_a festgelegt. In folgendem wollen wir eine starre Stützung in den Kämpferquerschnitten, also letztere unbeweglich annehmen. Eine tatsächlich vorhandene, etwa elastische Verschieblichkeit oder der Einfluſs von Temperaturschwankungen lassen sich ähnlich wie beim Zweigelenkbogen berücksichtigen und sollen hier unerörtert bleiben. Hiernach, und wenn wir noch überall gleichen Trägerquerschnitt, also J konstant voraussetzen, nehmen die Gl. 4—6 folgende Form an:

$$7)\quad \begin{cases} 0 = -A\int_0^l x\cdot y\cdot ds + H\cdot\int_0^l y^2\cdot ds - M_a\int_0^l y\cdot ds + P\cdot\int_u^l xy\cdot ds \\ \qquad -P\cdot u\int_u^l y\cdot ds + H\cdot l\,\frac{J}{F}, \end{cases}$$

$$8)\quad 0 = A\cdot\int_0^l x^2\cdot ds - H\cdot\int_0^l xy\cdot ds + M_a\int_0^l x\cdot ds - P\cdot\int_u^l x^2\cdot ds + P\cdot u\int_u^l x\cdot ds,$$

$$9)\quad 0 = +A\int_0^l x\cdot ds - H\cdot\int_0^l y\cdot ds + M_a\int_0^l ds - P\cdot\int_u^l x\cdot ds + Pu\cdot\int_u^l ds.$$

Die in den Gleichungen 7—9 auftretenden Integralwerte, genommen zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=l$, hängen lediglich von der Form der Bogenmittellinie ab und stellen die

Länge derselben, bezw. ihre Momente erster und zweiter Ordnung in Bezug auf ein Achsenkreuz mit lot- und wagerechter Achse dar, dessen Nullpunkt im Kämpferpunkte A liegt. Alle übrigen Integralwerte, genommen zwischen den Grenzen u und l, sind von der Bogenform und von der Lage der Last P abhängig und drücken die Länge, sowie die Momente erster und zweiter Ordnung des Teiles der Bogenmittellinie rechts der Last P aus. Wir wollen bezeichnen die Länge der ganzen Bogenmittellinie $\int_0^l ds$ mit L, ihr statisches Moment zur Y-Achse, $\int_0^l x \cdot ds$ mit S_y, zur X-Achse, $\int_0^l y \cdot ds = S_x$; ihr Centrifugalmoment zum angenommenen Achsenkreuz, $\int_0^l xy \cdot ds$ mit C und ihre Trägheitsmomente zu den beiden Achsen $\int_0^l x^2 \cdot ds$ mit $\mathfrak{J}_y$, bezw. $\int_0^l y^2 \cdot ds = \mathfrak{J}_x$. Die gleichen Werte für das Bogenstück rechts von P sollen die Bezeichnungen L_u^l, $(S_y)_u^l$, $(S_x)_u^l$, C_u^l, $(\mathfrak{J}_y)_u^l$ und $(\mathfrak{J}_x)_u^l$ erhalten.

Beachtet man, dafs mit $x_0 = \frac{l}{2}$ und y_0 als Koordinaten des Schwerpunktes der Bogenmittellinie $S_x = y_0 \cdot L$, $S_y = \frac{l}{2} \cdot L$, $C = x_0 \cdot y_0 \cdot L = \frac{l}{2} \cdot y_0 L = \frac{l \cdot S_x}{2}$ wird, so kann man die Gl. 7—9 mit vorstehenden Bezeichnungen wie folgt schreiben:

$$10) \quad -A + \frac{2}{S_x}\left(\frac{\mathfrak{J}_x}{l} + \frac{J}{F}\right) \cdot H - \frac{2 M_a}{l} + \frac{2}{l \cdot S_x}\left(C_u^l - u \cdot (S_x)_u^l\right) P = 0,$$

$$11) \quad \frac{2 \mathfrak{J}_y}{l \cdot S_x} \cdot A - H + \frac{L}{S_x} \cdot M_a - \frac{2}{l \cdot S_x}\left\{\left(\mathfrak{J}_y\right)_u^l - u \cdot \left(S_y\right)_u^l\right\} P = 0,$$

$$12) \quad +A - \frac{2 \cdot S_x}{l \cdot L} H + \frac{2 M_a}{l} - \frac{2}{l \cdot L}\left\{\left(S_y\right)_u^l - u \cdot L_u^l\right\} P = 0.$$

Durch Addition der Gl. 10 u. 12 und Lösung für H folgt

$$13) \quad H = P \cdot \frac{\frac{S_x}{L} \cdot \left\{\left(S_y\right)_u^l - u \cdot L_u^l\right\} - C_u^l + u \cdot \left(S_x\right)_u^l}{\mathfrak{J}_x + l \frac{J}{F} - \frac{S_x^2}{L}}.$$

Ebenso folgt, wenn man Gl. 12 durch $\frac{2\,S_x}{l \cdot L}$ dividiert, von Gl. 11 abzieht und die entstandene Gleichung für A löst,

$$14)\qquad A = P\frac{4\left\{\left(\mathfrak{J}_y\right)_u^l - u\cdot\left(S_y\right)_u^l\right\} - 2\,l\left\{\left(S_y\right)_u^l - u\cdot L_u^l\right\}}{4\,\mathfrak{J}_y - L\cdot l^2}.$$

Nachdem so H und A bekannt geworden, erhält man aus Gl. 12

$$15)\qquad M_a = H\frac{S_x}{L} - A\frac{l}{2} + \frac{P}{L}\left\{\left(S_y\right)_u^l - u\,L_u^l\right\}.$$

Um die Gl. 13—15 zur Bestimmung der statisch unbestimmten Stützwerte H, A und M_a zu benutzen, sind S_x, S_y, $\mathfrak{J}_x$, $\mathfrak{J}_y$, C und L für die ganze Bogenlinie und für den Teil rechts von P zu ermitteln. Die genaue analytische Berechnung dieser Werte für eine beliebige Bogenform begegnet meist Schwierigkeiten, auch wenn die Gleichung der Bogenmittellinie bekannt ist. Nur für die kreisbogenförmige Mittellinie können die bezeichneten Werte in ähnlicher Weise, wie dies auf S. 118 für den Zweigelenkbogen geschehen, analytisch genau, wenn auch etwas umständlich entwickelt werden.

Für die in der Anwendung am häufigsten vorkommenden verhältnismäßig flachen parabolischen Bogenformen lassen sich, wie weiter unten gezeigt werden wird, mit meist hinreichender Annäherung bequem analytische Regeln zur Bestimmung von H, A und M_a ableiten.

Für andere Bogenformen ist man angewiesen auf ein

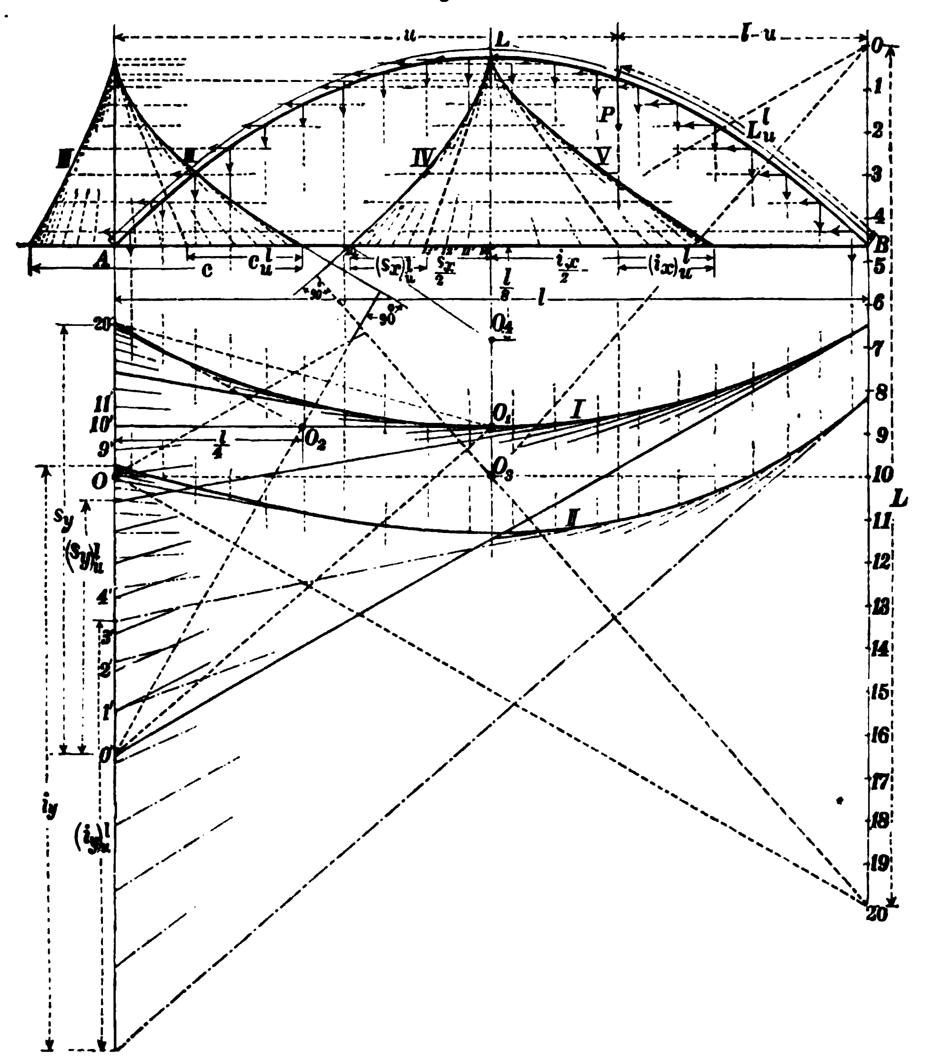
graphisches Verfahren.

Dabei kann die Bestimmung der Momente erster und zweiter Ordnung der Bogenlinie in bekannter Weise geschehen, indem man die Teile derselben als Kräfte ansieht. Für jedes der in Frage kommenden fünf Momente ist die Zeichnung einer besonderen Seillinie erforderlich. Die Polweiten derselben wählt man dabei zweckmäßig so, daß sie in tunlichst runden Verhältnissen zueinander stehen.

In Fig. 56 ist die Entwickelung der fünf Seillinien dargestellt. Mit der Polweite l (Pol 0) ist zunächst die Seillinie I zu den Teilen $\overline{01}$, $\overline{12}$, $\overline{23}$ usw. der Bogenlinie als lotrechte Kräfte gezeichnet. Die den Teilpunkten 0, 1, 2, 3 ... entsprechenden Tangenten dieser Seillinie schneiden die Kämpferlotrechte durch A in den Punkten

$0', 1', 2', 3'$ ... **Zu den dadurch entstehenden Abschnitten** $\overline{0'1'}, \overline{1'2'}, \overline{2'3'}$ ..., **als lotrechte Kräfte in den Schwerpunkten der Bogenteile wirkend gedacht, ist sodann mit der Polweite** $\frac{l}{2}$ **(Pol** 0_1**)**

Fig. 56.



die Seillinie II gezeichnet. Zu denselben Abschnitten $\overline{0'1'}, \overline{1'2'}, \overline{2'3'}$ ..., **als wagerechte Kräfte in den Schwerpunkten der Bogen-**

teile angreifend gedacht, ist ferner mit der Polweite $\frac{l}{4}$ (Pol 0_2) die Seillinie III entwickelt. Dabei sind der Einfachheit halber die Seilecksseiten senkrecht zu den Polstrahlen gezogen. Mit der Polweite $\frac{l}{2}$ (Pol 0_3) ist weiterhin zu den Teilen $\overline{0\,1}$, $\overline{1\,2}$, $\overline{2\,3}$ . . . der Bogenlinie als wagerechte Kräfte gedacht, die in der Figur nur in ihrer linken Hälfte dargestellte symmetrische Seillinie IV gezeichnet und dabei wiederum die Seilecksseiten senkrecht zu den Polstrahlen gezogen. Erstere schneiden die wagerechte Kämpferlinie AB in den Punkten 0″, 1″, 2″, 3″, 4″ . . . 19″, 20″. Zu den dadurch entstehenden Abschnitten, als wagerechte Kräfte in den Schwerpunkten der Bogenteile wirkend gedacht, ist endlich mit der Polweite $\frac{l}{8}$ (Pol 0_4) die in der Figur nur in ihrer rechtsseitigen Hälfte dargestellte symmetrische Seillinie V entwickelt.

Mit den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen hat man nun nach Band I S. 22 $S_y = s_y \cdot l$, $S_x = s_x \cdot \frac{l}{2}$, $C = c \cdot l \cdot \frac{l}{4} = \frac{c\,l^2}{4}$, $\mathfrak{J}_y = i_y \cdot l \cdot \frac{l}{2} = i_y \cdot \frac{l^2}{2}$, $\mathfrak{J}_x = i_x \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{8} = i_x \cdot \frac{l^2}{16}$, $(S_y)_u^l = (s_y)_u^l \cdot l$, $(S_x)_u^l = (s_x)_u^l \cdot \frac{l}{2}$, $C_u^l = c_u^l \cdot \frac{l^2}{4}$, $(\mathfrak{J}_y)_u^l = (i_y)_u^l \cdot \frac{l^2}{2}$ und $(\mathfrak{J}_x)_u^l = (i_x)_u^l \cdot \frac{l^2}{16}$.

Damit wird nach Gl. 13—15

$$16)\qquad H = P \cdot \frac{\frac{2 \cdot s_x}{L}\left\{\left(s_y\right)_u^l - \frac{u}{l}\,L_u^l\right\} - c_u^l + 2\,\frac{u}{l}\left(s_x\right)_u^l}{\frac{i_x}{4} - \frac{4\,J}{l\,F} - \frac{s_x^2}{L}}.$$

$$17)\qquad A = P \cdot \frac{\left(i_y\right)_u^l - \left(s_y\right)_u^l\left(2\frac{u}{l} + 1\right) + \frac{u}{l}\,L_u^l}{i_y - \frac{L}{2}},$$

$$18)\qquad M_a = \frac{s_x \cdot l}{2\,L} \cdot H - A \cdot \frac{l}{2} + \frac{P}{L}\left\{\left(s_y\right)_u^l - u \cdot L_u^l\right\}.$$

Sowohl die in vorstehenden Gleichungen vorkommenden, lediglich von der Bogenform abhängigen festen Strecken L, s_y, s_x, i_y und i_x, als auch die mit der Lage der Einzellast P veränderlichen Strecken L_u^l, $(s_y)_u^l$, $(s_x)_u^l$, $(i_y)_u^l$, $(i_x)_u^l$, $(c)_u^l$ können für jede Lastlage

unmittelbar der Figur entnommen und daraus die Werte H, A und M_a berechnet werden. Mit $P=1$ erhält man aus den Gl. 16—18 die Ordinaten der Einflufslinien für H, A und M_a.

Das hier dargelegte graphisch rechnerische Verfahren zur Ermittelung der statisch unbestimmten Stützwerte H, A und M_a ist für jede beliebige Bogenform anwendbar und kann in seiner grundsätzlichen Entwickelung als so gut wie genau gelten. Seine Anwendung erfordert allerdings eine scharfe zeichnerische Ermittelung der in die Rechnung einzuführenden Gröfsen, und der wirklich erreichbare Grad der Genauigkeit bleibt in den allen graphischen Methoden eigenen Grenzen. Für die vielfach vorkommenden, flach parabolischen Bogenformen bietet daher das in nachstehendem noch abzuleitende analytische Annäherungsverfahren wegen der Möglichkeit seiner schärferen Durchführung eine fast gleiche Genauigkeit und seine Anwendung verdient in solchen Fällen auch wegen seiner gröfseren Bequemlichkeit vielfach den Vorzug.

Analytisches Annäherungsverfahren für flach parabolische Bogenform.

Wir setzen eine flach parabolische Bogenform von so geringem Pfeilverhältnis voraus, dafs in den die Momente erster und zweiter Ordnung der Bogenlinie ausdrückenden Integralwerten (Gl. 7—9, S. 138) mit hinreichender Genauigkeit ds durch dx und die Bogenlänge $\int_0^l ds = L$ durch die Spannweite l ersetzt werden kann.

Die Bogenmittellinie werde wieder durch die Gleichung

$$y = \frac{4f \cdot x}{l^2}(l-x) \quad \text{ausgedrückt.} \tag{19}$$

Dann wird

$$S_y = \int_0^l x \cdot ds = \int_0^l x \cdot dx = \frac{l^2}{2}, \quad S_x = \int_0^l y \cdot ds = \frac{4f}{l^2}\int_0^l x(l-x)\,dx = \frac{2}{3} f l,$$

$$\mathfrak{J}_y = \int_0^l x^2 \cdot dx = \frac{l^3}{3}, \quad \mathfrak{J}_x = \int_0^l y^2 dx = \frac{16 f^2}{l^4} \cdot \int_0^l x^2 (l-x)^2\,dx = \frac{8}{15} f^2 l,$$

$$C = \int_0^l x \cdot y \cdot dx = \frac{4f}{l^2}\int_0^l x^2 \cdot (l-x)\,dx = \frac{f l^2}{3}; \text{ ferner } (S_y)_u^l = \int_u^l x \cdot dx = \frac{l^2 - u^2}{2},$$

$$(S_x)_u^l \int_u^l y \cdot dx = \frac{4f}{l^2} \cdot \int_u^l x(l-x)\,dx = \frac{2}{3}\frac{f}{l^2}\left\{l^3 - u^2(3l - 2u)\right\},$$

$$C_u^l = \int_u^l x \cdot y \cdot dx = \frac{4f}{l^2}\int_u^l x^2(l-x)\,dx = \frac{f}{3l^2}\left\{l^4 - u^3(4l - 3u)\right\},$$

$$(\mathfrak{J}_y)_u^l = \int_u^l x^2 . dx = \frac{l^3 - u^3}{3}, \quad L_u^l = \int_u^l dx = l - u.$$

Durch Einsetzung dieser Werte in die Gl. 13—15 erhält man

$$H = \frac{15}{4} P \frac{u^2(l-u)^2}{f \cdot l^3 (1+\xi)}, \tag{20}$$

$$A = P \frac{(l-u)^2(l+2u)}{l^3}, \tag{21}$$

$$M_a = P \frac{u(l-u)^2}{l^3} \cdot \left(\frac{\frac{5}{2}u}{1+\xi} - l\right), \tag{22}$$

worin $\xi = \frac{45 J}{4 f^2 F}$ **den verkürzenden Einfluſs des Horizontalschubes** H **in Bezug auf die Bogenmittellinie darstellt.**

Zum Vergleiche der Ergebnisse nach dem graphisch-rechnerischen Verfahren (Gl. 16—18) und nach dem der analytischen Annäherung (Gl. 20—22) sind in folgendem für eine parabolische Bogenform von $l = 20^{\mathrm{m}}$ Spannweite und mit dem Pfeilverhältnis $f:l = 1:2{,}5$ die Stützwerte H, A und M_a für die Last $P = 1$ in sieben symmetrisch gelegenen Stellungen nach beiden Verfahren ermittelt und in umstehender Tabelle zusammengestellt. Der Wert $\frac{J}{F}$ ist dabei wieder zu $0{,}0004\,l^2$ angenommen. Für die Zeichnung der Seillinien wurde die Bogenlinie in 40 Teile geteilt und die Last nacheinander in sieben symmetrisch gelegenen Teilpunkten angenommen. Spalte 1—7 der Tabelle enthalten die der Figur entnommenen Strecken, während in Spalte 8—10 die mit Hülfe der Gl. 16—18 und in Spalte 11—13 die aus den analytischen Annäherungsgleichungen 20—22 berechneten Einfluſsordinaten η_H, η_A und η_{Ma} verzeichnet sind.

In Fig. 57 *b* sind die Einfluſslinien dargestellt, wozu bemerkt wird, daſs die gestrichelten Linien den Ergebnissen der analytischen Annäherungsmethode entsprechen.

Der Umstand, daſs nach den drei statischen Gleichgewichtsbedingungen die H-Werte in zwei symmetrisch gelegenen Punkten einander gleich sein, die A-Werte sich zu P, bezw. 1 ergänzen müssen und das Einspannungsmoment M_a für die Lastlage in irgend einem Punkte gleich dem Einspannungsmomente M_b für die Lastlage in dem symmetrisch gelegenen Punkte sein muſs, läſst sich als Kontrolle der Ergebnisse benutzen.

Während beide Verfahren nach Spalte 9 und 12 für die lotrechten Stützkräfte fast durchweg gleiche Werte ergeben, weichen nach Spalte 8 und 11 die H-Werte bis zu rund 7% voneinander ab. Die Einspannungsmomente unterscheiden sich nach Spalte 10 und 13 in ihren negativen Gröſstwerten

bis zu rund 12%. Und zwar fallen sowohl die H-Werte als die M_a-Werte nach dem analytischen Annäherungsverfahren in dem bezeichneten Maſse gröſser aus.

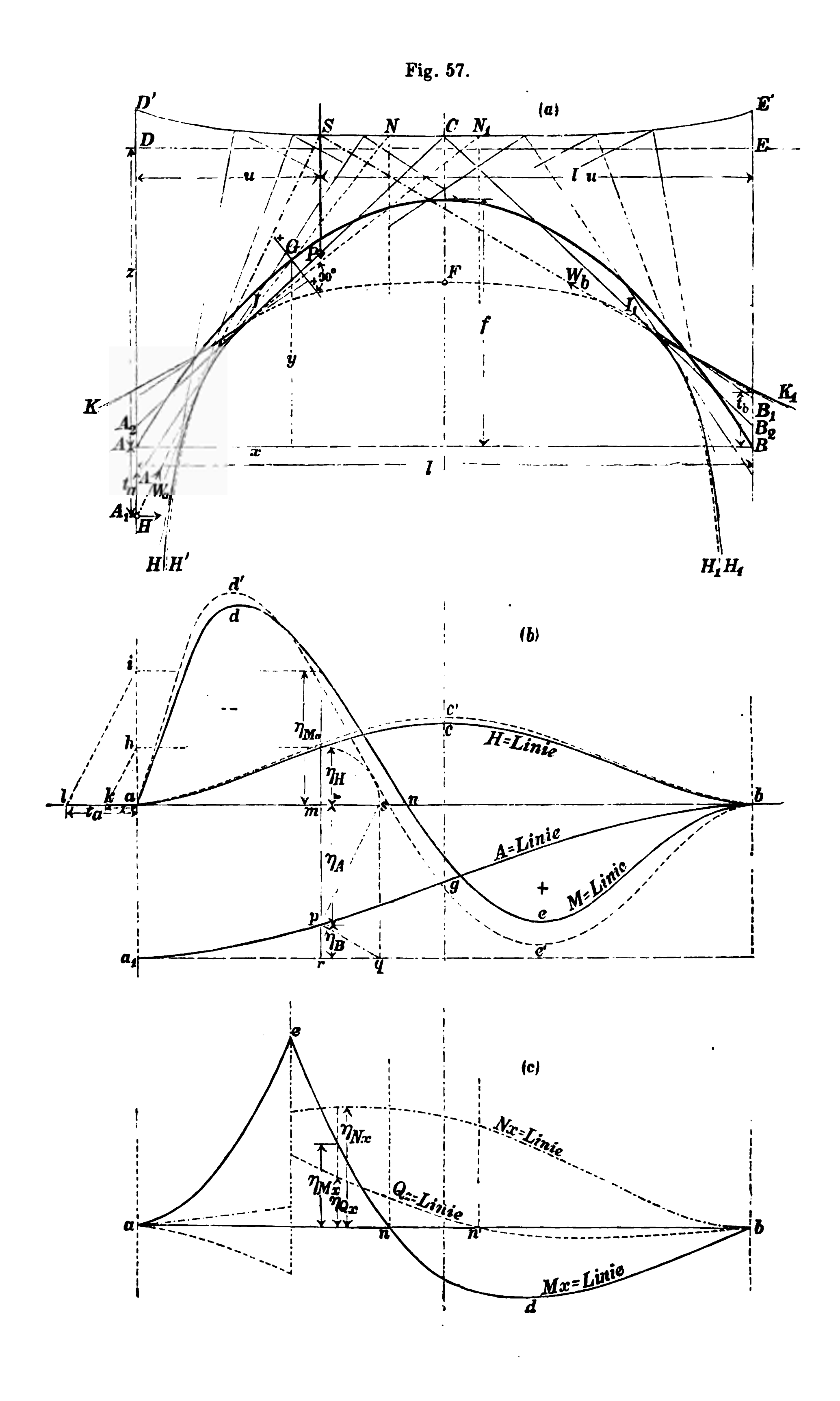
Diese gröſsten Abweichungen treten jedoch nur für bestimmte Lagen einer Einzellast ein. Bei gleichzeitiger Belastung gröſserer Trägerstrecken weichen die Ergebnisse beider Methoden erheblich weniger voneinander ab.

u m	L^l_u m	$(s_y)^l_u$ m	$(s_x)^l_u$ m	$(i_y)^l_y$ m	$(i_x)^l_0$ m	c^l_u m	η_H	η_A	η_{M_a}	η_H	η_A	η_{M_a}
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
—	—	—	—	—	—	—	N. d. graphischen Methd. bestimmt.			N. d. analyt. Annäherungsmethd. berechnet.		
0,0	26,66	13,33	12,96	18,45	31,8	13,00	0,0	1	0			
3,20	21,33	12,90	11,78	18,35	—	12,70	0,16	0,92	—1,30	0,165	0,93	—1,38
5,10	18,66	12,35	10,35	18,15	—	12,10	0,31	0,83	—1,09	0,325	0,84	—1,08
7,40	16,00	11,52	8,58	17,65	—	11,00	0,46	0,69	—0,45	0,49	0,69	—0,29
10,00	13,33	10,35	6,48	16,60	—	9,15	0,53	0,50	+0,34	0,57	0,50	+0,54
12,60	10,66	8,88	4,38	14,94	—	6,86	0,46	0,31	+0,75	0,49	0,31	+0,90
14,90	8,00	7,05	2,60	12,44	—	4,40	0,31	0,17	+0,62	0,325	0,16	+0,79
16,80	5,33	4,92	1,18	9,08	.—	2,14	0,16	0,08	+0,30	0,165	0,07	+0,45

c) Bestimmung der Kämpferdrucklinie und der Kämpferdruckumhüllungslinie.

Die unter b ermittelten statisch unbestimmten Stützwerte H, A und M_a, von denen wir uns H und A, bezw. deren Mittelkraft, den Stützdruck W_a, im Schwerpunkte des Einspannungsquerschnittes angreifend zu denken haben, können in ihrer Wirkung auf den Bogen ersetzt werden allein durch den Stützdruck W_a in entsprechend parallel verschobener Lage. Der Verschiebungssinn und die in der Richtung des Kämpferlotes durch A gemessene Verschiebungsstrecke $A A_1 = t_a$ (vergl. Fig. 57a u. 58) haben dabei die Bedingung $H \cdot t_a = M_a$ zu erfüllen, wobei dem positiv gedachten Moment M_a eine Verschiebung t_a aufwärts und umgekehrt entspricht. Der Fig. 57a u. 58 angenommenen Lastlage kommt ein negatives Moment M_a und eine negative (abwärts gekehrte) Strecke t_a zu. Tatsächlich stellt W_a in dieser Lage die Mittelkraft aller im Einspannungsquerschnitte auftretenden, im Gleichgewicht der Kräfte vom Widerlager auf den Bogen ausgeübten Spannkräfte dar. Mit dem Stützdruck W_a in dieser Lage ist auch der Schnittpunkt S seiner Richtungslinie mit derjenigen von P bekannt geworden, durch den auch der Stützdruck W_b in B gerichtet sein muſs, weil W_a, P und W_b

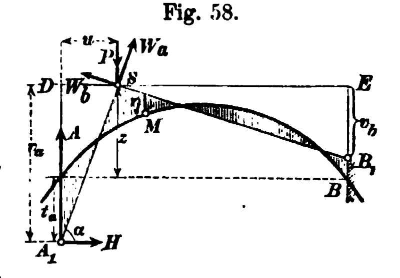
Fig. 57.



(a)
D'
E'
S
N
C
N1
D
E
u
l u
z
Q
P
90°
F
Wb
J
J1
f
y
K
K1
A2
A
tb
B1
B2
B
x
l
ta
Wa
A1
H
H H'
H1' H1
(b)
d'
d
i
ηMx
c'
c
H=Linie
h
ηH
l
k
a
ta
m
n
b
ηA
A=Linie
g
+
M=Linie
e
p
ηB
e'
a1
r
q
(c)
e
ηNx
Nx=Linie
ηMx
ηQx
Qx=Linie
a
n
n'
b
Mx=Linie
d

als einzige auf den selbst gewichtslos gedachten Bogen wirkende Kräfte das äufsere Gleichgewicht desselben bedingen. Da aufserdem aus der Bedingung der Nullgleichheit aller lot- und wagerechten Kräfte W_b durch seine Seitenkräfte H und $B = P - A$ nach Richtung und Gröfse bekannt geworden ist, so liegt mit W_a und P auch der rechtsseitige Stützdruck W_b völlig fest. Bestimmt man den Punkt S für eine hinreichende Zahl von Lagen der Last P, so erhält man in der Verbindungslinie der Punkte S die sog. **Kämpferdrucklinie.** Die den verschiedenen Lagen der Last P entsprechenden Richtungslinien der Kämpferdrücke W_a und W_b umhüllen und legen dadurch fest eine Kurve, die sog. **Kämpferdruckumhüllungslinie.**

Fig. 58.



Sind die Einflufslinien acb von H, a_1gb von A und $adeb$ von M_a (vergl. Fig. 57 b) bekannt, so kann man beide Linien leicht wie folgt zeichnerisch bestimmen: Man macht (Fig. 57 b) $ah = \eta_H$, $ai = \eta_{M_a}$, $ak = 1$ (Längeneinheit) und zieht $il \parallel kh$, dann ist

$$al = \frac{ai}{ah} = \frac{\eta_{M_a}}{\eta_H} = t_a.$$

Ferner werde in Fig. 57 a unter Beachtung des Vorzeichens von η_{M_a} und t_a $AA_1 = t_a$, in Fig. 57 b $ms = \eta_H = rq$ gemacht und p mit s und q verbunden. Man erhält dann in ps die Stützkraft W_a, und in qp diejenige W_b für eine Last $P = 1$ im Abstande u von A. Zieht man jetzt durch A_1 die Richtungslinie von W_a parallel zu ps, so erhält man dadurch den Punkt S, durch den die Richtungslinie von W_b parallel zu qp gehen mufs. Letztere schneidet die Stützlotrechte durch B in B_1, wodurch t_b festgelegt ist. In gleicher Weise können für beliebige andere Laststellungen die entsprechenden Punkte S und die Richtungslinien der zugehörigen Stützdrücke W_a und W_b und so die Kämpferdrucklinie und die Kämpferdruckumhüllungslinie bestimmt werden; erstere $D'CE'$ weist für parabolische und ähnliche Bogenformen schwach konkav nach oben gekrümmte Form auf; letztere besteht aus zwei getrennten symmetrischen Teilen HJK und $H_1J_1K_1$, deren jeder zwei Zweige aufweist, welche sich tangential an die Richtungslinien A_2C und B_2C der Kämpferdrücke für die Lastlage in der Bogenmitte anschliefsen.

10*

Es sei hier noch darauf hingewiesen, daſs, wenn die Richtungslinie der Last P durch den Einfluſsnullpunkt n des Einspannungsmomentes M_a geht, t_a gleich Null wird, W_a naturgemäſs durch den Kämpferpunkt A geht, A_1 mit A zusammenfällt; ferner daſs, je nachdem P rechts oder links von der Belastungsscheide n sich befindet, t_a gröſser oder kleiner als Null wird, A_1 ober- oder unterhalb A liegt.

Mit Hülfe des analytischen Annäherungsverfahrens erhält man aus den Gl. 20—22 zunächst

$$23)\qquad t_a = \frac{M_a}{H} = -\frac{4}{15}\cdot f\frac{l}{u}\left(1+\xi-\frac{5}{2}\frac{u}{l}\right)$$

und bei den aus Fig. 58 ersichtlichen Bezeichnungen für den Richtungswinkel α des Kämpferdruckes W_a

$$24)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{z+t_a}{u} = \frac{A}{H} = \frac{4}{15}\frac{fl}{u^2}\left(1+2\frac{u}{l}\right)(1+\xi).$$

Aus Gl. 23 u. 24 erhält man als Gleichung der Kämpferdrucklinie

$$25)\qquad z = \frac{6}{5}f\left(1+\frac{4}{9}\xi\right).$$

Da hierin z von u unabhängig ist, ergibt sich mit Hülfe des analytischen Annäherungsverfahrens die Kämpferdrucklinie als wagerechte Gerade DE. Mit $\frac{J}{F} = 0{,}0004\,l^2$ und $\frac{f}{l} = \frac{1}{2{,}5}$, also $\xi = \frac{45}{4}\cdot\frac{0{,}0004\,l^2}{f^2} = 0{,}028$ wird nach Gl. 25 $z = 1{,}22\,f$, wohingegen nach dem genaueren graphischen Verfahren für die Bogenmitte $z = 1{,}28\,f$ sich ergibt.

Der lotrechte Abstand v_a (Fig. 58) des Angriffspunktes A_1 des Kämpferdruckes W_a von der wagerechten geraden Kämpferdrucklinie berechnet sich nach Fig. 58 und Gl. 24 zu

$$26)\qquad v_a = z + t_a = \frac{8}{15}f\left(1+\frac{l}{2u}\right)(1+\xi),$$

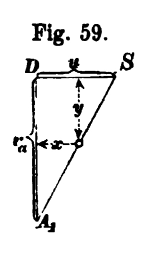
während der entsprechende Abstand v_b für die rechte Seite durch Vertauschung von u mit $l-u$ erhalten wird.

In Bezug auf ein Koordinatenkreuz mit D als Anfangspunkt erhält man als Gleichung der Richtungslinie des Kämpferdruckes W_a nach Fig. 59

$$27)\qquad y = \frac{v_a}{u}(u-x) = \frac{8}{15}f(1+\xi)\left(1+\frac{l}{2u}\right)\left(1-\frac{x}{u}\right).$$

Nach der Lehre von den Umhüllungslinien hat man, um die Gleichung der Umhüllungslinie zu erhalten, die Abgeleitete von y nach dem sog. Parameter u der Linienschar, $\frac{dy}{du}$ gleich Null zu setzen, daraus u zu berechnen und in Gl. 27 einzuführen. Unter Fortlassung der unveränderlichen Faktoren wird $\frac{dy}{du} = 0 = \left(1 + \frac{l}{2u}\right)\frac{x}{u^2} - \left(1 - \frac{x}{u}\right)\frac{l}{2u^2}$, woraus folgt

Fig. 59.



$$u = \frac{l \cdot x}{\frac{1}{2} l - x}, \text{ also } 1 + \frac{l}{2u} = \frac{x + \frac{1}{2} l}{2x} \text{ und } 1 - \frac{x}{u} = \frac{x + \frac{1}{2} l}{l}.$$

Das ergibt in Gl. 27 eingesetzt

$$28) \qquad y = \frac{4}{15} f(1 + \xi) \frac{(x + \frac{1}{2} l)^2}{l \cdot x}.$$

Man erkennt hieraus, daß das analytische Annäherungsverfahren zu einer Hyperbel als Umhüllungslinie führt.

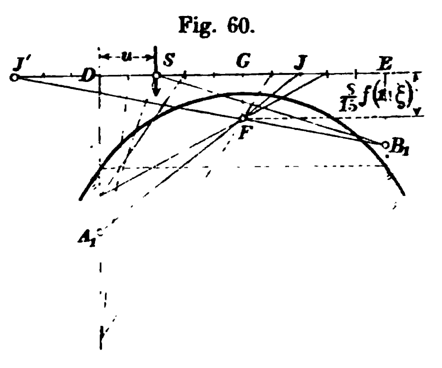
Eine symmetrische Kurve gilt für das rechtsseitige Widerlager. Im Symmetrielot des Bogens in einem Punkte F mit den Koordinaten $x = \frac{l}{2}$ und $y = \frac{8}{15} f(1 + \xi)$ treffen beide Linien in gemeinsamer wagerechter Richtung $\left(\frac{dy}{dx} = 0\right)$ zusammen.

Die nach dem genauen graphischen Verfahren und auf dem Wege analytischer Annäherung ermittelten Kämpferdrucklinien und Kämpferdruckumhüllungslinien sind in Fig. 57a in den Linien $D'CE'$ und DE, bezw. HJK, $H_1J_1K_1$ und $H'FH_1'$ einander gegenübergestellt. Danach zeigen beide, besonders aber die Kämpferdruckumhüllungslinien in ihrer Form erhebliche Abweichungen voneinander. Trotzdem führt auch die Benutzung der auf dem bequemen analytischen Wege zu gewinnenden Linien bei Bogenträgern mit schwächeren Pfeilverhältnissen zu praktisch meist befriedigend genauen Ergebnissen. Bei steileren Bogenformen freilich wird man gut tun, die vielleicht vorläufig auf analytischem Wege gewonnenen Ergebnisse durch das genauere graphische Verfahren zu kontrollieren.

Der Punkt F, in welchem die auf analytischem Wege erhaltenen beiden Hälften der hyperbolischen Kämpferdruckumhüllungslinie sich berühren, ist noch einer fruchtbaren Benutzung fähig.

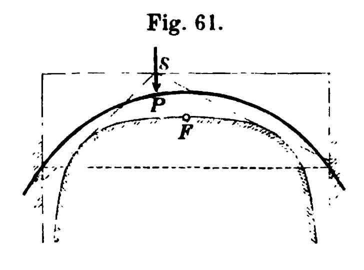
Nach Gl. 26 ist $\left(\frac{l}{2}+u\right):u = v_a:\frac{8}{15}f(1+\xi)$. Macht man daher in Fig. 60 bei einer Laststellung im Abstande u von D $GJ=u$ und zieht von J über F die Gerade JA_1, so erhält man in A_1 einen Punkt der Richtungslinie des Kämpferdruckes W_a, der für die bezeichnete Laststellung durch S gerichtet sein mufs. Macht man ebenso $GJ'=l-u$, so erhält man im Schnittpunkte B_1 der Geraden von J' über F mit dem Kämpferlot durch B einen Punkt der Richtungslinie des rechtsseitigen Kämpferdruckes W_b, der gleichfalls durch S geht. So läfst sich in verhältnismäfsig einfacher Weise die Schar der Tangenten der Kämpferdruckumhüllungslinie und damit diese selbst gewinnen.

Fig. 60.



Die Kämpferdrucklinie und die Umhüllungslinie bestimmen nun die Widerlagerkräfte W_a und W_b, welche von einer Einzellast P hervorgerufen werden (vergl. Fig. 57*a* und Fig. 61), vollständig: Vom Punkt S aus, in welchem die Last die erstere Linie schneidet, zieht man je eine Berührungsgerade an die beiden Hälften der Umhüllungslinie und hat damit die Richtungslinie W_a und W_b. Durch Zerlegung von P nach diesen Richtungen erhält man dann auch in den umgekehrt genommenen Seitenkräften die Gröfsen der Stützkräfte W_a und W_b.

Fig. 61.



d) Stützkräfte und Stützmomente für beliebige lotrechte Belastung.

Handelt es sich um Einzellasten, so können entweder die genauen Gleichungen 16—18 S. 142, oder die Annäherungsgleichungen 20—22 S. 144 unter Einfügung der betreffenden Lastabstände u zur Berechnung der H-, A- und M_a-Werte benutzt werden. Sind nach jenen

Gleichungen die Einflußlinien für die H-, A- und M_a-Werte entwickelt, so erhält man diese selbst in der Form $\Sigma P \cdot \eta$.

Kommt gleichmäßige Belastung einer Strecke oder des ganzen Bogenträgers in Betracht, so findet man jene Stützwerte aus dem zwischen den Grenzloten der belasteten Strecke liegenden Teil F_e der betreffenden Einflußfläche in der Form $F_e \cdot p$.

Werden die analytischen Annäherungsregeln Gl. 20—22 S. 144 benutzt, so erhält man aus Gl. 20 mit $P = 1$ $\eta_H = \frac{15}{4} \frac{u^2 (l-u)^2}{f \cdot l^3 (1+\xi)}$ und, wenn der Träger auf einer Strecke von $u = 0$ bis u gleichmäßig mit p belastet ist,

$$1)\quad \left\{ \begin{aligned} H_0^u &= (F_e)_0^u \cdot p = p \cdot \int_0^u \eta_H \cdot du = \frac{15 \cdot p}{4 f l^3 (1+\xi)} \cdot \int_0^u u^2 (l-u)^2 \, du \\ &= \frac{p l^2}{8 f (1+\xi)} \cdot \frac{u^3}{l^3} \left(10 - 15 \frac{u}{l} + 6 \frac{u^2}{l^2}\right). \end{aligned} \right.$$

Und ebenso nach Gl. 21 u. 22

$$2)\quad A_0^u = p \cdot \int_0^u \eta \cdot du = \frac{p}{l^3} \int_0^u (l-u)^2 (l + 2u) \, du = p u \left(1 - \frac{u^2}{l^2} + \frac{1}{2} \frac{u^3}{l^3}\right).$$

$$3)\quad \left\{ \begin{aligned} (M_a)_0^u &= p \cdot \int_0^u \eta_{M_a} \cdot du = \frac{p}{l^3} \int_0^u u (l-u)^2 \left(\frac{5/2\, u}{1+\xi} - l\right) du \\ &= -p u^2 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{u}{l} + \frac{1}{4} \frac{u^2}{l^2} - \frac{5}{2(1+\xi)} \frac{u}{l} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{u}{l} + \frac{1}{5} \frac{u^2}{l^2}\right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Der rechtsseitige lotrechte Stützdruck ergibt sich aus der Gleichung der lotrechten Kräfte zu

$$4)\quad B_0^u = p \cdot u - A_0^u = p u \left(\frac{u^2}{l^2} - \frac{1}{2} \frac{u^3}{l^3}\right).$$

Aus der Momentengleichung in Bezug auf den Kämpferpunkt B endlich

$$5)\quad \left\{ \begin{aligned} \ldots M_b &= M_a - p u \left(l - \frac{u}{2}\right) + A l \\ &= -p u^2 \left\{ \left(\frac{1}{3} \frac{u}{l} - \frac{1}{4} \frac{u^2}{l^2}\right) - \frac{5}{2(1+\xi)} \frac{u}{l} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{u}{l} + \frac{1}{5} \frac{u^2}{l^2}\right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Ist die ganze linksseitige Bogenhälfte belastet, so wird mit $u = \frac{l}{2}$

$$6)\quad \ldots H = \frac{p l^2}{16 f (1+\xi)}, \qquad 7)\quad \ldots A = \frac{13}{32} p l, \qquad 8)\quad \ldots B = \frac{3}{32} p l,$$

$$9) \quad ..\, M_a = -\frac{p l^2}{64} \cdot \frac{1 + \frac{11}{3}\xi}{1+\xi} \quad \text{und} \quad 10) \; ..\, M_b = +\frac{p l^2}{64} \frac{1 - \frac{5}{3}\xi}{1+\xi}.$$

Für die Abstände t_a und t_b erhält man bei dieser Belastung

$$11) \, ..\, t_a = \frac{M_a}{H} = -\frac{f}{4}\left(1 + \frac{11}{3}\xi\right) \text{ und } 12) \, ..\, t_b = \frac{M_b}{H} = +\frac{f}{4}\left(1 - \frac{5}{3}\xi\right).$$

Die Belastung des ganzen Bogens mit p liefert nach Gl. 1—5 mit $u = l$

$$13)\, A = B = \frac{pl}{2}, \; 14)\, H = \frac{p l^2}{8f(1+\xi)} \text{ und } 15) \, ..\, M_a = M_b = -\frac{p l^2}{12} \frac{\xi}{1+\xi}.$$

Für diesen Belastungsfall greifen die symmetrisch gerichteten Kämpferdrücke W_a und W_b in gleichen Abständen

$$16) \qquad t_a = t_b = \frac{M_a}{H} = -\frac{2}{3} f \xi$$

unterhalb der Endpunkte A und B der Bogenmittellinie an.

Mit $f = 0$ wird der eingespannte Bogen zum eingespannten geraden Balken, $\xi = \infty$, $\frac{\xi}{1+\xi} = 1$ und $M_a = M_b = -\frac{p l^2}{12}$, wie Teil I S. 138 Gl. 5a.

Ist der ganze Bogen gleichmäßig mit g und eine Hälfte, etwa die linksseitige, mit p für die Längeneinheit bedeckt, so wird nach Gl. 6 u. 14

$$17) \qquad ..\, H = \frac{l^2(2g + p)}{16 f(1+\xi)}, \qquad \text{und nach Gl. 7 u. 13}$$

$$18) \qquad ..\, A = \frac{l}{2}\left(g + \frac{13}{16} p\right) \qquad \text{und nach Gl. 9 u. 15}$$

$$19) \; ..\, M_a = -\frac{g l^2}{12} \frac{\xi}{1+\xi} - \frac{p l^2}{64} \frac{1 + \frac{11}{3}\xi}{1+\xi} = -\frac{1}{64} p l^2 - \frac{2}{3} f \cdot H \cdot \xi.$$

$$20) \; ..\, M_b = -\frac{g l^2}{12} \frac{\xi}{1+\xi} + \frac{p l^2}{64} \frac{1 - \frac{5}{3}\xi}{1+3} = +\frac{1}{64} p l^2 - \frac{2}{3} f \cdot H \cdot \xi.$$

e) Biegungsmoment, Quer- und Normalkraft in einem beliebigen Trägerquerschnitte.

Nachdem für eine beliebige lotrechte Belastung des Bogenträgers die das äußere Gleichgewicht herstellenden Stützkräfte bekannt

geworden sind, kann die Ermittelung des Biegungsmomentes, der Normal- und Querkraft für irgend einen Trägerquerschnitt in bekannter Weise geschehen.

In einem Querschnitte im wagerechten Abstande x von A erzeugt eine Last P rechts desselben im Abstande u von A (Fig. 55) ein Moment

1) $$M_x = A \cdot x - H \cdot y + M_a$$

und eine Last links des Querschnittes ein solches

1a) $$M_x = A \cdot x - P(x - u) - H \cdot y + M_a,$$

worin die von P abhängigen Stützwerte A, H und M_a aus den Gl. 16—18 S. 142 oder aus Gl. 20—22 S. 144 zu entnehmen sind.

Die in dem gleichen Querschnitte auftretende Querkraft berechnet sich zu

2) $$Q_x = A \cdot \cos\varphi - H \sin\varphi,$$

wenn die Last P rechts des Querschnittes liegt, und zu

2a) $$Q_x = (A - P)\cos\varphi - H \sin\varphi,$$

wenn die Last P links vom Querschnitt sich befindet. (Vergl. S. 76 Gl. 6.)

Ebenso erhält man die Normalkraft zu

3) $$N_x = A \cdot \sin\varphi + H \cos\varphi,$$ wenn die Last P rechts und

3a) $$N_x = (A - P)\sin\varphi + H \cos\varphi,$$ wenn sie links vom Querschnitt sich befindet.

Mit Hülfe der Gleichungen 1—3 können auch die Einflufslinien des Biegungsmomentes, der Normal- und Querkraft für irgend einen Querschnitt leicht aus denjenigen für die Stützwerte A, H und M_a abgeleitet werden. In Fig. 57 *c* sind die Einflufslinien der Gröfsen M_x, Q_x und N_x verzeichnet für den Querschnitt tt im Abstande $x = \frac{l}{4}$ des in Fig. 57 *a* dargestellten Bogens. Die Belastungsscheiden n des Biegungsmomentes und n' der Querkraft können auch wie folgt bestimmt werden: Zieht man durch den Achspunkt G des Querschnittes eine Tangente an die Kämpferdruckumhüllungslinie, so erhält man in deren Schnittpunkte N mit der Kämpferdrucklinie den Einflufsnullpunkt für das Moment M_x, denn eine durch N gerichtete lotrechte Last P wirkt in dieser Lage nur durch den von ihr erzeugten Kämpferdruck W_a auf den Querschnitt ein, durch dessen Schwerpunkt sie gerichtet ist.

Zieht man ferner eine zur Schnittlinie tt senkrechte Tangente an die Kämpferdruckumhüllungslinie, so erhält man in deren Schnittpunkte N_1 mit der Kämpferdrucklinie den Einflufsnullpunkt der Querkraft Q_x. N mufs also lotrecht über n und N_1 lotrecht über n_1' liegen. Sind daher die Kämpferdrucklinie und Kämpferdruckumhüllungslinie für einen Bogen gezeichnet, so kann man etwa in Frage kommende bewegliche Belastung leicht in die Stellung gröfsten und kleinsten Momentes oder gröfster und kleinster Querkraft für irgend einen Querschnitt bringen und dann diese Gröfst- und Kleinstwerte selbst mit Hülfe der Gl. 1—3 ermitteln.

Hat der Bogenträger flach parabolische Form, so dafs zur Bestimmung der statisch unbestimmten H-, A- und M_a-Werte die analytische Annäherungsmethode Anwendung finden kann, so erhält man unter Benutzung der in Gl. 6—10 S. 151/152 für gleichmäfsige Belastung der einen Bogenhälfte berechneten H-, A-, B-, M_a- u. M_b-Werte beispielsweise das Biegungsmoment M_m im Scheitelquerschnitt des symmetrisch gedachten Bogens nach Gl. 1 mit $x = \frac{l}{2}$ und $y = f$ zu

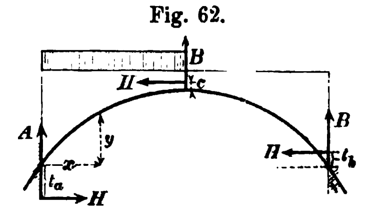
$$4) \ldots M_m = \frac{3}{32} p\, l \cdot \frac{l}{2} - \frac{p\, l^2 \cdot f}{16 f (1+\xi)} + \left(\frac{p\, l^2}{64} \, \frac{1 - \frac{5}{3}\xi}{1+\xi} \right) = \frac{p\, l^2}{48} \cdot \frac{\xi}{1+\xi}.$$

Bei voller Belastung des ganzen Bogens mit p wird unter Beachtung der Gl. 11—13

$$5) \ldots M_m = \frac{p\, l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{p\, l}{2} \cdot \frac{l}{4} - \frac{p\, l^2 \cdot f}{8 f (1+\xi)} - \frac{p\, l^2}{12} \cdot \frac{\xi}{1+\xi} = \frac{p\, l^2}{24} \cdot \frac{\xi}{1+\xi}.$$

Mit $f = 0$ wird der eingespannte Bogen zum eingespannten geraden Balken, $\xi = \infty$, $\frac{\xi}{1+\xi} = 1$ und daher $M_m = \frac{p\, l^2}{24}$, wie Teil I S. 139 Gl. 6a.

Fig. 62.



Bei Belastung der einen etwa linksseitigen Bogenhälfte (Fig. 62) wirkt an der unbelasteten rechtsseitigen Hälfte als äufsere Kraft nur die Stützkraft W_b, bezw. deren Seitenkräfte B und H. Denkt man sich die Zerlegung im Scheitelquerschnitt ausgeführt, so erkennt man, dafs die Seitenkraft H allein das in Gl. 4 berechnete Moment M_m zu

leisten hat. Der Abstand c zwischen H und der Bogenmittellinie im Scheitel mufs somit die Bedingung erfüllen $c \cdot H = M_m$, woraus man unter Beachtung der Gl. 6 S. 151 und Gl. 4 erhält

$$6) \quad \ldots c = \frac{M_m}{H} = f \cdot \frac{\xi}{3}.$$

Bei voll mit p belastetem Bogenträger müssen wegen der herrschenden Symmetrie die beiden Bogenhälften im Scheitelquerschnitt eine wagerechte Normalkraft, nämlich die in Gl. 14 S. 152 berechnete Horizontalkraft H aufeinander ausüben. Diese erzeugt das in Gl. 5 berechnete Moment M_m, und ihr lotrechter Abstand c von der Bogenmittellinie (Fig. 63) mufs also sein

Fig. 63

$$7) \quad \ldots c = \frac{M_m}{H} = f \cdot \frac{\xi}{3}.$$

Die Erhebung der Horizontalkraft H über die Bogenmittellinie im Scheitel ist also für volle Belastung des ganzen Bogens als wie bei halbseitiger Belastung $c = \frac{f \cdot \xi}{3}$, während die Senkung der Kämpferwiderstände W_a und W_b unter die Bogenmittellinie in den Kämpferpunkten A und B bei voller gleichmäfsiger Belastung des Bogens doppelt soviel $t_a = t_b = \frac{2}{3} f \xi$ ausmacht. Beides ist eine Folge der elastischen Verkürzung der Bogenmittellinie durch die in den einzelnen Bogenquerschnitten tätige Normalkraft, die im wesentlichen der Horizontalkraft H entspringt. Bei Vernachlässigung dieser in Gl. 7 S. 138 durch das Glied $Hl \frac{J}{F}$ ausgedrückten Verkürzung würde $\xi = 0$ und daher auch c und $t_a = t_b = 0$, sowohl die Kämpferkräfte W_a und W_b, als der Horizontalschub H würden in der Bogenmittellinie angreifen.

Bei gleichmäfsiger Belastung des ganzen Bogens mit g und der linken Hälfte mit p bleibt der Abstand c des Horizontalschubes H von der Bogenmittellinie im Scheitel nach Gl. 6 u. 7 ungeändert. Man erhält daher nach Gl. 17 S. 152 das Scheitelmoment zu

$$8) \quad M_m = H \cdot c = \frac{l^2}{48} \frac{\xi}{1+\xi} (2g + p).$$

Sind für irgend eine beliebige Belastung des Bogens mit Hülfe der Gl. 16—18 S. 142 oder 20—22 S. 144, oder 1—3 S. 151 die Stützwerte A, B, H, M_a und M_b und damit auch die nach Lage,

Richtung und Gröfse gleichwertigen Stützwiderstände W_a und W_b bekannt geworden, so erhält man die in den einzelnen Bogenquerschnitten auftretenden Biegungsmomente, Normal- und Querkräfte am übersichtlichsten, indem man zu der gegebenen Belastung mit der Horizontalkraft H als Polweite ein Seileck durch die Angriffspunkte A_1 und B_1 der Kämpferwiderstände zeichnet. Dieses stellt im Sinne der Darlegungen auf S. 68 u. f. in Bezug auf die äufseren Kräfte die „Mittelkraftlinie" und in Bezug auf die inneren Spannkräfte die „Spannungsmittellinie" dar und kann, wie dort erläutert, zur Ermittelung der Momente, Normal- und Querkräfte in den einzelnen Querschnitten benutzt werden.

Denkt man sich die danach auf irgend einen Querschnitt wirkende Mittelkraft in ihrem Schnittpunkte mit der Lotrechten durch den Querschnittsschwerpunkt in eine lot- und wagerechte Seitenkraft zerlegt, so erscheint das Biegungsmoment lediglich durch letzteren, den Horizontalschub H, erzeugt und man erhält es, wenn η den lotrechten Abstand beider Punkte bezeichnet, in der Form $\eta \cdot H$.

In Fig. 58 erscheint der Linienzug $A_1 S B_1$ als Mittelkraftlinie für die Einzellast P und die schraffierte Fläche stellt sich als Momentenfläche dar für die Polweite H.

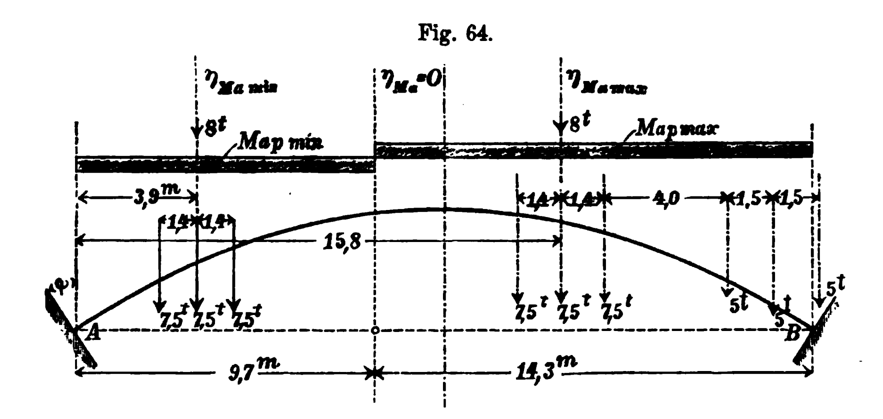
Anwendungen.

Beispiel 1: Der parabolische Blechbogenträger Beispiel 1 S. 93 von 24,0 m Spannweite, 4,0 m Pfeilhöhe mit dem dort berechneten überall gleichen Querschnitt von $h = 67$ cm, $F = 266$ cm², $W = 6215$ cm³ und $J = 208\,000$ cm⁴ werde ohne Gelenke ausgeführt, also beiderseits fest eingespannt und habe wie dort eine ständige Belastung $g = 0{,}7$ t f. d. M., sowie die in Fig. 44 bezeichneten beweglichen Einzellasten zu tragen. Welche gröfsten Randspannungen treten in den Einspannungsquerschnitten ein?

Wir benutzen bei der vorliegenden flachen Bogenform die analytischen Annäherungsgleichungen und erhalten bei den gewählten Querschnitts- und Pfeilverhältnissen $\xi = \frac{45}{4} \cdot \frac{J}{F \cdot f^2} = \frac{45}{4} \cdot \frac{208\,000}{266 \cdot (400)^2} = 0{,}055$. Die gröfste Randspannung entsteht in den Einspannungsquerschnitten und die beweglichen Lasten sind so zu stellen, dafs das Einspannungsmoment seinen positiven und negativen Gröfstwert annimmt. Um ersteren herbeizuführen, sind die drei grofsen Einzellasten (Lokomotiv-Raddrücke) so zu stellen, dafs die mittlere derselben mit der gröfsten positiven Einflufsordinate $\eta_{M_{a\,max}}$ zusammenfällt; es finden dann nach dem nächsten Kämpferquerschnitte hin noch zwei Tender-Raddrücke

Platz auf dem Träger. (Vergl. Fig. 64 rechts.) Um den negativen Gröfstwert (relatives Minimum) von M_a zu erhalten, sind die Lokomotiv-Raddrücke so zu stellen, dafs der mittlere mit der gröfsten negativen Einflufsordinate $\eta_{M_{a\,min}}$ zusammenfällt, die kleinern (Tender-)Raddrücke aber, da sie in das Gebiet des positiven Einflusses fallen würden, vom Träger fern gehalten werden. (Vergl. Fig. 64 links). Nach Gl. 22 S. 144 erhält man die Abszissen u und u' der

Fig. 64.



gröfsten positiven und negativen Einflufsordinaten von M_a aus der Gleichung $\frac{d\,M_a}{d\,u} = 0$ zu $u = 15{,}8^{\,m}$ und $u' = 3{,}9^{\,m}$. Das führt zu den aus Fig. 64 ersichtlichen Stellungen der beweglichen Lasten. Die Lage der Belastungsscheide ergibt sich aus Gl. 22 S. 144 mit $M_a = 0$ in $9{,}7^{\,m}$ Abstand von A.

Sind die Einflufslinien der drei statisch unbestimmten Stützwerte A, H und M_a gezeichnet, so erhält man die in den vorbezeichneten Stellungen von den Lasten erzeugten Stützwerte selbst leicht in der Form $\Sigma P \cdot \eta$. In vorliegendem Falle berechnen wir dieselben aus den Gl. 20—22 S. 144, indem wir nacheinander die in Fig. 64 bezeichneten Abszissen der Einzellasten einführen. Für die Laststellung Fig. 64 links wird

$$A_P = 7{,}25 + 6{,}95 + 6{,}55 = 20{,}75^{\,t},$$
$$H_P = 1{,}4 + 2{,}96 + 4{,}74 = 9{,}1^{\,t},$$
$$M_{a\,P_{min}} = -(11{,}4 + 12{,}6 + 11{,}5) = -35{,}5\ ^{m}/_{t}$$ und für

die Laststellung Fig. 64 rechts

$$A_P = 2{,}64 + 2{,}02 + 1{,}46 + 0{,}19 + 0{,}04 = 6{,}35^{\,t},$$
$$H_P = 9{,}25 + 8{,}10 + 6{,}61 + 1{,}14 + 0{,}30 = 25{,}40^{\,t},$$
$$M_{a\,P_{max}} = (7{,}3 + 7{,}7 + 7{,}1 + 1{,}58 + 0{,}42) = 24{,}1\ ^{m}/_{t}.$$

Die ständige verteilte Last $g = 0{,}7^{\,t}$ erzeugt nach Gl. 13—15 S. 152 folgende Stützwerte

$$A_g = \frac{1}{2}\,g\,l = \frac{1}{2} \cdot 0{,}7 \cdot 24 = 8{,}4^{\,t},$$

$$H_g = \frac{g\,l^2}{8f(1+\xi)} = \frac{0{,}7 \cdot 24^2}{8 \cdot 4 \cdot 1{,}055} = 12{,}0^{\,t},$$

$$M_{a_g} = -\frac{g\,l^2}{12} \cdot \frac{\xi}{1+\xi} = -\frac{0{,}7 \cdot 24^2}{12} \cdot \frac{0{,}055}{1{,}055} = -1{,}75^{\,m/t}.$$

Im ganzen entstehen also bei der Laststellung Fig. 64 links die Stützkräfte $A = 20{,}75 + 8{,}4 = 29{,}15^{\,t}$, $H = 9{,}1 + 12{,}0 = 21{,}1^{\,t}$ und $M_a = -35{,}5 - 1{,}75 = -37{,}25^{\,m/t}$ und für die Laststellung Fig. 64 rechts $A = 6{,}35 + 8{,}4 = 14{,}75^{\,t}$, $H = 25{,}40 + 12{,}0 = 37{,}40$, und $M_a = +24{,}1 - 1{,}75 = 22{,}35^{\,m/t}$.

Die Normalkraft N_a im Einspannungsquerschnitte wird nach Gl. 5 S. 76 $N_a = A \cdot \sin\varphi + H \cdot \cos\varphi$, worin φ Neigungswinkel der Tangente an die Bogenmittellinie in A ist. Nach Gl. 34 u. 35 S. 91 wird mit $x = 0$ und $f : l = {}^1/_6$ $\cos\varphi = 1 : \sqrt{1 + (4 \cdot {}^1/_6)^2} = 0{,}83$ und $\sin\varphi = {}^2/_3 : \sqrt{1 + (4 \cdot {}^1/_6)^2} = 0{,}55$. Mithin wird für die Laststellung Fig. 64 links $N_a = 29{,}15 \cdot 0{,}55 + 21{,}1 \cdot 0{,}83 = 33{,}5^{\,t}$ und für die Laststellung Fig. 64 rechts $N_a = 14{,}75 \cdot 0{,}55 + 37{,}40 \cdot 0{,}83 = 39{,}1^{\,t}$.

Die erstere Laststellung ruft im Einspannungsquerschnitt folgende Randspannungen σ_1 in der Aufsen- und σ_2 in der Innenkante hervor:

$$\sigma_{\substack{1\\2}} = -\left(\frac{33{,}5}{266} \mp \frac{37{,}25}{6215}\right)^{cm^2}, \quad \text{d. i.}\ \sigma_1 = +474^{\,at},\ \sigma_2 = -726^{\,at},$$

während die zweite Laststellung

$$\sigma_{\substack{1\\2}} = -\left(\frac{39{,}1}{266} \pm \frac{22{,}35}{6215}\right)^{t/cm^2}, \quad \text{d. i.}\ \sigma_1 = -507^{\,at}\ \text{und}\ \sigma_2 = +213^{\,at}.$$

Der Angriffspunkt der Normalkraft N_a im Einspannungsquerschnitte bei A liegt im ersten Belastungsfalle in der Querschnittsebene gemessen um $\frac{M_a}{N_a} = \frac{37{,}25}{33{,}5}$ = rund $1{,}10^{\,m}$ unterhalb und im zweiten um $\frac{22{,}35}{39{,}1} = 0{,}56^{\,m}$ oberhalb des Querschnittsschwerpunktes.

Die gröfsten Momente und Normalkräfte, bezw. die gröfsten Randspannungen in irgend einem anderen Trägerquerschnitt könnten mit Hülfe der Einflufslinien Fig. 57 *c* oder mit Hülfe der Gleichungen 1—3 S. 153 ermittelt werden. Man überzeugt sich indes bald, dafs diejenigen in den Einspannungsquerschnitten die gröfsten sind.

Beispiel 2: Der Bogenträger Beispiel 2 S. 95 von $24^{\,m}$ Spannweite, $4^{\,m}$ Pfeilhöhe und mit einem überall gleichen I-Querschnitt von $45{,}5^{\,cm}$ Höhe, $F = 178^{\,cm^2}$ Querschnittsfläche, $W = 2520^{\,cm^3}$ und $J = 58\,000^{\,cm^4}$ sei beiderseits fest eingespannt und habe eine ständige gleichmäfsige Belastung $g = 2{,}0^{\,t}$ und eine bewegliche $p = 1{,}2^{\,t/m}$ zu tragen. Die gröfsten Randspannungen in den Einspannungsquerschnitten sollen bestimmt werden.

Es wird hier $\xi = \frac{45}{4} \cdot \frac{J}{F \cdot f^2} = \frac{45}{4} \cdot \frac{58\,000}{177 \cdot 400^2} = 0{,}023$.

Den Abstand u_0 der Belastungsscheide für das Einspannungsmoment vom Kämpfer A erhält man nach Gl. 22 S. 144 für $M_a = 0$ zu $u_0 = 9{,}7^{\,m}$.

Die volle Belastung mit $g = 2{,}0\,^t$ liefert nach Gl. 13—15 S. 152

$$A_g = \frac{2 \cdot 24}{2} = 24\,^t, \quad H_g = \frac{2 \cdot 24^2}{8 \cdot 4 \cdot 1{,}023} = 35\,^t. \quad M_{a_g} = -\frac{2 \cdot 24^2}{12} \cdot \frac{0{,}023}{1{,}023} = -2{,}15\,^{t}/_{m}.$$

Die Belastung der Trägerstrecke $u_0 = 9{,}7\,^m$ mit der beweglichen Belastung $p = 1{,}2\,^t/_m$ ergibt nach den Gl. 1—3 S. 151 mit $\frac{u}{l} = \frac{9{,}7}{24} =$ rund 0,4 folgende Stützwerte:

$$\left[A_p\right]_0^{u_0} = 1{,}2 \cdot 9{,}7\left(1 - 0{,}4^2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}4^3\right) = 10{,}1\,^t,$$

$$\left[H_p\right]_0^{u_0} \frac{1{,}2 \cdot 24^2}{8 \cdot 4 \cdot 1{,}023} \cdot 0{,}4^3\,(10 - 15 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 0{,}4^2) = 6{,}7\,^t,$$

$$\left[M_{a_{p\,min}}\right]_0^{u_0} = 1{,}2 \cdot 9{,}7^2 \left[0{,}5 - \frac{2}{3} \cdot 0{,}4 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}4^2 - \right.$$

$$\left. \frac{5}{2 \cdot 1{,}023} \cdot 0{,}4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot 0{,}4 + \frac{1}{5} \cdot 0{,}4^2\right)\right] = -12{,}8\,^m/_t.$$

Die Stützwerte für die Belastung der positiven Einflufsstrecke des Einspannungsmomentes M_a von $u = 9{,}7$ bis $u = l = 24$ erhält man am einfachsten als Unterschied der Werte für die Belastung des ganzen Trägers mit p und der Strecke $u = 0$ bis $u = 9{,}7$ mit $-p$. Für volle Belastung mit p ergibt sich aus den oben berechneten Werten A_g, H_g und M_{a_g} $A_p = 24 \cdot \frac{1{,}2}{2} = 14{,}4\,^t$, $H_p = \frac{35 \cdot 1{,}2}{2} = 21\,^t$, $M_{a_p} = -2{,}15 \cdot \frac{1{,}2}{2} = -1{,}29\,^m/_t$. Für die bezeichnete Laststellung wird daher

$$\left[A_p\right]_{u_0}^{l} = 14{,}4 - 10{,}1 = 4{,}3\,^t, \qquad \left[H_p\right]_{u_0}^{l} = 21 - 6{,}7 = 14{,}3\,^t$$

und $\left[M_{a_{max}}\right]_{u_0}^{l} = -1{,}29 + 12{,}8 = +11{,}51\,^m/_t$.

Im ganzen berechnen sich daher die Stützwerte für die Laststellung entsprechend $M_{a_{min}}$ zu $A = 24 + 10{,}1 = 34{,}1\,^t$, $H = 35 + 6{,}7 = 41{,}7\,^t$ und $M_a = -2{,}15 - 12{,}8 = -14{,}95\,^m/_t$ und für die Laststellung entsprechend $M_{a_{max}}$ zu

$$A = 24 + 4{,}3 = 28{,}3\,^t, \quad H = 35 + 14{,}3 = 49{,}3\,^t$$

$$\text{und } M_a = -2{,}15 + 11{,}51 = 9{,}36\,^m/_t.$$

Die Normalkraft N_a im Einspannungsquerschnitt wird für die erstere Laststellung $N_a = 34{,}1 \cdot 0{,}55 + 41{,}7 \cdot 0{,}83 = 53{,}3\,^t$ und für die letztere $N_a = 28{,}3 \cdot 0{,}55 + 49{,}3 \cdot 0{,}83 = 56{,}6\,^t$. Die Randspannungen σ_1 in der Aufsenund σ_2 in der Innenkante des Einspannungsquerschnittes berechnen sich damit für die Laststellung $M_{a_{min}}$ zu

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = -\frac{N_a}{F} \mp \frac{M_{a\,min}}{W} = -\left(\frac{53{,}3}{178} \mp \frac{1495}{2520}\right)^{t}/_{cm^2},$$

$$\text{d. i. } \sigma_1 = +295\,^{at}, \quad \sigma_2 = -895\,^{at}$$

und für die Laststellung $M_{a_{max}}$ zu

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = -\frac{N_a}{F} \mp \frac{M_{a_{max}}}{W} = -\left(\frac{56{,}6}{178} \pm \frac{936}{2520}\right)^{t}/_{cm^2},$$

$$\text{d. i. } \sigma_1 = -690\,^{at}, \quad \sigma_2 = +56\,^{at}.$$

Die Exzentrizität der Normalkraft beträgt im ersten Belastungsfalle

$\frac{M_{a_{min}}}{N_a} = -\frac{14,95}{53,3} = -0,31^{m}$ abwärts und im zweiten

$\frac{M_{a_{max}}}{N_a} = +\frac{9,36}{56,6} =$ rund $0,20^{m}$ aufwärts vom Querschnittsschwerpunkte.

Beispiel 3: Welche gröfsten Randspannungen erzeugt eine bewegliche Einzellast von 8^{t} neben der ständigen Last $g = 2\,{}^{t}/_{m}$ in den Einspannungsquerschnitten? Nach Beispiel 1 entsteht das gröfste negative, bezw. positive Einspannungsmoment M_a, wenn die Einzellast sich im Abstande $u = 3,9^{m}$, bezw. $15,8^{m}$ vom Kämpfer befindet. In ersterer Laststellung wird nach Gl. 20—22 S. 144

$A_P = 7,45^{t}$, $H_P = 3,25^{t}$, $M_{a P_{min}} = -13,2\,{}^{m}/_{t}$ und in letzterer

$H_P = 2,17^{t}$, $H_P = 8,9^{t}$, $M_{a P_{max}} = +8,9\,{}^{m}/_{t}$.

Im ganzen wird für die Laststellung $M_{a_{min}}$ $A = 24 + 7,45 = 31,45^{t}$, $H = 35 + 3,25 = 38,25^{t}$, $M_{a_{min}} = -2,15 - 13,2 = -15,35\,{}^{m}/_{t}$, $N_a = 31,45 \cdot 0,55 + 38,25 \cdot 0,83 = 49,1^{t}$, und für die Laststellung $M_{a_{max}}$ $A = 24 + 2,17 = 26,17^{t}$, $H = 35 + 8,9 = 43,9^{t}$, $M_{a_{max}} = -2,15 + 8,9 = +6,75\,{}^{m}/_{t}$, $N_a = 26,17 \cdot 0,55 + 43,9 \cdot 0,83 = 50,8^{t}$. Im ersten Belastungsfalle folgt

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = -\left(\frac{49,1}{178} \mp \frac{1535}{2520}\right)^{t/cm^2}, \text{ d. i. } \sigma_1 = +335^{at},\quad \sigma_2 = -883^{at},$$

und im zweiten

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = -\left(\frac{50,8}{178} \pm \frac{675}{2520}\right)^{t/cm^2}, \text{ d. i. } \sigma_1 = -552^{at},\quad \sigma_2 = -18^{at}.$$

Die Exzentrizität der Normalkraft wird $-\frac{15,35}{49,10} = -0,31^{m}$, bezw. $+\frac{6,75}{50,4} = -0,134^{m}$. Bei der Laststellung $M_{a_{max}}$ bleibt die Normalkraft im Kerne des Querschnittes σ_1 und σ_2 werden beide negativ, die Einspannung könnte für diesen Belastungsfall durch eine ebene Stützfläche ohne Zugverbindung erreicht werden.

VII. Das Gewölbe als Bogenträger.

a) Allgemeines.

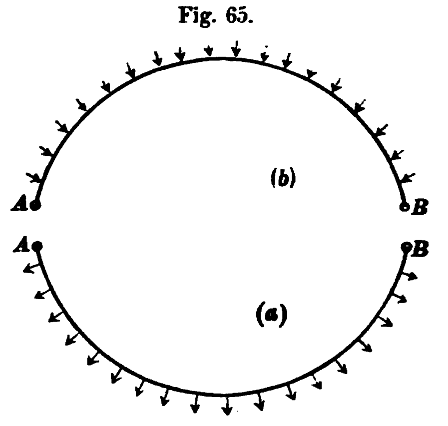
Jedes aus einzelnen abgestumpft keilförmigen Steinen mit geschlossenen Fugen hergestelltes einfaches Gewölbe (Tonnengewölbe) kann in statischer Beziehung innerhalb gewisser Grenzen als Bogenträger angesehen und hinsichtlich des Gleichgewichtes zwischen den äufseren und inneren Kräften als solcher beurteilt werden. Es können also die unter IV—VI für die Berechnung vollwandiger Bogenträger abgeleiteten Regeln im allgemeinen auch auf die statische

Untersuchung von Gewölben angewandt werden. Zwei statische Eigentümlichkeiten des Gewölbes sind es indes hauptsächlich, welche eine besondere Behandlung desselben gegenüber dem Bogenträger im engeren Sinne notwendig erscheinen lassen. Zum ersten erleidet die Elastizität und Festigkeit der Gewölbe in den Fugen meist eine erhebliche Verminderung, derzufolge eine s i c h e r e Leistung w e s e n t l i c h e r Zugspannungen im Gleichgewicht der äußeren und inneren Kräfte im Gegensatz zu dem Bogenträger im engeren Sinne überhaupt ausgeschlossen ist. Und zweitens ergibt sich aus der erheblich geringeren Festigkeit der für die Herstellung von Gewölben meist in Frage kommenden Baustoffe und den dadurch bedingten größeren Stärkenabmessungen gegenüber den eigentlichen Bogenträgern eine in den meisten Fällen ausschlaggebend größere und anders verteilte Eigenbelastung der Gesamtkonstruktion, welche namentlich bei Gewölben mit größeren Pfeilhöhen zu besonderen Formen der Bogenmittellinie führt.

Bekanntlich nimmt ein in zwei Punkten festgehaltenes, völlig biegsames Seil oder eine Kette unter dem Angriff von Kräften eine Gleichgewichtsform an, welche als Seileck, oder, wenn es sich um eine stetige Verteilung der Kräfte über die Seillänge handelt, als Seillinie zu den angreifenden Kräften angesehen und ermittelt werden kann. In letzterem Falle nennt man die Gleichgewichtsform auch wohl „K e t t e n l i n i e“. Die bei Vermittelung des äußeren Gleichgewichtes zwischen den angreifenden Kräften und den in den beiden Befestigungspunkten auftretenden Widerständen von dem Seil zu leistenden inneren Spannkräfte können wegen der völligen Biegsamkeit desselben nur tangential zu seiner Mittellinie, der Seillinie, gerichtet sein, so daß Biegungsmomente und Querkräfte in den Seilquerschnitten ausgeschlossen sind. An diesem Spannungszustande wird auch nichts geändert, wenn man sich das völlig biegsame Seil, nachdem es die dem Kraftangriff entsprechende Gleichgewichtsform angenommen hat, erstarrt oder durch einen starren Stab von gleicher Form ersetzt denkt. Wird der Stab unter Aufrechterhaltung dieser Form und Belastung aus der hängenden Lage (Fig. 65*a*) nach aufwärts in die stehende oder „s t r e b e n d e“ Lage (Fig. 65*b*) gedreht, oder nehmen in hängender Lage des Stabes die angreifenden Kräfte entgegengesetzte Pfeilrichtung an, so kehren die im Stabe herrschenden Spannkräfte nur ihren Richtungssinn um, werden aus

Zug- zu Druckkräften, wirken aber nach wie vor in der Mittellinie des Stabes, und in den Stabquerschnitten herrschen auch jetzt weder Biegungsmomente noch Querkräfte.*) Diese Form der Stabmittellinie als einer seiner Belastung entsprechenden Seil- oder Kettenlinie bedingt also die geringsten Spannungen in allen seinen Querschnitten und muſs daher als die vorteilhafteste für die Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes zwischen den äuſseren und inneren Kräften angesehen werden. Das trifft, sofern es sich um einen Kraftangriff handelt, der in den Stabquerschnitten Druckspannungen erzeugt, auch dann noch zu, wenn der Stab aus einzelnen starren, durch Ebenen rechtwinklig zur Stabachse gegeneinander abgegrenzten Teilen hergestellt ist. Ein derart aus einzelnen abgestumpft keilförmigen Körpern (Steinen) bestehender Bogenträger ist ein Gewölbebogen oder Gewölbe. Die ebenen Abgrenzungen der Teile gegeneinander sind seine Fugen und diejenige des ganzen Bogens beiderseits gegen die ihn stützenden Mauerkörper — „Widerlager" — sind seine Widerlager- oder Kämpferfugen.

Fig. 65.



Unter der Wirkung einer beliebigen Belastung entstehen in den einzelnen Querschnitten eines Gewölbebogens vorwiegend Druckspannungen, die sich im allgemeinen nicht gleichmäſsig über die Querschnittsfläche verteilen, so daſs die Spannungs- oder Druckmittelpunkte nicht mit den Querschnittsschwerpunkten, die „Druckmittellinie" oder Drucklinie, d. h. die Verbindungslinie als Druckmittelpunkte nicht mit der Bogenmittellinie zusammenfallen. Nur in dem Falle, wenn die Bogenmittellinie im Sinne obiger Darlegungen eine der Belastung entsprechende Seil- oder Kettenlinie ist, verteilen sich die Druckspannungen gleichmäſsig über die einzelnen Bogenquerschnitte, die Drucklinie fällt mit der Bogenmittellinie zusammen. Ein solcher Gewölbebogen wird treffend als Druckliniengewölbe

*) Die Möglichkeit einer Knickung bleibt hierbei auſser Acht.

benannt. Die bezeichnete günstige Wirkung eines Druckliniengewölbes bei Übertragung seiner Last auf die Widerlager ist indes nur denkbar, solange der Bogen als in seiner Form unveränderlich, „starr“ angenommen wird. Tatsächlich sind jedoch Gewölbe in ihrer Form keineswegs starr, und aufserdem begegnet schon die Herstellung jener völlig genauen Gewölbeform erheblichen Schwierigkeiten. Aber selbst die Möglichkeit angenommen, das Gewölbe genau in der vorherbestimmten „rechnungsmäfsigen“ Form und so herzustellen, dafs es unbelastet und mit seinem Eigengewichte noch auf dem „Lehrgerüst“ ruhend, in allen Fugen gleichmäfsig dicht, jedoch durchweg noch spannungslos schliefst, so würde schon nach Beseitigung des stützenden Lehrgerüstes und Eintritt der seiner Formbestimmung entsprechenden Belastung eine elastische Formänderung des Gewölbes — Verkürzung und Krümmungsänderung seiner Mittellinie — entstehen und infolge dessen die Drucklinie von der Gewölbemittellinie sich trennen. Erstere wird dadurch meist an den Kämpfern um Strecken t_a und t_b abwärts und im Scheitel um eine solche c aufwärtsrücken (vergl. S. 147—155). Eine weitere Trennung der Drucklinie von der Gewölbemittellinie entsteht, wenn statt der der Formbestimmung zu Grunde gelegten Belastung irgend eine andere auf das Gewölbe wirkt, oder wenn durch Temperaturschwankungen Formänderungen hervorgerufen werden. Letztere haben für sich allein die Wirkung, dafs die Drucklinie im Gewölbe um eine Mittellage gleichsam hin und her pendelt, sich, wie man leicht erkennt, bei steigender Temperatur im Scheitel abwärts und in den Kämpferfugen aufwärts und bei sinkender Temperatur umgekehrt bewegt.

Endlich mufs auch mit einer gewissen störend auf den Ausgleich der äufseren und inneren Kräfte einwirkenden elastischen oder unelastischen Nachgiebigkeit der Widerlager gerechnet werden. Alle diese Einflüsse bringen es mit sich, dafs der Spannungsmittelpunkt in den einzelnen Gewölbequerschnitten, bezw. der Angriffspunkt der Mittelkraft aller links oder rechts eines Querschnittes angreifenden äufseren Kräfte (vergl. S. 68) nicht mit dem Schwerpunkt desselben, die Spannungs- oder Druckmittellinie nicht mit der Gewölbemittellinie zusammenfällt, Biegungsmomente und Querkräfte, Biegungs- und Schubspannungen im Gewölbe entstehen. Das Mafs derselben läfst sich stets mit Hülfe der unter IV bis VI entwickelten Regeln feststellen.

Den der Formbestimmung eines Gewölbebogens als Druckliniengewölbe für eine bestimmte Lastverteilung zu Grunde zu legenden nur gedachten Zustand völliger Starrheit des Gewölbebogens selbst und seiner Widerlager, bei welchem die der Lastverteilung entsprechende Druckmittellinie mit der Gewölbemittellinie zusammenfällt, also die Normalspannungen sich in allen Querschnitten gleichmäfsig verteilen, Biegungs- und Scherspannungen nicht vorhanden sind, wollen wir hinfort als den jener Belastung entsprechenden „Grundzustand“ des Gewölbes bezeichnen.

Für die Formbestimmung eines Gewölbebogens als Druckliniengewölbe ist nur das Gesetz der Lastverteilung, nicht aber die Gröfse der Belastung an sich mafsgebend. Denkt man sich daher letztere bei gleichbleibendem Verteilungsgesetz allmählich gleich Null werdend, so verharrt das „starre“ Gewölbe im Grundzustande, die ununterbrochen gleichmäfsig über seine Querschnitte verteilten Normalspannungen werden gleichfalls allmählich gleich Null. Dieser Zustand, der auch bestehen würde, wenn das in Wirklichkeit elastische Gewölbe in völlig schliefsender aber spannungsloser Berührung aller seiner Teile unter sich und mit den Widerlagern noch auf dem Lehrgerüst ruht, wollen wir den „Spannungsnullzustand“ nennen. Er ist in Wirklichkeit nur für eine bestimmte Temperatur des Bogens, seine „Grundtemperatur“, denkbar.

Ob gegebenenfalls das Gewölbe als beiderseits eingespannter Bogen oder als Zwei- oder Dreigelenkbogen anzusehen ist, hängt davon ab, ob alle Gewölbequerschnitte, insbesondere alle im wesentlichen nur druck- nicht aber auch sicher zugfesten Fugen die ihnen im Gleichgewicht der äufseren und inneren Kräfte zufallenden exzentrischen Spannungswiderstände, bezw. neben einem zentrischen Spannungswiderstande noch ein Spannungsmoment von hinreichender Gröfse zu leisten vermögen. Ist dies der Fall, so ist das Gewölbe statisch als eingespannter Bogen anzusehen, und die Bestimmung der Mittellinie des Druckes für eine gegebene Belastung ist dann eine nach den Regeln unter VI zu lösende dreifach statisch unbestimmte Aufgabe. Die Lösung kommt auf die Bestimmung dreier Punkte der Druckmittellinie hinaus, welche letztere dann in bekannter Weise als Seillinie gezeichnet werden kann. (Vergl. Keck, Mechanik I, S. 129.)

Werden zwei Fugen, vielleicht die beiderseitigen Kämpferfugen, etwa durch Einlegung eines Gelenkes so gestaltet, dafs sie nur einen in der Gewölbemittellinie angreifenden, also im Fugenquerschnitt zentrisch wirkenden Widerstand zu leisten vermögen, so sind damit von vornherein zwei Punkte der Druckmittellinie festgelegt und die Bestimmung dieser selbst ist dann nur noch eine einfach statisch unbestimmte Aufgabe; das Gewölbe ist ein Zweigelenkbogen. Wird

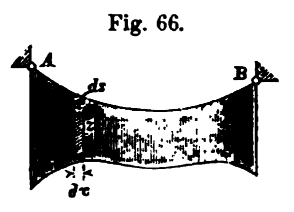
noch in einer dritten Fuge, etwa der Scheitelfuge, durch Einfügung eines Gelenkes die Mittellinie des Druckes von vornherein festgelegt, so läfst diese sich ohne weiteres zeichnen; der Gleichgewichtszustand des nun als Dreigelenkbogen geltenden Gewölbes ist statisch bestimmt. In allen drei Fällen würde bei dem für eine bestimmte Belastung als Druckliniengewölbe gestalteten, völlig starr gedachten Gewölbebogen in seinem „Grundzustande" unter der Wirkung jener Last die Druckmittellinie mit der Mittellinie des Gewölbes zusammenfallen, Biegungsmoment und Querkräfte im Gewölbe nicht entstehen. Bei dem als Dreigelenkbogen gestalteten Gewölbe, bei welchem die Druckmittellinie mit der Gewölbemittellinie für jede Belastung die drei Gelenkpunkte gemein hat, trennen beide sich für die „Grundbelastung" auch infolge der elastischen Nachgiebigkeit des Wölbmaterials und infolge von Temperaturschwankungen nicht merklich; auch geringe Nachgiebigkeit der Widerlager bleibt ohne erheblich störende Wirkung. Bei dem eingespannten Gewölbe dagegen treten jene störenden Einflüsse in vollem Umfange ein und in gewissem Grade auch bei dem, als Gewölbe übrigens kaum in Frage kommenden Zweigelenkbogen. Daraus ergibt sich für das als Dreigelenkbogen angeordnete Gewölbe ein gewisser Vorzug, der besonders bei verhältnismäfsig grofser ständiger Belastung und dort ausschlaggebend ins Gewicht fällt, wo mit einer vorab nicht sicher zu beurteilenden Nachgiebigkeit der Widerlager etwa infolge unsicheren Baugrundes gerechnet werden mufs. Demgegenüber gestalten sich andererseits die Spannungsverhältnisse in dem eingespannten Gewölbe vorteilhafter als im Dreigelenkbogengewölbe, wenn von der „Grundbelastung" stark abweichende bewegliche Belastung und wenig nachgiebige Widerlager in Frage kommen. Immer aber und namentlich wenn es sich um Gewölbe mit gröfseren Pfeilverhältnissen und dementsprechend grofser ständiger Belastung handelt, erscheint es statisch vorteilhaft, das Gewölbe als „Druckliniengewölbe", d. h. so zu gestalten, dafs für mittlere Belastung (ständige Last und halbe gleichmäfsig verteilte Verkehrslast), starr angenommene Widerlager und Gewölbe und konstante mittlere Temperatur, d. i. für den Grundzustand des Gewölbes die Druckmittellinie mit der Gewölbemittellinie zusammenfällt.

Es sollen nun zunächst für gegebene Lastverteilung die Gewölbemittellinie als Seil- oder Kettenlinie ermittelt werden.

b) Grundgleichung der Kettenlinie für lotrechte Belastung.

Eine völlig biegsam, aber unzerreiß-, undehnbar und gewichtslos angenommene Kette sei in zwei Punkten A und B (Fig. 66) festgehalten und nach irgend einem Verteilungsgesetz stetig belastet. Die Gleichgewichtsform der Kette ist dann allgemein eine Kettenlinie. Die Belastung der Kette schliefse auch ihr tatsächlich vorhandenes Gewicht mit ein und werde für die Längeneinheit ihres Grundrisses mit z bezeichnet,

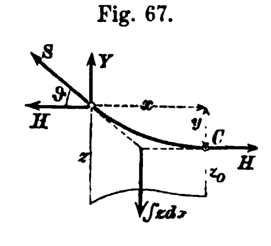
Fig. 66.



so daſs auf die Grundriſslänge dx eines Längenteilchens ds der Kette eine Last $z \cdot dx$ entfällt. Zur Darstellung der Belastung denken wir uns in jedem Punkte der Kettenlinie von dieser lotrecht abwärts die dort vorhandene Belastungshöhe z aufgetragen und nennen die so entstehende Linie die „Belastungslinie". Diese und die Kettenlinie stehen in ihrer Form in einer bestimmten Abhängigkeit voneinander.

Die in zwei Punkten der Kette herrschenden tangential zur Kettenlinie gerichteten Spannkräfte müssen sich in Bezug auf das zwischenliegende Kettenstück als äuſsere Kraft gedacht mit den das Stück ergreifenden Lasten das Gleichgewicht halten. Im tiefsten Punkte C der Kettenlinie, ihrem Scheitelpunkte, ist die Spannkraft wagerecht, sie werde mit H bezeichnet. Für die weitere Betrachtung beziehen wir die Kettenlinie auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz, dessen Anfangspunkt mit ihrem Scheitel C zusammenfällt. In einem Punkte mit den Koordinaten x und y herrsche die Spannkraft S. Denken wir uns nun das zwischen diesem Punkte und dem Scheitel C liegende Kettenstück mit dem zugehörigen Lastenteil $\int_0^x z \cdot dx$ durch zwei Schnitte abgetrennt und in den Schnitten die Spannkräfte H und S als äuſsere Kräfte angebracht, so muſs das Kettenstück unter der Wirkung dieser beiden Kräfte gegenüber dem Lastanteil im Gleichgewicht verharren (vergl. Fig. 67). Daraus folgt, daſs die wagerechte Seitenkraft von S gleich H und die lotrechte

Fig. 67.



$Y = \int_0^x z \cdot dx$ sein mufs; d. h. die wagerechte Spannkraft einer nur lotrechten belasteten Kette hat in allen Punkten gleiche Gröfse (H); die lotrechte Spannkraft in irgend einem Punkte ist gleich der Gesamtlast zwischen diesem Punkte und dem Scheitel der Kette.

Für den Neigungswinkel ϑ der Tangente an die Kettenlinie im Punkte x, y gilt die Gleichung

1) $$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dy}{dx} = \frac{Y}{H} = \frac{\int z \cdot dx}{H}.$$

Vergröfsert sich x um dx, so kommt zu der Last $\int_0^x z \cdot dx$ der Teil $z \cdot dx$ hinzu. Durch Differentiation entsteht daher

2) $$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{z}{H}.$$

Dies ist die allgemeine Grundgleichung der Kettenlinie mit lotrechter nach irgend einem Gesetz stetig verteilter Belastung. Für den Krümmungshalbmesser ϱ der Kettenlinie im Punkte x, y erhalten wir nach den Regeln der höheren Mathematik

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}.$$

Daraus folgt, weil $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta$ und mit Rücksicht auf Gl. 1:

3) $$\varrho = \frac{H}{z \cdot \cos^3 \vartheta}.$$

Für den Scheitel C sei der Krümmungshalbmesser der Kettenlinie r, die Belastungshöhe z_0, dann wird, weil dort $\vartheta = 0$ und $\cos \vartheta = 1$, $r = H : z_0$ oder

4) $$H = r z_0.$$

Die wagerechte Spannkraft H ist demnach gleich dem Krümmungshalbmesser im Scheitel mal der Belastungshöhe daselbst.

Bei überall gleicher Belastungshöhe $z = q$ wird aus

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{q}{H} \qquad \frac{d x}{d y} = \frac{q x}{H} + C \text{ und } C = 0$$

und weiter $y = \frac{q x^2}{2 H} + C_1$ und $C_1 = 0$, mithin ergibt sich die bekannte **parabolische Kettenlinie** $x^2 = 2 \frac{H}{q} y$ mit dem Parameter $H:q$.

c) Die gemeine Kettenlinie.

Unter dieser versteht man diejenige Kettenlinie, welche einer gleichmäfsig über die Bogenlänge derselben verteilten Belastung entspricht (Fig. 68). Es ist das die Gleichgewichtsform einer Kette oder eines biegsamen Seiles überall gleicher Dicke unter alleiniger Wirkung des eigenen Gewichtes.

Hat die Längeneinheit der Kette ein Gewicht q, so wiegt ein Bogenteilchen von der Länge ds $q\,ds$; mit Hülfe von z ausgedrückt, ist aber dieses Gewicht auch gleich $z\,dx$, so dafs $z\,dx = q\,ds$, also die Belastungshöhe an beliebiger Stelle

$$1) \qquad z = q \frac{ds}{dx} = q \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Für den Scheitel gilt (weil hier $ds = dx$) $z_0 = q$ und nach Gl. 3 (S. 167) $H = r q$, so dafs aus der Grundgleichung 1 (S. 167) wird

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{q}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{r} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Setzt man zur Abkürzung $dy:dx = v$, so dafs $d^2y:dx = dv$ wird, so entsteht

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{r} \sqrt{1 + v^2}.$$

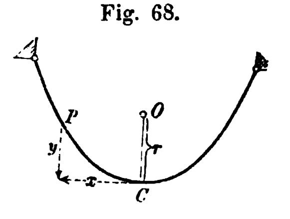


Fig. 68.

Wenn man nun alles, was v enthält, auf die linke Seite, dx auf die rechte Seite schafft, so lassen sich beide Seiten der Gleichung

$$\frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \frac{dx}{r}$$

integrieren, und es mufs

$$2) \qquad l\,(v + \sqrt{1 + v^2}) = \frac{x}{r} + C$$

sein, worin $C = 0$ wird, da für $x = 0$ auch $v = 0$. Behufs weiterer

Integration mufs letztere Gleichung nach v aufgelöst werden. Zur Beseitigung des Wurzelzeichens mufs man dafür sorgen, dafs der Wurzelausdruck auf der einen Seite der Gleichung allein steht, dann ist durch Quadrierung das Ziel erreicht. Es wird also zunächst

$$v + \sqrt{1 + v^2} = e^{\frac{x}{r}} \text{ und } \sqrt{1 + v^2} = e^{\frac{x}{r}} - v,$$

dann $$1 + v^2 = e^{\frac{2x}{r}} - 2ve^{\frac{x}{r}} + v^2, \text{ also } v = \frac{e^{\frac{2x}{r}} - 1}{2e^{\frac{x}{r}}} \text{ oder,}$$

wenn man die Division mit $e^{\frac{x}{r}}$ ausführt,

$$3) \qquad v = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{r}} - e^{-\frac{x}{r}}\right) = \frac{dy}{dx}.$$

Schreibt man dies

$$dy = \tfrac{1}{2} r\left[e^{\frac{x}{r}} d\left(\frac{x}{r}\right) + e^{-\frac{x}{r}} d\left(-\frac{x}{r}\right)\right], \text{ so wird}$$

$$y = \tfrac{1}{2} r\left(e^{\frac{x}{r}} + e^{-\frac{x}{r}} + C_1\right) \text{ und } C_1 = -2,$$

weil $x = 0$ auch $y = 0$ liefern mufs. Verschiebt man nun den Koordinaten-Anfang um den Krümmungshalbmesser r (für den Scheitel) nach unten (Fig. 69), so ist das bisherige y mit $y - r$ zu vertauschen, und es wird dann

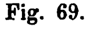


Fig. 69.

$$4) \qquad y = \tfrac{1}{2} r \left(e^{\frac{x}{r}} + e^{-\frac{x}{r}}\right)$$

die übliche Gleichung der gemeinen Kettenlinie.

Setzt man vorübergehend $e^{\frac{x}{r}} = w$, so kann Gl. 4 auch

$$2\frac{y}{r} = w + \frac{1}{w}$$

geschrieben und nach w aufgelöst werden; dann wird

$$w = e^{\frac{x}{r}} = \frac{y}{r} \pm \sqrt{\frac{y^2}{r^2} - 1}, \text{ also}$$

$$\frac{x}{r} = \mathrm{l}\left(\frac{y}{r} \pm \sqrt{\frac{y^2}{r^2} - 1}\right).$$

Es ist aber $\qquad \frac{y}{r} - \sqrt{\frac{y^2}{r^2} - 1} = \frac{1}{\frac{y}{r} + \sqrt{\frac{y^2}{r^2} - 1}}$,

so dafs man auch schreiben kann

$$5)\qquad \frac{x}{r} = \pm \,\mathrm{l}\left(\frac{y}{r} + \sqrt{\frac{y^2}{r^2} - 1}\right).$$

Die Belastungslinie, welche zur gemeinen Kettenlinie gehört, ergibt sich, wenn man in Gl. 1 den Wert für $dy:dx$ aus Gl. 3 einführt. Es wird

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{r}} - 2 + e^{-\frac{2x}{r}}\right)} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{r}} + e^{-\frac{x}{r}}\right),$$

wofür man mit Rücksicht auf Gl. 4 schreiben kann

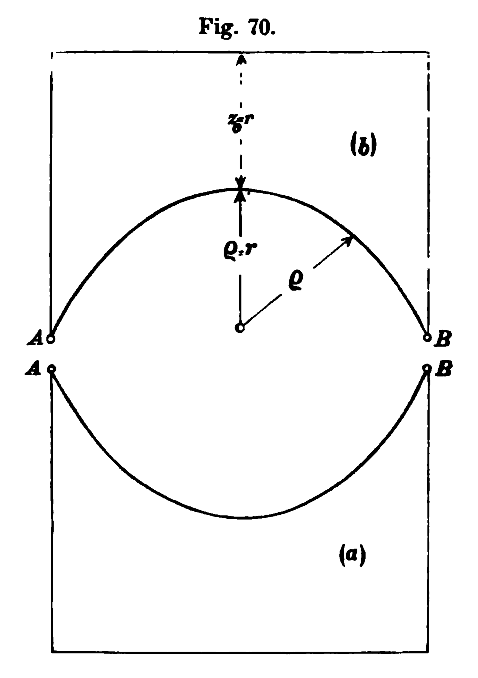
$$6)\qquad \frac{ds}{dx} = \frac{y}{r}. \quad \text{Also ist } z = q\,\frac{y}{r}$$

die Belastungshöhe. Trägt man q in solchem Mafsstabe auf, dafs es durch r dargestellt wird, so ergibt sich einfach

$$7)\qquad z = y,$$

d. h. die wagerechte Achse DX (Fig. 69) bildet die Belastungslinie.

Fig. 70.



Die gemeine Kettenlinie müfste danach auch entstehen, wenn die gewichtslos angenommene Kette mit einem homogenen, in sich völlig widerstandslos verschieblichen, etwa flüssigen Körper von solcher Form und Gröfse belastet würde, dafs derselbe oben durch eine nach der Kettenlinie gekrümmte Fläche, unten durch eine wagerechte Ebene und an den vier Seiten durch lotrechte Ebenen parallel, bezw. senkrecht zur Ebene der Kettenlinie begrenzt erscheint und im Scheitel eine Höhe $z_0 = r$ erhält. (Vergl. Fig. 70, a.)

Nach Eintritt der Gleichgewichtsform kann man sich die völlig biegsame Kette durch einen starren Stab und den flüssigen durch einen starren Belastungskörper, etwa Mauerwerk, ersetzt denken. In dem so belasteten Stabe würden dann nur gleichmäfsig über seinen Querschnitt verteilte Zugspannungen entstehen. Kehrt man den Stab mit seiner starren Belastung senkrecht nach oben (Fig. 70*b*), so treten an Stelle der Zugspannungen Druckspannungen. Der Stab kann demnach in dieser Lage durch einen Gewölbebogen ersetzt werden; seine Mittellinie ist jetzt die seiner Belastung entsprechende Druckmittellinie oder Drucklinie. Eine Ungenauigkeit bleibt allerdings in der angenommenen Gewichtslosigkeit der Kette, des Stabes oder des Gewölbebogens bestehen, die eine etwas von der durch Gl. 4 ausgedrückten Form abweichende Gleichgewichtsform bedingt.

Für die Spannkraft S der Kette an beliebiger Schnittstelle gilt, da (Fig. 67) $S\cos\vartheta = H$ oder $S = H : \cos\vartheta = H\,ds/dx$, nach Gl. 6 einfach

$$S = \frac{H}{r}\,y = q\,y \quad (\text{weil } H = q\,r). \tag{8}$$

Dieselbe Spannkraft würde auch allein durch das eigene Gewicht eines Kettenstückes von der Länge y entstehen, wenn dasselbe, bei P befestigt, lotrecht herabhinge. Diese Länge kann die Spannungslänge für den Punkt P genannt werden.

Hat man statt einer Kette einen biegsamen Riemen oder ein Seil, dessen Querschnitt F durch die Kraft S gleichmäfsig mit σ gespannt wird, und dessen Dichte γ ist, so ergibt sich, weil $\gamma F = q$,

$$\sigma = \frac{S}{F} = \frac{q}{F}\,y = \gamma\,y. \tag{9}$$

Die Spannung hat also am höchsten Punkte der Kette den gröfsten Wert.

Die Berechnung der Koordinaten einer gemeinen Kettenlinie kann durch die Benutzung einer Tabelle erleichtert werden. Setzt man nämlich $x/r = u$, so ist $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{r}} + e^{-\frac{x}{r}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{u} + e^{-u}\right)$, was wir zur Abkürzung $F(u)$ nennen wollen, nur von u abhängig und für angenommene Werte von u leicht tabellarisch zu berechnen. Es wird dann (nach Gl. 4) einfach

$$y = r\,F(u) \quad \text{und} \quad x = r\,u. \tag{10}$$

Die $F(u)$ wird der hyperbolische Cosinus von u genannt.

Tabelle der $F(u) = {}^1/_2 (e^u + e^{-u})$.

u	$F(u)$	$\frac{F(u)-1}{u}$	u	$F(u)$	$\frac{F(u)-1}{u}$	u	$F(u)$	$\frac{F(u)-1}{u}$
0,1	1,0050	0,0500	1,1	1,6685	0,6077	2,1	4,1443	1,4973
0,2	1,0201	0,1005	1,2	1,8107	0,6756	2,2	4,5679	1,6218
0,3	1,0453	0,1510	1,3	1,9709	0,7468	2,3	5,0372	1,7553
0,4	1,0811	0,2028	1,4	2,1509	0,8221	2,4	5,5569	1,8987
0,5	1,1276	0,2552	1,5	2,3524	0,9016	2,5	6,1323	2,0529
0,6	1,1855	0,3091	1,6	2,5775	0,9859	2,6	6,7690	2,2189
0,7	1,2552	0,3646	1,7	2,8283	1,0755	2,7	7,4735	2,3976
0,8	1,3374	0,4218	1,8	3,1075	1,1708	2,8	8,2527	2,5900
0,9	1,4331	0,4812	1,9	3,4177	1,2725	2,9	9,1146	2,7981
1,0	1,5431	0,5431	2,0	3,7622	1,3811	3,0	10,068	3,0226

Ist der Krümmungshalbmesser r für den Scheitel gegeben, so erhält man nach Gl. 10 die Koordinaten verschiedener Punkte der Kettenlinie durch einfache Multiplikation der Tabellenwerte u und $F(u)$ mit r.

Sind aber die Spannweite l und die Pfeilhöhe f gegeben, so ist r noch unbekannt. Für den Endpunkt A der Kettenlinie (Fig. 69) wird dann aber ${}^1/_2 l = r u_1$ und $f + r = r F(u_1)$, worin u_1 denjenigen Wert dieser Hülfsgröfse bedeutet, welcher dem Endpunkte A entspricht. Es folgt daraus

11) $$\frac{F(u_1) - 1}{u_1} = \frac{2f}{l} \text{ und } r = \frac{l}{2u_1}.$$

Beispiel: Ist $f = l = 1$ gegeben, so mufs für den Endpunkt

$$\frac{F(u_1) - 1}{u_1} = 2$$

sein. In der letzten Spalte der Tabelle erkennt man dann, dafs der entsprechende Wert von u_1 zwischen 2,4 und 2,5 liegt. Einfache Interpolation bestimmt ihn zu 2,47. Hiernach wird dann $r = \frac{l}{2u_1} = 0,20243$ Man kann nun leicht bis zu 24 Paare von Koordinaten berechnen, indem man die Zahlen der Tabelle für u und $F(u)$ mit 0,20243 multipliziert.

d) Kettenlinie für überall gleiche Anstrengung.

Bei der gemeinen Kettenlinie ergab sich die stärkste Anstrengung an den Befestigungspunkten (falls Kette oder Seil völlig gleichartig angeordnet sind). Will man die Anstrengung gleichmäfsig machen, so mufs in gleichem Verhältnisse mit der Spann-

kraft S auch der Querschnitt F, folglich auch das Gewicht q der Bogeneinheit zunehmen. Dadurch ändert sich dann die Belastungsart, mithin auch die Gleichgewichtsform.

Beziehen sich F_0 und q_0 auf den Scheitelpunkt, so wird

1) $$\frac{q}{q_0} = \frac{F}{F_0} = \frac{S}{H} = \frac{ds}{dx},$$

und weil wiederum $z = q\frac{ds}{dx}$, so wird jetzt

2) $$z = q_0\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{H}{r}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

Die Grundgleichung 1 (S. 167) liefert daher

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{1+v^2} = \frac{dx}{r},$$

wenn man wiederum $dy = v\,dx$ setzt. Die Integration führt zu

$$\operatorname{arc\,tg} v = \frac{x}{r} + C \text{ mit } C = 0$$

(da für $x = 0$ auch $v = 0$ sein muſs), oder

3) $$v = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\frac{x}{r} \quad \text{und} \quad dy = r\operatorname{tg}\frac{x}{r}\,d\left(\frac{x}{r}\right).$$

Wenn man diese Gleichung integriert, so ergibt sich

4) $$\frac{y}{r} = \mathfrak{l}\sec\frac{x}{r}.$$

(Die Konstante verschwindet wieder, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ werden soll.)

Die überall gleiche Anstrengung σ kann man aus den Verhältnissen des Scheitelpunktes leicht finden. Es wird

5) $$\sigma = \frac{H}{F_0} = \frac{rq_0}{F_0} = r\gamma.$$

Zur Berechnung der Koordinaten dieser Kettenlinie gleicher Anstrengung führt man zweckmäſsig wiederum eine Hülfsgröſse ein, u. zw. dies Mal den Neigungswinkel ϑ der Kurve in abgerundetem Gradmaſse, damit man $\operatorname{arc}\vartheta$ und $\cos\vartheta$ leicht finden und danach $\sec\vartheta$ und $\mathfrak{l}\sec\vartheta$ berechnen kann. Nach Gl. 3 ist nämlich $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\frac{x}{r}$, mithin $\frac{x}{r} = \operatorname{arc}\vartheta$ und $\frac{y}{r} = \mathfrak{l}\sec\vartheta$. Die Werte $x/_r$ und $y/_r$ sind einer Tabelle*) zu entnehmen.

*) Eine solche Tabelle findet sich in dem Buche von G. Hagen „Über Form und Stärke gewölbter Bögen“. 2. Aufl. Berlin 1874, S. 75.

Zeichnet man zu derselben Spannweite und Pfeilhöhe eine Parabel, eine gemeine Kettenlinie und eine Kettenlinie überall gleicher Anstrengung, so hat letztere den größten, die Parabel den kleinsten Scheitelhalbmesser r. Die Parabel liegt daher innerhalb, die Kettenlinie gleicher Anstrengung aber außerhalb der gemeinen Kettenlinie.

e) Belastungslinie der kreisförmigen Drucklinie.

Nach S. 166 besteht zwischen der Ketten- oder Drucklinie und der zugehörigen Belastungslinie eine Abhängigkeit derart, daß zu einer jeden Belastungslinie eine bestimmte Ketten- oder Drucklinie gehört und umgekehrt.

Um zu finden, welche Belastungslinie einer kreisförmigen Drucklinie vom Halbmesser r entspricht (Fig. 71), wendet man die Gl. 2 und 3 (S. 167) an. Es wird dann

$$r = \frac{H}{z \cdot \cos^3 \vartheta} = \frac{r \cdot z_0}{z \cdot \cos^3 \vartheta}, \quad \text{mithin}$$

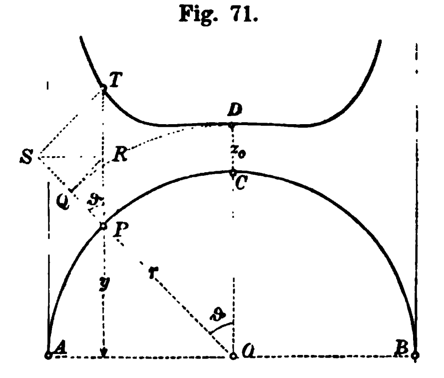
1) $$z = z_0 : \cos^3 \vartheta .$$

Hierin ist z_0 die Belastungshöhe im Scheitel, ϑ der Neigungswinkel der Drucklinie gegen die Wagerechte, oder der Winkel, den der beliebige Halbmesser OP mit der Lotrechten einschließt. Während ϑ von Null bis $\pi/2$ wächst, nimmt auch $\sec \vartheta$, also auch z fortwährend zu; $\vartheta = \pi/2$ gibt

$\cos \vartheta = 0$ und $z = \infty$.

Die Belastungslinie nähert sich daher asymptotisch den beiden lotrechten Tangenten an die halbkreisförmige Drucklinie.

Fig. 71.



Gl. 1 ist leicht zu konstruieren: Man trage auf einem Halbmesser OP das Stück $PQ = z_0$ ab, ziehe QR rechtwinklig zu PQ, dann ist $PR = z_0 : \cos \vartheta$, wird darauf RS wagerecht und ST wieder rechtwinklig zu PS gezogen, so muß

$$PS = PR : \cos \vartheta = z_0 : \cos^2 \vartheta \quad \text{und} \quad PT = z_0 : \cos^3 \vartheta ,$$

also T ein Punkt der Belastungslinie sein.

Die Gestalt der Belastungslinie ist verschieden je nach dem Verhältnisse $z_0 : r$ (Fig. 71). Bezeichnet nämlich y die Ordinate des Punktes P der Drucklinie, y_1 diejenige des Punktes T der Belastungslinie, so ist

$$y_1 = y + z = y + z_0 \sec^3 \vartheta = y + z_0 \frac{r^3}{y^3}.$$

Dann wird $\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{3 z_0 r^3}{y^4} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\left(1 - \frac{3 z_0 r^3}{y^4}\right)$ und

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \left(1 - \frac{3 z_0 r^3}{y^4}\right) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{12 z_0 r^3}{y^5} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

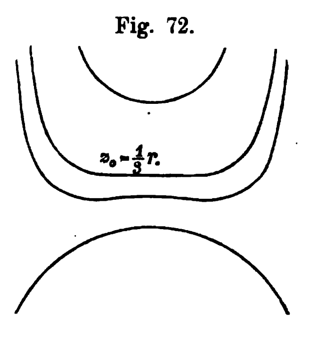
Für den Scheitel wird

$$x = 0, \quad y = r, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{r}, \qquad \text{daher}$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\left(1 - \frac{3 z_0}{r}\right) \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\left(\frac{3 z_0}{r} - 1\right).$$

Ist nun die Belastungshöhe im Scheitel $z_0 < {}^1/_3\, r$, so wird $\frac{d^2 y_1}{dx^2} < 0$; die Belastungslinie kehrt daher bei D (ebenso wie die Drucklinie bei C) die konvexe Seite nach oben, entfernt sich zuerst nur langsam vom Kreise, hat dann (auf jeder Seite) einen Wendepunkt und steigt nun erst kräftig nach oben. Bei $z_0 > {}^1/_3\, r$ kehrt die Belastungslinie schon im Scheitel die konvexe Seite nach unten, beginnt also schon hier zu steigen und setzt dies ununterbrochen fort; Wendepunkte sind nicht vorhanden. Im Grenzfalle $z_0 = {}^1/_3\, r$ (Fig. 72) fallen die beiden Wendepunkte des ersten Falles im Scheitel zu einem einzigen zusammen; die Krümmung ist hier Null, und die Belastungslinie entfernt sich nur sehr langsam von einer wagerechten Geraden, geht dann aber aufwärts.*)

Fig. 72.



*) J. W. Schwedler, Theorie der Stützlinie; Zeitschrift für Bauwesen 1859, S. 113.

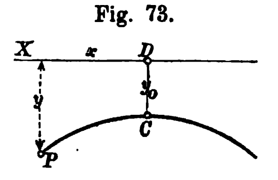
f) Hagen'sche Drucklinie für wagerechte Belastungslinie.

Nach den Ausführungen unter VII c kann die gemeine Kettenlinie annähernd als Mittellinie eines Druckliniengewölbes für eine in bestimmter Höhe $z_0 = r$ über dem Scheitel liegende Belastungslinie angesehen werden. Die Höhe z_0 wie der Krümmungshalbmesser r im Scheitel sind durch die Spannweite und Pfeilhöhe der Kettenlinie mitbestimmt.

Die Aufgabe, für eine **beliebige** wagerechte Belastungslinie eine Drucklinie als Gewölbemittellinie von gegebener Spannweite und Pfeilhöhe zu finden, ist zuerst von Hagen gelöst.

Die gegebene wagerechte Belastungslinie werde zur Achse DX gewählt; CP (Fig. 73) sei die entsprechende Drucklinie, deren Gleichung entwickelt werden soll. Wegen dieser Wahl des Achsenkreuzes werden die Belastungshöhen z_0 und z gleich den Ordinaten y_0 und y der Drucklinie, so daſs die Grundgleichung (S. 167) für diesen Fall lautet

Fig. 73.



1) $$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y}{H} = \frac{y}{r y_0}.$$

Multipliziert man auf beiden Seiten mit $2\,dy$, so kann man schreiben

$$2 \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx} = \frac{2 y\, dy}{r y_0}$$ und beiderseits integrieren.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2}{r y_0} + C.$$

Damit für den Scheitel $y = y_0$ und $\frac{dy}{dx} = 0$ werde, muſs $C = -\frac{y_0^2}{r y_0}$ sein, daher

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{y^2 - y_0^2}}{\sqrt{r y_0}}.$$

Trennt man nun die Veränderlichen (bringt y und dy nach links, dx nach rechts), so ergibt sich

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - y_0^2}} = \pm \frac{dx}{\sqrt{r y_0}}$$

und nach Integration

$$\mathrm{l}\left(\frac{y+\sqrt{y^2-y_0^2}}{y_0}\right)=\pm\frac{x}{\sqrt{r y_0}}+C_1,$$

worin $C_1=0$ wird, so dafs die Gleichung der Drucklinie lautet

2) $$x=\pm\sqrt{r y_0}\,\mathrm{l}\,\frac{y+\sqrt{y^2-y_0^2}}{x_0}.$$

Durch denselben Rechnungsgang, der auf S. 169 von Gl. 2 zu Gl. 3 führte, kann man auch vorstehende Gleichung nach y auflösen:

3) $$y=\frac{y_0}{2}\left(e^{\frac{x}{\sqrt{r y_0}}}+e^{-\frac{x}{\sqrt{r y_0}}}\right).$$

Die Linie, welche durch die Gl. 2 und 3 bestimmt ist, wurde von G. Hagen (Berlin) im Jahre 1844 für die Gestaltung von Brückengewölben empfohlen.

Ist die Belastungshöhe im Scheitel gleich dem Krümmungshalbmesser daselbst, d. h. $y_0=r$, so wird aus Gl. 3 die Gleichung der gemeinen Kettenlinie. (Auf S. 170 wurde ja auch schon gezeigt, dafs die Belastungskurve der gemeinen Kettenlinie eine Gerade wird für $z_0=q=r$.)

Sind r und y_0 gegeben, so ist die Hagen'sche Drucklinie völlig bestimmt.

Für $y_0>{}^1/_3 r$ hat die Kurve im Scheitel den kleinsten Krümmungshalbmesser, und es nimmt die Krümmung von hier aus fortwährend ab; denn sollte sich der Krümmungshalbmesser nicht ändern, sollte die Drucklinie kreisförmig sein, so müfste nach S. 175 für $y_0>{}^1/_3 r$ die Belastungskurve von der Mitte aus ansteigen; da hier aber dies Ansteigen nicht stattfindet, also z kleiner ist als für kreisförmige Drucklinie, so mufs sich ρ vergröfsern, weil nach Gl. 3, S. 167 ρ sich mit z in umgekehrtem Verhältnisse ändert.

Für $y_0<\frac{1}{3}r$ liegt die Belastungskurve für kreisförmige Drucklinie in der Nähe der Mitte unterhalb der Wagerechten durch den Scheitel der Belastungskurve und erhebt sich erst in einem gewissen Abstande über diese Wagerechte. Daraus kann man folgern, dafs die Hagen'sche Drucklinie für $y_0<{}^1/_3 r$ von der Mitte aus erst eine Zunahme, dann aber eine fortwährende Abnahme der Krümmung zeigen wird.

Für $y_0={}^1/_3 r$ findet von der Mitte aus eine Zunahme der Krümmung nicht statt, die Abnahme aber langsamer als für $y_0>{}^1/_3 r$, so dafs der mittlere Teil sich von einem Kreise nur wenig unterscheidet.

Wird $y_0:r$ gröfser und gröfser, rückt also die Belastungslinie immer weiter in die Höhe, so ist die Veränderlichkeit der Belastungshöhe y nur gering im Verhältnisse zu y_0. Im Grenzfalle, für $y_0:r=\infty$, kann daher die Belastungshöhe z als überall gleich angesehen werden, und die Drucklinie mufs

dann eine Parabel sein. Damit nun obige Gl. 3 in die Parabel-Gleichung übergehe, mufs man zunächst den Koordinaten-Anfang von D (Fig 73) nach dem Scheitel C der Drucklinie verlegen, weil sonst die Ordinaten unendlich grofs werden würden. Es ist also y mit $y+y_0$ zu vertauschen, so dafs

$$y=\frac{y_0}{2}\left(e^{\frac{x}{\sqrt{ry_0}}}+e^{-\frac{x}{\sqrt{ry_0}}}-2\right)$$

entsteht. Für $y_0=\infty$ nimmt dies zunächst die unbestimmte Form $\infty\cdot 0$ an. Setzt man aber vorübergehend

$$y_0=\frac{1}{u^2},\quad \frac{x}{\sqrt{r}}=a,\qquad \text{so wird}$$

$$2y=\frac{e^{au}+e^{-au}-2}{u^2}.$$

Bildet man nun von Zähler und Nenner die Abgeleiteten nach u, so ergibt sich nach zweimaliger Ausführung dieses Verfahrens:

$$2y=\left[\frac{a e^{au}-a e^{-au}}{2u}\right]_{u=0}=\frac{0}{0}=\left[\frac{a^2e^{au}+a^2e^{-au}}{2}\right]_{u=0}=a^2,\quad \text{also}$$

4) $$2y=\frac{x^2}{r}\quad \text{oder}\quad x^2=2ry.$$

Man kann dies Ergebnis auch in anderer Weise, nämlich durch Benutzung der Reihe für e^{au}, erhalten:

$$e^{au}=1+au+\frac{a^2u^2}{2}+\frac{a^3u^3}{3!}++\ldots.$$

$$e^{-au}=1-au+\frac{a^2u^2}{2}-\frac{a^3u^3}{3!}+-\ldots.\quad \text{daher}$$

$$e^{au}+e^{-au}-2=2\left(\frac{a^2u^2}{2}+\frac{a^4u^4}{4!}+\ldots.\right)\quad \text{und}$$

$$2y=a^2+2\left(\frac{a^4u^2}{4!}+\frac{a^6u^4}{6!}+\ldots\right),\ \text{also für } u=0:$$

$$2y=a^2=\frac{x^2}{r}.$$

Zur Berechnung der Koordinaten der Hagen'schen Drucklinie setze man $\frac{x}{\sqrt{ry_0}}=u$, so dafs Gl. 3 (S. 177) wird $y=\frac{y_0}{2}(e^u+e^{-u})$.

Man kann nun die Tabelle auf S. 172 für $F(u)=\frac{1}{2}(e^u+e^{-u})$ verwenden und daraus

5) $$x=u\sqrt{ry_0},\quad y=y_0F(u)$$

berechnen.*)

*) Dr. H. Zimmermann, Über Seilkurven; Zentralblatt der Bauverwaltung 1883, S. 231.

Ist die Belastungshöhe y_0 im Scheitelpunkt gegeben, statt r aber Spannweite l und Pfeilhöhe f, so mufs für den Endpunkt der Drucklinie gelten

$$\tfrac{1}{2} l = u_1 \sqrt{r y_0} \quad \text{und} \quad f + y_0 = y_0 F(u_1)\,.$$

Letztere Gleichung gibt

$$F(u_1) = 1 + \frac{f}{y_0}\,; \tag{6}$$

aus der Tabelle kann man zu diesem Funktionswerte den entsprechenden Wert von u_1 durch Interpolation finden und hat dann

$$\sqrt{r y_0} = \frac{l}{2 u_1}\,. \tag{7}$$

Beispiel: Für $l = 10$ m, $f = 3\tfrac{1}{3}$ m und $y_0 = 1{,}9$ m wird nach Gl. 6

$$F(u_1) = 1 + \frac{3{,}333}{1{,}9} = 2{,}7544\,.$$

Nach der Tabelle auf S. 172 liegt das entsprechende u_1 zwischen 1,6 und 1,7 und bestimmt sich durch Interpolation zu 1,67. Nach Gl. 7 wird dann

$$\sqrt{r y_0} = \frac{5}{1{,}67} = 2{,}994 \text{ m},$$

$$r y_0 = 8{,}964 \text{ qm und } r = 4{,}72 \text{ m}\,.$$

Man erhält nun die Koordinaten x und y der Drucklinie, wenn man in der Tabelle (S. 172) die Werte u mit 2,994, die Werte $F(u)$ mit 1,9 multipliziert. Nimmt man nur $u = 0$, 0,2, 0,4 usf., so erhält man

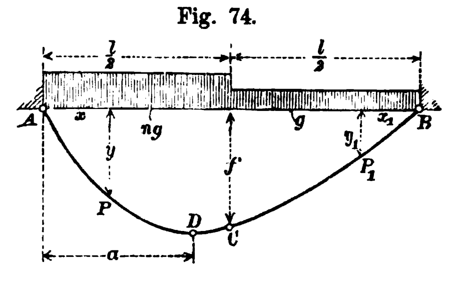
$x = 0$	0,60	1,20	1,80	2,40	2,99	3,59	4,19	4,79	5,00
$y = 1{,}9$	1,94	2,05	2,25	2,54	2,93	3,44	4,09	4,90	5,23.

Durch Auftragen dieser Koordinaten ergeben sich die Kurvenpunkte, die man dann leicht durch einige Kreisbögen verbinden kann. Weil in diesem Falle $\frac{y_0}{r}$ etwa 0,45, also etwas mehr als $\frac{1}{3}$ beträgt, so nimmt (nach S. 177) die Krümmung der Drucklinie vom Scheitel aus fortwährend ab, jedoch anfangs nur langsam.

g) Ketten- und Drucklinien für unsymmetrische Belastung.

Eine in 2 Punkten A und B gleicher Höhenlage befestigte Kette (Fig. 74) sei über die rechtsseitige Hälfte der Spannweite l gleichmäfsig mit g für die Längeneinheit des Grundrisses, über die linksseitige Hälfte aber ebenso mit $n\,g$ belastet. Dann werden die beiden Teile AC und BC der Kettenlinie Parabeln mit lotrechter Achse sein (s. S. 168), jedoch wegen der verschiedenen Belastung von verschiedenem Parameter. Im Punkte C, welcher um f unter

Fig. 74.



AB liegen möge, schliefsen sie sich mit gemeinschaftlicher Tangente einander an; denn bei endlicher Belastungshöhe z bleibt auch $d^2y:dx^2$ endlich, so dafs $dy:dx$ sich nur stetig ändern kann.

Bezieht man die Linie AC auf den Anfangspunkt A, BC aber auf B, so wird zunächst für einen Punkt P der AC (nach S. 167):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{ng}{H}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{ng}{H}x + C; \quad y = -\frac{ng}{2H}x^2 + Cx.$$

(Das negative Zeichen rührt daher, dafs die Kettenlinie der X-Achse die konkave Seite zukehrt.) Bei der zweiten Integration ist die Konstante Null.

Für einen Punkt P_1 der BC ist ebenso

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = -\frac{g}{H}; \quad \frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{g}{H}x_1 + C_1; \quad y_1 = -\frac{g}{2H}x_1^2 + C_1 x.$$

Für den Punkt C, d. h. für $x = x_1 = \frac{l}{2}$ ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{dy_1}{dx_1}$ und $y = y_1$.

Das liefert die Gleichungen

$$-\frac{ng}{2H}l + C = \frac{g}{2H}l - C_1 \quad \text{und}$$

$$-\frac{ng}{8H}l^2 + C\frac{l}{2} = -\frac{g}{8H}l^2 + C_1\frac{l}{2}, \quad \text{welche}$$

$$C = \frac{gl}{8H}(1+3n) \text{ und } C_1 = \frac{gl}{8H}(3+n) \quad \text{ergeben.}$$

Hiernach wird die Gleichung für AC:

1) $$y = \frac{gl}{8H}(1+3n)x - \frac{ng}{2H}x^2$$

und diejenige für BC:

2) $$y_1 = \frac{gl}{8H}(3+n)x_1 - \frac{g}{2H}x_1^2.$$

Beide Gleichungen geben für die Ordinate des Punktes C:

3) $$f = \frac{gl^2}{16H}(n+1).$$

AC ist eine Parabel vom Parameter $\frac{H}{ng}$, deren Scheitel D einen wagerechten Abstand

4) $$a = \frac{l}{8}\left(\frac{1}{n} + 3\right)$$

von A hat. Die Parabel BC hat den Parameter $\frac{H}{g}$, und der

Scheitel, der über C hinaus nach links verlängerten Kurve ist von B um

5) $$a_1 = {}^1/_8\, l(3+n)$$

in wagerechtem Sinne entfernt.

Für gleiche Werte von x und x_1 ist das arithmetische Mittel aus y und y_1:

$$\frac{y+y_1}{2} = \frac{g(1+n)}{4H}\, x(l-x).$$

Verteilt man aber die Gesamtlast ${}^1/_2\, g\, l(1+n)$ gleichmäfsig über die ganze Spannweite, so entsteht bei gleicher Kraft H die parabolische Kettenlinie

$$y_0 = \frac{g(1+n)}{4H}\, x(l-x),$$

so dafs dieses y_0 gleich dem obigen Mittel ${}^1/_2(y+y_1)$ ist.

Wenn man also, von symmetrischer Belastung ausgehend, die eine Hälfte entlastet, die andere in gleichem Mafse mehr belastet und dabei H unverändert erhält, so hebt sich auf der einen Seite die Kettenlinie um ebensoviel, wie sie sich an der entsprechend liegenden Stelle der anderen Seite senkt. Die lotrechte Verschiebung beträgt

6) $$\frac{y-y_1}{2} = \frac{g(n-1)}{4H}\, x\left(\frac{l}{2}-x\right),$$

sie ist am gröfsten für $x = {}^1/_4\, l$, nämlich $\frac{g\,l^2}{64\,H}(n-1)$.

Auf der Seite der schwereren Last hat die Parabel den kleineren Parameter, also die stärkste Krümmung.

Beispiel: Ist die Last der linken Seite doppelt so grofs wie die der rechten, d. h. $n=2$, so wird

$$y = \frac{7}{8}\frac{gl}{H}x - \frac{g}{H}x^2;\quad a = \frac{7}{16}l;\quad \text{der Parameter} = \frac{H}{2g};$$

$$y_1 = \frac{5}{8}\frac{gl}{H}x_1 - \frac{g}{2H}x_1^2;\quad a_1 = \frac{5}{8}l;\quad \text{der Parameter} = \frac{H}{g}.$$

Die gröfste lotrechte Verschiebung (im Sinne der Gl. 6) wird $\frac{g\,l^2}{64\,H}$. Der Punkt C hat die Ordinate $f = \frac{3}{16}\frac{g\,l^2}{H}$, woraus man bei gegebenem f die Kraft H berechnen kann.

Ist bei gleichmäfsiger Belastung g der ganzen Länge des Grundrisses eine beliebig liegende Einzellast P vorhanden, so mufs die Kettenlinie in dem Angriffspunkte dieser Last einen Knick bilden. Es kommt nämlich an dieser Stelle auf ein Längenteilchen dx die endliche Last P, so dafs hier $z = P:dx = \infty$, mithin die Änderung von $dy:dx$ unstetig wird. Sind die Spannkräfte unmittelbar links und rechts von der Last S und S_1 mit den Neigungswinkeln α und α_1, so mufs

Fig. 75.

$$S \sin \alpha - S_1 \sin \alpha_1 = P,$$

oder, weil $S \cos \alpha = S_1 \cos \alpha_1 = H$,

$$H(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha_1) = P \quad \text{sein.} \tag{7}$$

Bezieht man wieder das Kurvenstück AE auf A, das Stück BE auf B als Anfangspunkt, so wird für AE:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{g}{H}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{g}{H}x + C; \quad y = -\frac{g}{2H}x^2 + Cx;$$

für BE:

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = -\frac{g}{H}; \quad \frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{g}{H}x_1 + C_1; \quad y_1 = -\frac{g}{2H}x_1^2 + C_1 x_1.$$

Zur Bestimmung von C und C_1 dienen die Bedingung in Gl. 7, sowie der Umstand, dafs der Punkt E mit der Ordinate v beiden Linien gemeinsam ist. Die erste Bedingung lautet (da für $x = u$ $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$; für $x_1 = l - u$ $\frac{dy_1}{dx_1} = -\operatorname{tg} \alpha_1$):

$$-\frac{g}{H}u + C - \frac{g}{H}(l - u) + C_1 = \frac{P}{H};$$

die zweite (da für $x = u$ $y = v$, für $x_1 = l - u$ $y_1 = v$):

$$-\frac{g}{2H}u^2 + Cu = -\frac{g}{2H}(l - u)^2 + C_1(l - u).$$

Hieraus erhält man

$$C = \frac{P}{H}\frac{l - u}{l} + \frac{gl}{2H}; \quad C_1 = \frac{P}{H}\frac{u}{l} + \frac{gl}{2H},$$

so daſs die Gleichungen für AE und BE nun werden:

8) $$y=\left(\frac{P}{H}\frac{l-u}{l}+\frac{gl}{2H}\right)x-\frac{g}{2H}x^2 \quad \text{und}$$

9) $$y_1=\left(\frac{P}{H}\frac{u}{l}+\frac{gl}{2H}\right)x_1-\frac{g}{2H}x_1^2.$$

Für $x={}^1/_2\,l$ gibt Gleichung 9 als Ordinate des Punktes C:

10) $$f=\frac{1}{H}\left(\frac{Pu}{2}+\frac{gl^2}{8}\right),$$

woraus sich bei gegebenem f die Kraft H berechnen läſst.

AE ist eine Parabel vom Parameter $H:g$; bei entsprechender Fortsetzung über E hinaus würde ihr Scheitel in dem wagerechten Abstande

11) $$a=\frac{l}{2}+\frac{P}{gl}(l-u)$$

von A liegen. BE hat den gleichen Parameter, und ihr Scheitel D hat die Abscisse

12) $$a_1=\frac{l}{2}+\frac{P}{gl}u.$$

h) Ermittelung der wirklichen Drucklinie eines Gewölbes mit lotrechter Belastung.

Die Spannungsverhältnisse in einem Gewölbe lassen sich am übersichtlichsten und zutreffendsten mit Hülfe der seiner Belastung entsprechenden wirklichen Drucklinie beurteilen. Sie gestalten sich naturgemäſs um so günstiger, je enger sich die Drucklinie der Bogenmittellinie anschlieſst. Ein völliges Zusammenfallen beider ist aus den unter a dargelegten Gründen selbst bei einem für eine gegebene Belastung als Druckliniengewölbe geformten eingespannten Gewölbebogen ausgeschlossen und die Abweichung beider voneinander fällt, abgesehen von den störenden Einflüssen durch Temperaturschwankungen und Nachgiebigkeit der Widerlager, welche beide hier auſser acht bleiben sollen, um so gröſser aus, je mehr bei etwa in Frage kommender veränderlicher Belastung die jeweilige Lastverteilung von der der Formbestimmung zu Grunde gelegten abweicht. Naturgemäſs ist die sich am weitesten von der Gewölbemittellinie entfernende ungünstigste Drucklinie für die Beurteilung

der Stand- und Tragsicherheit des Gewölbes mafsgebend. Ihre Bestimmung ist daher die erste und wichtigste Aufgabe für die statische Untersuchung eines Gewölbes. Will man ein allmähliches Öffnen der meist wenig zugfesten Fugen sicher vermeiden, so darf die ungünstigste Drucklinie an keiner Stelle den Kern des Gewölbequerschnittes verlassen.

Die Drucklinie eines Gewölbes für irgend eine Belastung kann stets als Seillinie zu dieser gezeichnet werden, sobald die erforderlichen drei Bestimmungsstücke, d. i. beispielsweise drei Punkte derselben oder ein Punkt und ein Pol der Seillinie im Krafteck gegeben oder bestimmt worden sind. Handelt es sich um ein als Dreigelenkbogen angeordnetes Gewölbe, so kann die Drucklinie durch die drei Achspunkte der Gelenke ohne weiteres in bekannter Weise gezeichnet werden.

Kommt ein beiderseits eingespanntes Gewölbe in Frage, so kann man für eine beliebige Bogenform mit Hülfe des unter VI entwickelten graphisch-rechnerischen Verfahrens, oder für flach parabolische Bogenform unter Benutzung der analytischen Annäherungsregeln S. 144 Gl. 20—22 die statisch unbestimmten Stützwerte H, A und M_a oder den ihnen gleichwertigen Gesamtstützwiderstand W_a in einer der Widerlagsfugen ermitteln. Durch Richtung und Gröfse des letzteren ist denn auch der entsprechende äufsere Polstrahl und damit der Pol im Krafteck bekannt und durch den Angriffspuukt von W_a kann die Drucklinie gezeichnet werden.

Die Ermittelung von H, A und M_a gestaltet sich in ihrem allgemeinen Gange wie folgt: Nach Zeichnung der Seillinien I bis V (Fig. 56) werden mit Hülfe der Gl. 16—18 S. 142 die Einflufslinien für H, A und M_a bestimmt, wozu bei flach parabolischen Bogenformen auch die Gl. 20—22 S. 144 benutzt werden können. η_H, η_A und η_{M_a} seien die Einflufsordinaten der statisch unbestimmten Stützwerte und das Belastungsgesetz des Gewölbes sei durch die Gleichung $z = f(x)$ oder durch die innere Leibungslinie des Gewölbes und seine obere Belastungslinie gegeben. Auf ein Bogenelement von der Grundrifslänge dx entfällt dann eine Last $z \cdot dx = f(x) dx$ und diese liefert zu den Stützwerten die Beiträge

$$dH = \eta_H \cdot z \cdot dx, \quad dA = \eta_A \cdot z \cdot dx \text{ und } dM_a = \eta_{M_a} \cdot z \cdot dx.$$

Im ganzen entstehen die Stützwerte

$$H = \int_0^l \eta_H \cdot z \cdot dx, \quad A = \int_0^l \eta_A \cdot z \cdot dx \quad \text{und} \quad M_a = \int_0^l \eta_{M_a} \cdot z \cdot dx.$$

Die Einflufsordinaten η_H, η_A und η_{M_a} kann man als unbenannte Verhältniszahlen ansehen, während die Belastungshöhen z Längen sind. Die vorstehenden Integralwerte drücken daher Flächen aus, welche aus den Einflufsflächen oder aus der Belastungsfläche entstehen, wenn man die Ordinaten der ersteren mit denen der letzteren, oder umgekehrt, multipliziert. Das kann in der Form $\frac{z \cdot \eta}{1}$ leicht auch auf dem Wege geometrischer Konstruktion geschehen.

Die Inhaltsbestimmung der entstehenden Flächen (graphische Integration) würde mit Hülfe des Planimeters, der Simpson'schen Regel, des Summenecks*) usw. erfolgen können.

In der hier angedeuteten Weise kann für ein Gewölbe von beliebiger Form und beliebiger lotrechter Belastungsart die wirkliche Drucklinie mit einer für die Anwendung hinreichenden Genauigkeit ermittelt werden. Das Verfahren ist indes umständlich und in den zahlreichen Fällen der Anwendung, in denen es sich um Gewölbe von kleinerem Pfeilverhältnis handelt, kann man folgenden einfacheren Weg einschlagen:

Kommt ein Gewölbe mit unveränderlicher Belastung in Frage und ist es als Druckliniengewölbe für diese Belastung geformt, so kommt es nur darauf an, die Strecken t_a, t_b und c zu ermitteln, um welche die wirkliche Drucklinie infolge der elastischen Verkürzung der Bogenmittellinie sich gegen diese in den Kämpferlotrechten senkt bezw. im Scheitel hebt. Für gleichmäfsig verteilte Belastung eines symmetrischen Druckliniengewölbes in seiner wagerechten Projektion ist dessen Mittellinie eine Parabel und bei überall gleicher Wölbstärke liegt nach Gl. 6 S. 155 und Gl. 16 S. 152 der Druckmittelpunkt in der Scheitelfuge um

$$1) \qquad c = f \frac{\xi}{3}$$

über, in den Kämpferlotrechten um das doppelte Mafs

$$2) \qquad t_a = t_b = \frac{2}{3} \cdot f \cdot \xi$$

*) Vergl. Mügge, Beiträge zur zeichnerischen Lösung technischer Rechnungsaufgaben. Hannover 1906.

unter der Bogenmittellinie, Symmetrie vorausgesetzt, womit drei Punkte der wirklichen Drucklinie und diese selbst bekannt ist. Ist d die überall gleiche Stärke, so ist $J = \frac{1}{12} d^2 \cdot 1$, also

$$\xi = \frac{45}{4} \cdot \frac{d^2}{12 \cdot f^2} = \frac{15}{16} \cdot \frac{d^2}{f^2},$$

wofür man rund setzen kann

$$\xi = \frac{d^2}{f^2}. \tag{3}$$

Dann wird nach Gl. 1 und 2

$$c = \frac{1}{3} \frac{d^2}{f} \tag{4}$$

$$t_a = t_b = \frac{2}{3} \cdot \frac{d^2}{f}. \tag{5}$$

Bei veränderlicher Gewölbestärke ist für d die mittlere Stärke einzufügen.

Weicht bei einem Druckliniengewölbe von nicht zu großer Pfeilhöhe die Mittellinie nicht zu sehr von einer Parabel ab, so kann man, auch wenn die Belastungsart, für welche die Form des Gewölbes als Druckliniengewölbe ermittelt war, keine gleichmäßig verteilte ist, die Verschiebung der wirklichen Drucklinie gegen die Mittellinie mit praktisch hinreichender Genauigkeit nach den Gleichungen 4 und 5 ermitteln.

Kommt neben der der Formbestimmung des Gewölbes als Druckliniengewölbe zu Grunde gelegten Belastung noch bewegliche Last vor, für deren ungünstigste Stellung die Drucklinie zu ermitteln ist, oder handelt es sich überhaupt nicht um ein Druckliniengewölbe für einen wirklich eintretenden Belastungszustand, sondern um ein beliebiges und beliebig belastetes Gewölbe, so fällt auch in dem starr angenommenen Gewölbe die Drucklinie nicht mit der Gewölbemittellinie zusammen und der vorbezeichnete Weg zur Ermittelung der wirklichen Drucklinie ist dann nicht ohne weiteres gangbar. Man kann dann zwar immer auf dem S. 184/85 angedeuteten Wege zum Ziele gelangen; einfacher aber und in den zahlreichen Fällen der Anwendung, in denen es sich um Gewölbe von nicht zu großen Pfeilhöhen handelt, genau genug, gestaltet sich die Lösung der Aufgabe unter Benutzung eines von Dr. Winkler

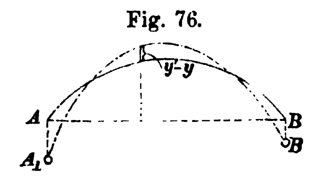
bewiesenen Satzes über die Lage der Drucklinie in einem starr angenommenen Gewölbe.*)

Nach Winkler gilt, wenn man die Verkürzung der Gewölbemittellinie durch die Normalkraft N aufser Acht läfst und den Gewölbequerschnitt als konstant annimmt, der Satz:

Von allen in einem Gewölbe von gegebener Belastungsart statisch möglichen Drucklinien ist diejenige die wirklich richtige, welche sich der Mittellinie des Gewölbes durchschnittlich am meisten nähert. Hierin ist das Wort „durchschnittlich" im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate zu verstehen und der Begriff statisch mögliche Drucklinie wie folgt zu deuten: Durch die Spannungs- oder Druckmittelpunkte in drei Gewölbequerschnitten, etwa in den beiden Widerlagsfugen und in der Scheitelfuge, ist die der herrschenden Belastungsart entsprechende wirkliche Drucklinie festgelegt. Denkt man sich jene drei Fugen je etwa durch Einfügung eines Gelenkes an beliebiger Stelle innerhalb der Fuge so gestaltet, dafs der Druckmittelpunkt an diese Stelle zu liegen kommt, der Druckübergang hier erfolgen mufs, so erscheint dadurch die Drucklinie willkürlich festgelegt, sie wird dadurch in eine bestimmte Form und Lage gezwängt und kann darin leicht gezeichnet werden. Jede derart durch drei beliebige Punkte etwa in den beiden Widerlagsfugen und in der Scheitelfuge zu der gegebenen Belastung gezeichnete Drucklinie ist also eine „statisch mögliche".

Der Beweis dieses Satzes wird am besten indirekt geführt: wir nehmen den Satz als richtig an und beweisen, dafs seine Anwendung allgemein zu einer bereits bekannten Wahrheit führt. AB sei die Mittellinie des Bogens mit den Koordinaten x und y, A_1B_1 die Drucklinie desselben mit den Koordinaten x und y'. Dann ist der lotrechte Abstand beider $y'-y$; soll also die Summe der Quadrate der Abweichungen möglichst klein sein, so kann dies geschrieben werden:

Fig. 76.



1) $$\int (y'-y)^2 ds = S \quad \text{ein Minimum.}$$

*) Dr. E. Winkler, Beiträge zur Theorie der Bogenträger; Zeitschrift des Architekten- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1879 S. 210.

Aus der Grundgleichung der Drucklinien $\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{z}{H}$ ergibt sich nun durch zweimalige Integration

$$2) \qquad y' = \frac{f(x)}{H} + A x + B.$$

Die Gleichung umfaſst alle in dem gegebenen Belastungsfalle statisch möglichen Drucklinien. Das Glied $f(x)$ ist nur von der gegebenen Belastungsart abhängig, daher ein bestimmter Wert; dagegen sind B und A statisch unbestimmte Integrations-Konstanten, die von der Lage der Drucklinie im Gewölbe abhängen, H ein ebenfalls statisch nicht bestimmbarer Seitenschub. Der lotrechte Abstand

$$3) \qquad y' - y = \frac{f(x)}{H} + A x + B - y$$

ist daher als eine Funktion der unbestimmten Gröſsen B, A und H zu betrachten. Die Bedingung $S = \int (y' - y)^2 d s$ ein Minimum verlangt hiernach das Nullwerden der 3 teilweisen Abgeleiteten,

d. h. $$\frac{\partial S}{\partial B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial H} = 0.$$

Nach Gl. 1 und 3 wird aber

$$\frac{\partial S}{\partial B} = 2 \int (y' - y) \frac{\partial (y' - y)}{\partial B} d s = 2 \int (y' - y) d s$$

(weil nach Gl. 3 $\frac{\partial (y' - y)}{\partial B} = 1$), mithin

$$4) \qquad \int (y' - y) d s = 0.$$

Ebenso wird $\frac{\partial S}{\partial A} = 2 \int (y' - y) \frac{\partial (y' - y)}{\partial A} d s = 2 \int (y' - y) x \, d s$, also

$$5) \qquad \int (y' - y) x \, d s = 0.$$

Schlieſslich ist

$$\frac{\partial S}{\partial H} = 2 \int (y' - y) \frac{\partial (y' - y)}{\partial H} d s = - 2 \int (y' - y) \frac{f(x)}{H^2} d s$$

oder, wenn man $f(x)$ aus Gl. 2 berechnet,

$$\frac{\partial S}{\partial H} = - \frac{2}{H} \left\{ \int (y' - y) y' d s - A \int (y' - y) x \, d s - B \int (y' - y) d s \right\}.$$

Weil nun die letzten beiden Glieder nach Gl. 4 und 5 verschwinden, so wird $\int (y' - y) y' d s = 0$. Soll aber, wie angenommen, die

Drucklinie sich der Mittellinie möglichst nähern, so kann man in dem letzten Ausdrucke annähernd y' mit y vertauschen und erhält dann die dritte Bedingung

$$6) \qquad \int (y'-y)\,y\,ds = 0.$$

Die Drucklinie A_1U (Fig. 77) gibt an irgend einer Schnittstelle durch ihre Tangente die Lage und Richtung der inneren Spannkraft an, die also bei U angreifen mufs und in H und Q zerlegt werden kann. Demnach ist

Fig. 77.

$$7) \qquad M = H \cdot \overline{UP} = H(y'-y)$$

das Biegungsmoment in Bezug auf den Schwerpunkt P der Schnittfläche und

$$8) \qquad y'-y = \frac{M}{H}.$$

Die Gl. 4, 5 und 6 bedeuten hiernach:

$$\int \frac{M}{H}\,ds = 0; \quad \int \frac{M}{H}\,x\,ds = 0; \quad \int \frac{M}{H}\,y\,ds = 0; \quad \text{oder}$$

$$\int M\,ds = 0; \quad \int M\,x\,ds = 0; \quad \int M\,y\,ds = 0.$$

Ersetzt man in diesen letzten drei Gleichungen das Biegungsmoment M durch die Werte von M_x bezw. M_{x_1} der Gl. 1 und 1a S. 137, so unterscheiden sich die entstehenden Gleichungen von den Gl. 7—9 S. 138 nur durch das die elastische Verkürzung der Bogenmittellinie ausdrückende Glied $H \cdot l \frac{J}{F}$ der Gl. 7. Bei der hier geschehenen Aufserachtlassung jener Verkürzung des Bogens findet also volle Übereinstimmung der Ergebnisse nach dem Winkler'schen und dem auf S. 21 bewiesenen Castigliano'schen Satze statt, womit die Richtigkeit auch des ersteren erwiesen ist.*)

Man bestimmt also zunächst eine sich der Gewölbemittellinie tunlichst anschmiegende statisch mögliche Drucklinie zu der gegebenen Belastung. Das kann, wenn das Belastungsgesetz $z = f(x)$ bekannt ist, in der auf S. 166 u. f. dargelegten Weise analytisch geschehen, wird aber meist einfacher und genau genug zeichnerisch ausgeführt, indem man zunächst durch die Mitte der Kämpfer- und

*) Dafs es sich nur um ein Minimum, nicht aber um ein Maximum der Abweichung beider Linien voneinander handeln kann, ist ohne weiteres ersichtlich.

Scheitelfuge erstmalig eine Seillinie zeichnet und diese durch anderweite versuchsweise Annahme dreier Punkte jener Fugen so verschiebt und abändert, dafs ein tunlichstes Anschmiegen an die Mittellinie zu Stande kommt, was nach Augenmafs oder nötigenfalls durch eine überschlägliche Rechnung praktisch genau genug beurteilt werden kann.

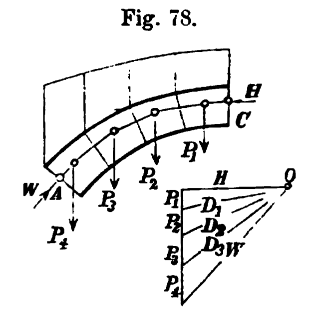
Die so unter der Annahme völliger Starrheit des Gewölbes gefundene „ideelle“ Drucklinie verschiebt sich noch infolge der elastischen Verkürzung der Bogenlinie um Strecken t_a, t_b und c in den Kämpfern und im Scheitel. Für Gewölbe mit nicht zu grofsem Pfeilverhältnis und annähernd parabolischer Form kann man auch mit für die Anwendung hinreichender Annäherung c, t_a und t_b noch Gl. 4 und 5 berechnen.

Damit sind dann wieder drei Punkte der wirklichen Drucklinie bekannt und dieselbe kann gezeichnet werden.

Die Zeichnung einer Seillinie durch drei Punkte wird hier zwar als bekannt vorausgesetzt, es soll indes noch kurz angedeutet werden, wie sich dieselbe in ihrer Anwendung auf die Drucklinie eines Gewölbes zweckmäfsig gestalten läfst.

Bei einem symmetrischen und symmetrisch belasteten Gewölbe kann die Spannkraft in der Symmetrieebene (Scheitelfuge) nach dem Gesetz der Wechselwirkung nur eine wagerechte Druckkraft H sein. Ist diese Kraft nach Lage und Gröfse bekannt, bezw. schon ermittelt, so kann die Drucklinie in der aus Fig. 78 ersichtlichen Weise für eine Gewölbehälfte gezeichnet werden. Man teilt die Gewölbehälfte, deren Länge rechtwinklig zur Bildebene gleich 1 angenommen werden möge, durch radial gerichtete Fugen in eine Anzahl gleicher Teile (Gewölbsteine), stellt die auf diese entfallende Belastung (Übermauerung, Überschüttung, Verkehrslast u. dgl.) durch Körper von gleicher Dichte wie das Gewölbe dar und vereinige das Gewicht eines jeden Gewölbsteines mit der von ihm zu tragenden Last zu den Kräften P_1, P_2, P_3, P_4 usw. Diese in eine lotrechte Strecke zusammengetragen, bilden das Krafteck, und da der erste Polstrahl wie die erste Seilecksseite wagerecht sind und die Polweite gleich H sein mufs, so ist auch der Pol 0 damit bekannt und das Seileck kann gezeichnet werden. Die Drucklinie tangiert die Seiten desselben in den Fugenschnittpunkten. Die Polstrahlen D_1, D_2, D_3 und W ergeben die Druckkräfte in den Fugen bezw. den Widerlagerdruck. Der Schnittpunkt A des letzteren mit der Kämpferfuge ist durch Zeichnung des

Fig. 78.



Seilecks bekannt geworden. Ist nicht die wagerechte Scheitelkraft H nach Lage und Gröfse, sondern nur deren Angriffspunkt C und der Druckmittelpunkt A in der Kämpferfuge bekannt, so verfährt man, wie Fig. 79 zeigt. Durch Zeichnung eines Seilecks CA_1 mit vorweg beliebig angenommener Polweite H_1 und Pol 0_1 erhält man zunächst die Lage der Mittelkraft ΣP aller Lasten. Durch deren Schnittpunkt Q mit der wagerechten Richtungslinie von H mufs dann auch der in A angreifende Kämpferwiderstand W gerichtet sein. Zieht man daher im Krafteck durch den unteren Endpunkt der die ΣP darstellenden Strecke eine Parallele zu AQ, so findet man im Schnittpunkte dieser mit der Wagerechten durch den oberen Endpunkt jener Strecke den Pol 0 der wirklichen Drucklinie, die nun geeichnet werden kann.

Fig. 79.

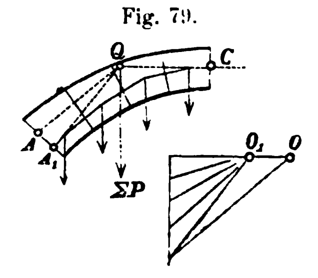
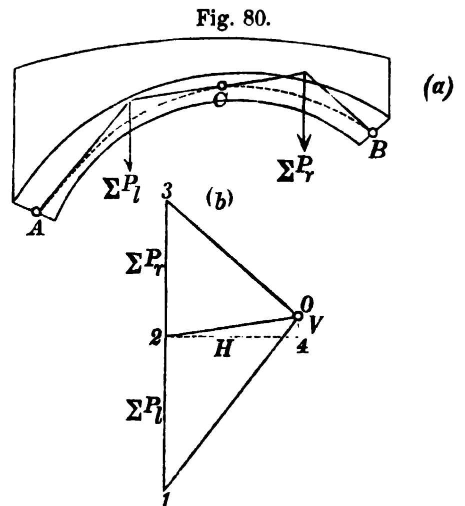


Fig. 80.



Ist das Gewölbe nicht symmetrisch (Fig. 80 a), so ist auch der Scheiteldruck nicht wagerecht. Man kann dann seine wagerechte und lotrechte Seitenkraft H bezw. V mit Hülfe der Momentengleichungen in Bezug auf die Kämpferpunkte A und B bestimmen. Trägt man jetzt die Lastsumme ΣP_l und ΣP_r für die linke und rechte Gewölbehälfte im Krafteck zu einer lotrechten Strecke zusammen (Fig. 80 b), macht $\overline{24} = H$ und $\overline{40} = V$, so ist 0 der Pol der wirklichen Drucklinie.

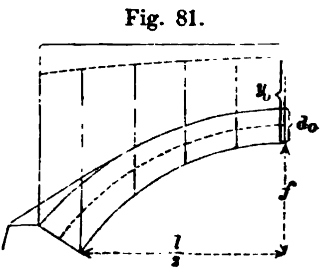
Wir haben uns im vorstehenden das Gewölbe nach dem üblichen Fugenschnitte zerlegt gedacht; man erhält aber denselben Widerlagerdruck W, wenn man das Gewölbe in anderer Weise einteilt, weil W nur von H und dem Gesamtgewichte der Gewölbhälfte abhängt. Für Gewölbe von nicht sehr grofsem Pfeilverhältnis empfiehlt sich die Teilung des Bogens und der Überlast durch lotrechte Schnitte, weil man dann die einzelnen Stücke als schmale Trapeze behandeln kann. Die mittleren Seiten des Seilecks ändern sich dadurch etwas, doch kann diese Abweichung meist unberücksichtigt bleiben.

Ist die wirkliche Drucklinie so gefunden, so kann die Berechnung der Randspannungen in den einzelnen Schnitten mit Hülfe der Gl. 3—6 S. 70 geschehen.

i) Anwendung auf Brückengewölbe.

Die Brückengewölbe sind gewöhnlich in solcher Weise übermauert und überschüttet, daſs oben eine wagerechte Begrenzung steht (Fig. 81). Die verschiedenen Stoffe, welche die Bedeckung bilden, werden mittels Veränderung der Höhen sämtlich auf die Dichtigkeit γ_1 des Mauerwerks zurückgeführt. Dann ergibt sich, wenn man im folgenden durchweg γ_1 als Krafteinheit benutzt, die Belastungshöhe z_0 im Scheitel als Summe der (vorläufig nach Gutdünken angenommenen) Gewölbstärke d_0 im Scheitel, der Übermauerung und der auf dieselbe Dichtigkeit zurückgeführten Überschüttung. (Solange die Oberfläche des Mauerwerks nur schwach geneigt ist, kann der Seitendruck der Überschüttung unberücksichtigt bleiben.) Auch nach der Zurückführung auf gleiche Dichtigkeit ist die so entstehende Belastungslinie meist noch wenig von einer wagerechten Geraden abweichend, so daſs die Hagen'sche Drucklinie (S. 176) annähernd diesen Belastungsverhältnissen entspricht; daher empfiehlt es sich, die Mittellinie des Brückengewölbes (wenigstens vorläufig) nach einer Hagen'schen Drucklinie zu formen.

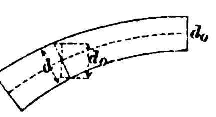
Fig. 81.



Eine Schwierigkeit besteht zunächst darin, daſs gewöhnlich Spannweite l und Pfeilhöhe f für die innere Leibung, nicht aber für die Mittellinie gegeben sind und daſs bei der verhältnismäſsig groſsen Dicke der Brückengewölbe diese beiden Linien ziemlich verschiedene Pfeilverhältnisse haben. Wenn man aber eine nachherige zeichnerische Prüfung und etwaige Berichtigung voraussetzt, so kann man die Annahme machen, daſs die richtige Mittellinie und die zugehörige innere Leibungslinie des Gewölbes derselben Kurvengattung angehören und sich nur durch einen verschiedenen Scheitelhalbmesser r unterscheiden. Man formt daher die innere Leibung nach einer Hagen'schen Drucklinie und trägt die angenommene Scheitelstärke d_0 auf.

Fiele die wahre Drucklinie mit der Mittellinie zusammen, so würde der völlig zentrische Druck einer beliebigen Fuge $D = H : \cos\vartheta$ sein. Für überall gleiche Spannung müfsten dann die Gewölbstärken d und d_0 sich ebenso verhalten wie D und H, es müfste also

Fig. 82.



1) $$d \cos\vartheta = d_0,$$

d. h. die lotrechte Projektion aller Fugen gleich d_0 sein (Fig. 82).

Für Brückengewölbe hat diese Formel allerdings keine grofse Bedeutung, weil bei solchen die ungünstigste Stellung der Verkehrslast zu der stärksten Inanspruchnahme des Gewölbes führt und daher auch für die Abmessungen des Gewölbes mafsgebend sein mufs; man kann sie höchstens als einen vorläufigen Anhalt benutzen, gehe aber mit $d : d_0$ nicht über 2 hinaus.

Hiermit steht dann auch die äufsere Leibung zunächst fest, und nach Anbringung der Übermauerung und Überschüttung kann nun die zeichnerische Prüfung erfolgen. Man lege durch die Mitten von Scheitel- und Kämpferfuge ein Seileck und ändere die Mittellinie des Gewölbes nötigenfalls so, dafs sie sich dem Seileck gut anschmiegt, oder besser noch mit ihm zusammenfällt. Sodann berechnet man nach Gl. 3 und 4 (S. 186) ξ und c, wobei man die mittlere Gewölbstärke berücksichtigt, und verlegt die Angriffspunkte von H im Scheitel und am Kämpfer wieder um c nach oben bezw. um $2c$ nach unten. Hiermit steht dann der Spannungszustand des unbelasteten Gewölbes annähernd fest; Voraussetzung ist, dafs der betrachtete Gewölbbogen nicht zu grofse Pfeilhöhe hat (etwa bis $f = \frac{1}{3} l$).

Die bewegliche Belastung wird als gleichmäfsig verteilt angenommen und in Form einer Belastungshöhe p (mit dem Einheitsgewichte γ_1) eingeführt. Bedeckt sie die ganze Spannweite, so kann dies als eine Vergröfserung der Belastungshöhe y_0 um p angesehen werden. Ohne Verkürzung der Mittellinie wäre dann der ganze Seitenschub nach Gl. 4 S. 167, wenn man z mit $y_0 + p$ vertauscht, $H = r(y_0 + p)$, mit Rücksicht auf diese wird aber

2) $$H = \frac{r(y_0 + p)}{1 + \xi}.$$

Hierin bedeutet r den Krümmungshalbmesser der Drucklinie im Scheitel. Kann man denselben nicht einer Zeichnung entnehmen, so setze man annähernd

3) $$r = r_1 + d_0,$$

wenn r_1 für die innere Leibung gilt. (Bei überall gleicher Gewölbstärke würde $r = r_1 + {}^1/_2\, d_0$ sein; wegen der Zunahme der Gewölbstärke nach den Kämpfern hin wird aber r gröfser.) Der Angriffspunkt von H liegt im Scheitel um $c = {}^1/_3\, d^2 : f$ über der Mitte (Fig. 83). Die Kantenpressungen, welche im Scheitel bei voller Belastung entstehen, werden daher (S. 70 Gl. 3 u. 4)

Fig. 83.

$$4)\qquad \sigma = \frac{H}{d_0}\left(1 \pm \frac{6\,c}{d_0}\right),$$

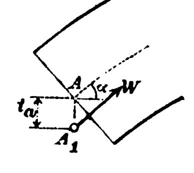
wobei das obere Zeichen für die Oberkante gilt.

Am Kämpfer bilde die Mittellinie den Neigungswinkel α mit der Wagerechten (Fig. 84), die Fuge annähernd denselben Winkel mit der Lotrechten. Der Kämpferdruck W ist in Wirklichkeit etwas steiler als die Mittellinie, doch ist dieser Unterschied nicht sehr erheblich, so dafs man annähernd

$$W = H : \cos\alpha$$

setzen kann. Der Angriffspunkt A_1 von W liegt um $t_a = 2\,c$ unter A, liefert also das Moment $M_a = W \cdot 2\,c \cos\alpha = H \cdot 2\,c$. Ist nun d_1 die Gewölbstärke am Kämpfer, so ergeben sich die Kantenpressungen daselbst bei voller Belastung zu

Fig. 84.



$$5)\qquad \sigma = \frac{H}{d_1 \cos\alpha} \mp \frac{6 \cdot H \cdot 2\,c}{d_1^2} = \frac{H}{d_1}\left(\frac{1}{\cos\alpha} \mp \frac{12\,c}{d_1}\right),$$

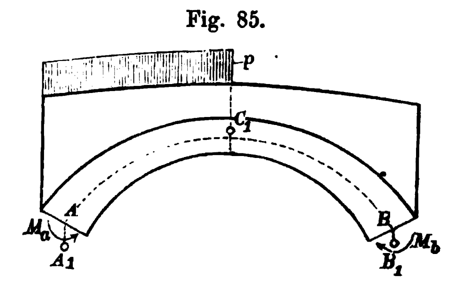
wobei das untere Zeichen für die Unterkante gilt.

Bedeckt die bewegliche Belastung nur einen Teil der Spannweite, so wird die Drucklinie unsymmetrisch, und es ist wie schon erwähnt, für ein Brückengewölbe wünschenswert, dafs der Spannungsmittelpunkt in keiner Fuge aus dem Kerne, dem mittleren Drittel, heraustrete, dafs also auch die unsymmetrische Drucklinie in dem symmetrischen Kernbogen (welcher die mittleren Drittel aller Fugen umfafst) verbleibe.

Nach dem Winkler'schen Satze würde (ohne den Einflufs der Verkürzung, welche die Drucklinien steiler macht) auch bei unsymmetrischer Belastung die Drucklinie sich der Mittellinie möglichst anschmiegen. Läfst sich daher für jede Belastungsart eine statisch mögliche Drucklinie nachweisen, die ganz im Kernbogen bleibt, so ist ein Öffnen der Fugen nicht zu befürchten. In Bezug auf

letzteren Umstand ist mithin diejenige Belastung (nahezu) die ungünstigste, welche möglichst unsymmetrische Drucklinien erzeugt, und dieses findet genau genug statt, wenn die bewegliche Belastung die eine Hälfte der Spannweite bedeckt. Diese einseitige Belastung ist deshalb neben der vollen Belastung noch in Betracht zu ziehen. (Fig. 85.)

Fig. 85.



Für die Berechnung der Spannungen, welche diesem Zustande entsprechen, können wiederum annäherungsweise die für den parabolischen Bogenträger entwickelten Formeln benutzt werden. Zunächst ergibt sich nach S. 152—154, daß an den Kämpfern die größten Momente vorkommen, zu deren Berechnung die Gl. 19 und 20 (S. 152) dienen können. In diesen Gleichungen beziehen sich l und f auf die parabolische Mittellinie des Bogenträgers. Für diese ist der Krümmungshalbmesser im Scheitel $l^2 : 8f$, und es empfiehlt sich, für die hier vorliegende Aufgabe

$$\frac{l^2}{8f} = r \text{ oder } l^2 = 8fr$$

zu setzen, wenn r den Krümmungshalbmesser der Mittellinie des Gewölbes im Scheitel bedeutet; g ist hier mit y_0 zu vertauschen. Nach Gl. 17, 19 und 20 (S. 152) wird dann

$$6) \qquad H_1 = \frac{r(y_0 + {}^1/_2 p)}{1+\xi};$$

$$7) \qquad M_a = -\frac{1}{8} pfr + \frac{2}{3} H_1 f \xi;$$

$$8) \qquad M_b = +\frac{1}{8} pfr - \frac{2}{3} H_1 f \xi$$

und nach Gl. 8 S. 155

$$9) \qquad M_m = H_1 c = {}^1/_3 H_1 f \xi.$$

Zieht man durch A und B Lotrechte, so geht die Drucklinie durch die Punkte A_1 bezw. B_1 derselben, und für die Abstände $AA_1 = t_a$ und $BB_1 = t_b$ gilt

$$10) \qquad t_a = \frac{M_a}{H_1} \qquad t_b = \frac{M_b}{H_1}.$$

In der Scheitelfuge bleibt der Spannungsmittelpunkt C_1 in derselben Höhe:

11) $$c = \frac{1}{3} f \xi = \frac{1}{3} \frac{d^2}{f}$$

über der Mitte wie im unbelasteten und vollbelasteten Zustande; die Scheitelfuge wird daher bei voller Belastung die stärkste Spannung erfahren, weil dann der Schub H am gröfsten ist.

Bei einseitiger Belastung werden die Kantenpressungen im Scheitel

12) $$\sigma = \frac{H_1}{d_0}\left(1 \pm \frac{6c}{d_0}\right),$$

am Kämpfer der belasteten Hälfte, wenn man wieder annähernd $W = H_1 \sec \alpha$ einführt:

13) $$\sigma = \frac{H_1}{\cos \alpha \, d_1} \mp \frac{6 M_a}{d_1^2},$$

und am Kämpfer der unbelasteten Hälfte

14) $$\sigma = \frac{H_1}{\cos \alpha \, d_1} \mp \frac{6 M_b}{d_1^2},$$

wobei sich die oberen Zeichen auf die Oberkante beziehen, und umgekehrt.

Am Kämpfer der belasteten Seite treten die gröfsten Biegungsmomente auf. Stellt man die Bedingung, dafs hier die kleinste Druckspannung Null werde, so mufs

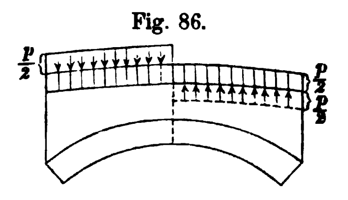
$$\frac{H_1}{\cos \alpha \, d_1} - \frac{6 M_a}{d_1^2} = 0 \quad \text{oder}$$

15) $$d_1 = \frac{6 M_a \cdot \cos \alpha}{H_1} \quad \text{sein.}$$

Der Umstand, dafs die Belastung der einen Hälfte mit Verkehrslast als ungünstigster Fall für das Gewölbe anzusehen ist, weist darauf hin, dafs man die Mittellinie des Gewölbes (mithin auch die innere Leibung) zweckmäfsig nicht nach einer Drucklinie für das unbelastete Gewölbe formt, sondern besser nach einer solchen (vergl. S. 165 unten), welche einer Belastung der ganzen Spannweite mit $\frac{1}{2} p$, d. h. mit der Hälfte der beweglichen Last, entspricht. Aus dieser symmetrischen Belastung

kann man sich nämlich die einseitige Belastung der Fig. 85 dadurch entstanden denken, dafs (Fig. 86) auf der linken Hälfte eine positive (abwärts gerichtete) Last $\frac{1}{2}p$, auf der rechten Seite aber eine aufwärts gerichtete, negative Last $\frac{1}{2}p$ hinzugekommen ist. Hierdurch erfährt der Seitenschub H keine Änderung, die Drucklinie aber verschiebt sich an zwei symmetrisch gelegenen Punkten um gleich viel, nämlich auf der belasteten Seite nach oben, auf der entlasteten nach unten. Die stärksten Abweichungen der Drucklinie von der Mittellinie werden also möglichst gering, wenn die Mittellinie einer Scheitelbelastung $y_0 + \frac{1}{2}p$ entspricht.

Fig. 86.



Legt man durch die drei Punkte, welche mittels der Gl. 10 und 11 gegeben sind, ein Seileck für den Zustand der einseitigen Belastung, so ist dieses wiederum als die Drucklinie anzusehen. Man prüfe dann zunächst, ob die Drucklinie irgendwo aus dem Kernbogen tritt und vergröfsere darnach nötigenfalls die Gewölbstärke. Das zur Zeichnung des Seilecks erforderliche Krafteck gibt auch die Kräfte H_1 und W_1 genauer als die vorstehend benutzten Formeln.

Beispiel: Das Gewölbe einer Eisenbahnbrücke habe $l = 10^m$ Spannweite und $f = 3^1/_3{}^m$ Pfeilhöhe; die Scheitelstärke soll einstweilen zu $d_0 = 0{,}6^m$ angenommen werden. Übermauerung (von der Dichtigkeit $\gamma_1 = 2000$) und Überschüttung (von der Dichtigkeit $\gamma = 1600$) seien so bemessen, dafs die ganze, auf Mauerwerk von der Dichtigkeit $\gamma_1 = 2000$ zurückgeführte Belastungshöhe im Scheitel $1{,}4^m$ betrage. Die bewegliche Belastung soll zu $p = 1^m$ angenommen werden (Fig. 87).

Auf Grund des vorstehenden wird die innere Leibung zunächst nach einer Hagen'schen Drucklinie mit $y_0 = 1{,}4^m + {}^1/_2 \cdot 1^m = 1{,}9^m$ Scheitelbelastung geformt; die Koordinaten dieser Linie sind schon auf S. 179 berechnet, wobei sich $r_1 = 4{,}72^m$ ergab. Für die Mittellinie gilt dann nach Gl. 3 (S. 193) annähernd $r = r_1 + d_0 = 4{,}72 + 0{,}6 = 5{,}32^m$. Die Pfeilhöhe der Mittellinie ist nahezu gleich derjenigen der inneren Leibung. Für den Neigungswinkel der Mittellinie am Kämpfer gilt nach S. 176:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{y^2 - y_0^2}}{\sqrt{r_1 y_0}} = \frac{\sqrt{(y_0 + f)^2 - y_0^2}}{\sqrt{r_1 y_0}} = \frac{\sqrt{2 f y_0 + f^2}}{\sqrt{r_1 y_0}},$$

wobei $y_0 = 1{,}9^m$ zu setzen ist,

$$\text{also} \quad \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{2 \cdot 3^1/_3 \cdot 1{,}9 + 11^1/_9}{5{,}32 \cdot 1{,}9} = 2{,}35\,,$$

$$\sec^2\alpha = 3{,}35\,, \quad \sec\alpha = 1{,}83\,.$$

Die Gewölbstärke am Kämpfer wird dann vorläufig nach Gl. 1 (S. 192 $d_1 = 1{,}83 \cdot 0{,}6 = 1{,}098$, wofür rund $d_1 = 1^{\text{m}}$ gewählt ist. Hiernach kann als mittlere Stärke $d = 0{,}8^{\text{m}}$ gesetzt werden und man erhält nach Gl. 1 und 2

$$\xi = \frac{d^2}{f^2} = \left(\frac{0{,}8}{3^1/_3}\right)^2 = 0{,}058 \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{3}\,\frac{0{,}8^2}{3^1/_3} = 0{,}064^{\text{m}}.$$

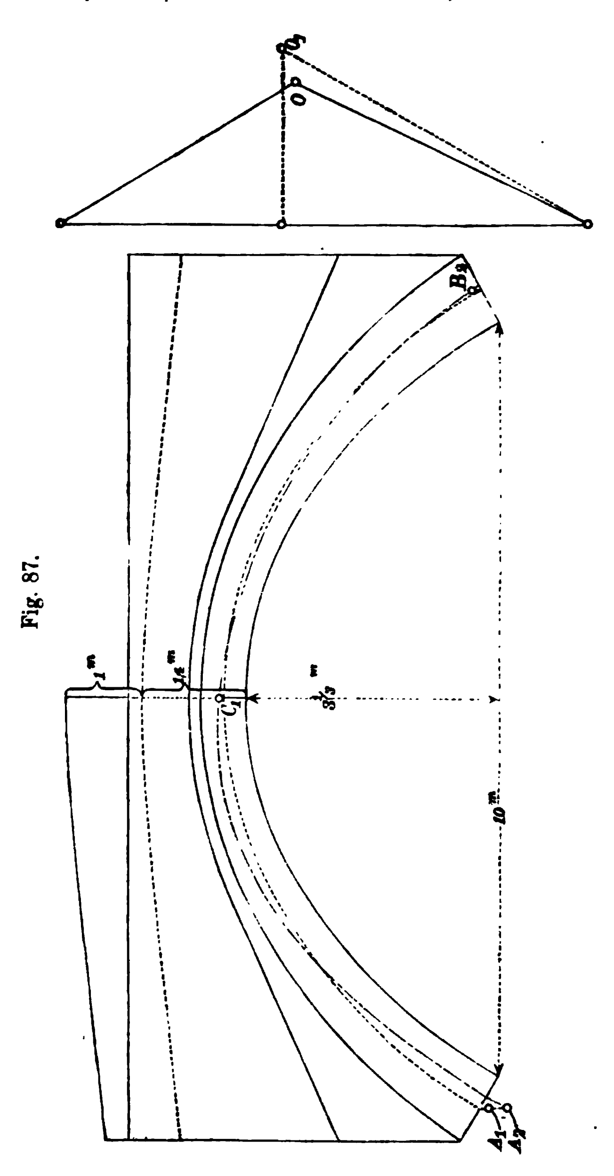


Fig. 87.

Für **volle** Belastung wird nach Gl. 2—5 (S. 193)

$$H = \frac{5{,}32 \cdot 2{,}4}{1{,}058} = 12{,}07^{\text{cbm}};$$

Dann sind die Kantenpressungen im Scheitel:

$$\sigma = \frac{12{,}07}{0{,}6}\left(1 \pm \frac{6 \cdot 0{,}064}{0{,}6}\right) = \begin{cases} 32{,}99^{\text{m}} = 6{,}6^{\text{at}} \\ 7{,}24^{\text{m}} = 1{,}5^{\text{at}}, \end{cases}$$

diejenigen am Kämpfer:

$$\sigma = \frac{12{,}07}{1}\left(1{,}83 \mp \frac{12 \cdot 0{,}064}{1}\right) = \begin{cases} 12{,}82^{\text{m}} = 2{,}6^{\text{at}} \\ 31{,}36^{\text{m}} = 6{,}3^{\text{at}}, \end{cases}$$

wobei die oberen Werte die Spannungen in der Oberkante, die unteren diejenigen in der Unterkante ausdrücken.

Für **einseitige** Belastung links gilt nach Gl. 6—15 (S. 195):

$$H_1 = \frac{5{,}32 \cdot 1{,}9}{1{,}058} = 9{,}55^{\text{cbm}},$$

$$M_a = -\left(\frac{1}{8} \cdot 1 \cdot \frac{10}{3} \cdot 5{,}32 + \frac{2}{3} \cdot 9{,}55 \cdot \frac{10}{3} \cdot 0{,}058\right)$$

$$= -(2{,}217 + 1{,}231) = -3{,}448,$$

$$M_b = +2{,}217 - 1{,}231 = +0{,}986,$$

$$t_a = -0{,}354^{\text{m}}, \quad t_b = +0{,}109^{\text{m}}, \quad c = +0{,}064^{\text{m}}.$$

Die Kantenpressungen im Scheitel sind dann

$$\sigma = \frac{9{,}55}{0{,}6}\left(1 \pm \frac{6 \cdot 0{,}064}{0{,}6}\right) = \begin{cases} 26{,}10^{\text{m}} = 5{,}2^{\text{at}} \\ 5{,}73^{\text{m}} = 1{,}1^{\text{at}}, \end{cases}$$

die Kantenpressungen am belasteten Kämpfer:

$$\sigma = 9{,}55 \cdot 1{,}83 \mp 6 \cdot 3{,}448 = 17{,}477 \mp 20{,}688 = \begin{cases} -\ 3{,}21^{\text{m}} = -0{,}6^{\text{at}} \\ +38{,}17^{\text{m}} = +7{,}6^{\text{at}}. \end{cases}$$

Sollte die ganze Kämpferfuge Druckspannung erhalten, so müfste

$$d_1 = 20{,}688 : 17{,}477 = 1{,}18^{\text{m}}$$

gemacht werden.

Etwas genauere Werte ergeben sich, wenn man die Zeichnung zu Hülfe nimmt. Diese liefert $r = 5{,}55^{\text{m}}$; auch zeigt sich die Pfeilhöhe der Mittellinie etwas gröfser, nämlich $f_1 = 3{,}4^{\text{m}}$ (statt $3^1/_3$).

Zeichnet man dann ein Seileck zu der symmetrischen, **vollen** Belastung, welches im Scheitel um 0.064^{m} **oberhalb** (Punkt C_1), am Kämpfer um $2 \cdot 0{,}064 = 0{,}128^{\text{m}}$ **unterhalb** der Mittellinie (auf der Lotrechten durch die Mitte der Kämpferfuge gemessen) liegt (Punkt A_1), so kann man aus dem zugehörigen Krafteck (Pol O_1 in Fig. 87) $H = 11{,}6^{\text{cbm}}$ und $W = 23{,}45^{\text{cbm}}$ abmessen. Daraus entsteht am Scheitel

$$\sigma = \frac{11{,}6}{0{,}6}\left(1 \pm \frac{6 \cdot 0{,}064}{0{,}6}\right) = \begin{cases} 31{,}70^{\text{m}} = 6{,}3^{\text{at}} \\ 6{,}96^{\text{m}} = 1{,}4^{\text{at}}, \end{cases}$$

am Kämpfer

$$\sigma = 23{,}45 \mp 12 \cdot 11{,}6 \cdot 0{,}064 = \begin{cases} 14{,}55^{\text{m}} = 2{,}91^{\text{at}} \\ 32{,}35^{\text{m}} = 6{,}47^{\text{at}}. \end{cases}$$

Die Abweichungen von der ersten Berechnung sind unerheblich.

Schliefslich zeichne man ein Seileck für die **einseitige** Belastung durch die 3 Punkte A_2, C_1 und B_2; darin ist C_1 ein Punkt der Scheitelfuge, welcher um $0{,}064^{\text{m}}$ über der Mitte liegt, A_2 ein Punkt, der um $AA_2 = t_a = 0{,}361^{\text{m}}$

unterhalb der Mitte des belasteten Kämpfers, B_2 ein solcher, der um $BB_2 = +t_b = 0{,}103^{\text{m}}$ oberhalb der Mitte des unbelasteten Kämpfers liegt. Aus dem zugehörigen Krafteck (Pol O) sind dann $H_1 = 9{,}5$ und $W_1 = 21{,}6$ abzumessen. Danach ist im Scheitel

$$\sigma = \frac{9{,}5}{0{,}6}(1 \pm 0{,}64) = \begin{cases} 25{,}97^{\text{m}} = 5{,}2^{\text{at}} \\ 5{,}70^{\text{m}} = 1{,}1^{\text{at}}; \end{cases}$$

ferner wird $M_a = -\left(\frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 3{,}4 \cdot 5{,}55 + \frac{2}{3} \cdot 9{,}5 \cdot 3{,}4 \cdot 0{,}058\right) = -3{,}608$, daher am Kämpfer

$$\sigma = 21{,}6 \mp 6 \cdot 3{,}608 = \begin{cases} -\ 0{,}048^{\text{m}} = -0{,}1^{\text{at}} \\ +\ 43{,}248^{\text{m}} = +8{,}6^{\text{at}}. \end{cases}$$

Die Kämpferstärke müfste

$$d_1 = 21{,}648 : 21{,}6 = 1{,}002^{\text{m}}$$

betragen, wenn die ganze Fuge gedrückt werden sollte; das ursprünglich gewählte Mafs $d_1 = 1{,}0^{\text{m}}$ genügt also.

Aus diesem Seileck erkennt man auch noch, dafs auf der belasteten Seite, u. zw. in etwa $1^1/_4$ Meter Abstand von der Mitte, die Drucklinie um etwa $0{,}016^{\text{m}}$ aus dem Kernbogen nach oben hinaus rückt. Die Gewölbstärke beträgt an dieser Stelle etwa $0{,}63^{\text{m}}$, die halbe Kernstärke demnach $0{,}105^{\text{m}}$. Der Fugendruck hat hier den Wert 10 mit einem Momente $M = 1{,}21$. Die Kantenpressungen werden also

$$\sigma = \frac{10}{0{,}63} \pm \frac{6 \cdot 1{,}21}{0{,}63^2} = \begin{cases} 34{,}2^{\text{m}} = \ \ 6{,}8^{\text{at}} \\ -2{,}4^{\text{m}} = -0{,}5^{\text{at}}. \end{cases}$$

Soll auch diese Fuge in der ganzen Ausdehnung Druck erfahren, so mufs die Gewölbstärke hier von $0{,}63^{\text{m}}$ auf $d = 6 \cdot 1{,}21 : 10 = 0{,}73^{\text{m}}$, dementsprechend im Scheitel von $0{,}6^{\text{m}}$ auf rund $0{,}70^{\text{m}}$ vergröfsert werden. (Das Moment $M = 1{,}21$ ist erheblich kleiner als das Kämpfermoment $M_a - = 3{,}608$. Dafs es besondere Berücksichtigung noch erfordert, rührt davon her, dafs die Gewölbstärke hier so bedeutend geringer war als am Kämpfer.) Dieses Beispiel bestätigt also, dafs die Gleichung $d \cos \vartheta = d_0$ für Brückengewölbe (vgl. S. 192) nur sehr beschränkten Wert hat.

Durch Formänderungen des Lehrgerüstes, durch Temperaturänderungen und durch Nachgeben der Widerlager entstehen noch weitere Einwirkungen auf das Gewölbe, welche man Störungen nennt. Man sucht den ungünstigen Einflüssen derselben durch die Art der Herstellung entgegenzuwirken.

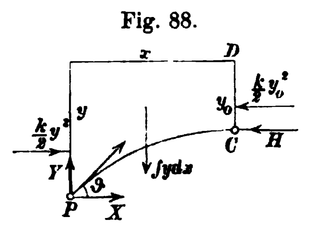
k) Drucklinie für Erdbelastung.

In den vorstehenden Untersuchungen wurden rein lotrechte Belastungen vorausgesetzt. Bei Gewölben gröfserer Pfeilhöhe mit Erdüberschüttung ist aber auch der Seitendruck der Erde zu berücksichtigen, und es soll im folgenden die Drucklinie für diese Belastungsart behandelt werden. Das Gewölbe selbst liefert für die Drucklinie nur eine lotrechte Belastung; doch soll auf diesen

Unterschied gegenüber der Erdschüttung keine Rücksicht genommen, das Gewölbe vielmehr als eine gewichtslose Kette aufgefaßt werden.

Die obere Begrenzung sei wagerecht und liege in der Höhe y^0 über dem Scheitel (Fig. 88); dann ist, wenn wir (wie bei Hagen's Drucklinie) den Punkt D zum Ursprunge nehmen und die Dichtigkeit γ der Erde zur Krafteinheit wählen, $\int y\,dx$ das Erdgewicht, welches auf dem Stücke CP der Drucklinie lastet. Bezüglich der Erdpressungen an den lotrechten Schnittebenen durch C und P wird die ziemlich wahrscheinliche Annahme gemacht, dafs sie sich ebenso verhalten wie beim unbegrenzten Erdkörper im unteren Grenzzustande; die Pressungen sind daher nach der Lehre vom Erddruck wagerecht, haben die Gröfsen $\frac{1}{2} k y^2$ und $\frac{1}{2} k y_0^2$ [wo $k = \mathrm{tg}^2(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)$] und greifen in den unteren Drittelspunkten an. In C wirkt eine Spannkraft H, während im Punkte P die Kraft in X und Y zerlegt ist. Es gelten dann die Gleichungen

Fig. 88.



$$X = H - \tfrac{1}{2} k (y^2 - y_0^2),$$

$$Y = \int_0^x y\,dx,$$

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{dy}{dx} = \frac{\int_0^x y\,dx}{X} = \frac{\int_0^x y\,dx}{H - \frac{1}{2} k (y^2 - y_0^2)}, \qquad \text{also}$$

$$[H - \tfrac{1}{2} k (y^2 - y_0^2)] \frac{dy}{dx} = \int_0^x y\,dx.$$

Zur Beseitigung des Integralzeichens wird von beiden Seiten die Abgeleitete nach x gebildet:

$$1) \qquad [H - \tfrac{1}{2} k (y^2 - y_0^2)] \frac{d^2 y}{dx^2} - k y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y.$$

Durch geeignete Ordnung der Glieder, sowie nach Multiplikation mit $2 k\,dy$ entsteht dann

$$\frac{2k \dfrac{dy}{dx} \dfrac{d^2 y}{dx}}{1 + k \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2} = -2 \frac{-k y\,dy}{H - \frac{1}{2} k (y^2 - y_0^2)}.$$

Nun sind auf beiden Seiten die Zähler die Differentiale der Nenner, so dafs die Integration auf

$$l\left[1+k\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=-2\,l\left[H-{}^1/_2\,k\,(y^2-y_0^2)\right]+C$$

führt. Zur Bestimmung der Integrationskonstanten C bedenke man, dafs für den Scheitel

$$\frac{dy}{dx}=0 \text{ und } y=y_0, \text{ so dafs } l\,1=0=-2\,l\,H+C$$

wird. Durch Abziehen dieser Gleichung von der vorhergehenden und nach Entfernung der Logarithmenzeichen ergibt sich dann

$$2)\qquad 1+k\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{H^2}{\left[H-{}^1/_2\,k\,(y^2-y_0^2)\right]^2}=\frac{H^2}{X^2},$$

$$3)\qquad \text{also}\quad X=\frac{H}{\sqrt{1+k\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Die Gleichung 2 ist in geschlossener Form nicht weiter integrierbar; man kann daher die Gleichung der Drucklinie nicht entwickeln, wohl aber die Krümmungshalbmesser ϱ derselben als Funktion des Neigungswinkels ϑ der Kurve berechnen.

Allgemein ist

$$\varrho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{\sec^3\vartheta}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Aus Gl. 1 ergibt sich ferner

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y\,(1+k\,\mathrm{tg}^2\vartheta)}{X},$$

woraus nach Gl. 3 wird:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y\,(1+k\,\mathrm{tg}^2\vartheta)^{3/2}}{H},\qquad \text{also}$$

$$\varrho=\frac{H\sec^3\vartheta}{y\,(1+k\,\mathrm{tg}^2\vartheta)^{3/2}}=\frac{H}{y\,(\cos^2\vartheta+k\sin^2\vartheta)^{3/2}}=\frac{H}{y\left[1-(1-k)\sin^2\vartheta\right]^{3/2}}.$$

Nennt man wieder den Krümmungshalbmesser im Scheitel r, so

entsteht für $\vartheta = 0$: $r = \frac{H}{y_0}$; es ist also wie bei der Drucklinie mit rein lotrechter Belastung (Gl. 4, S. 167)

$$H = r y_0 . \tag{4}$$

Durch Einführung dieses Wertes in die Gleichung für ϱ erhält man dann

$$\varrho = \frac{r y_0}{y[1-(1-k)\sin^2\vartheta]^{3/2}} . \tag{5}$$

Jetzt mufs noch die in Gl. 5 vorkommende Gröfse y als Funktion von ϑ ausgedrückt werden. Gl. 2 gibt aber, nach y aufgelöst, wenn man zugleich H mit $r y_0$ vertauscht:

$$y = y_0 \sqrt{1 + \frac{2}{k}\frac{r}{y_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + k\,\mathrm{tg}^2\vartheta}}\right]} ,$$

also nach Gl. 5

$$\frac{\varrho}{y_0} = \frac{r/y_0}{[1-(1-k)\sin^2\vartheta]^{3/2}\sqrt{1 + \frac{2}{k}\frac{r}{y_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + k\,\mathrm{tg}^2\vartheta}}\right]}} . \tag{6}$$

Für $\varphi = 30^0$ ist $k = 1/3$, für $\varphi = 36^0 40'$ ist $k = 1/4$. Bei gegebenem k und bestimmtem r/y_0 liefert Gl. 6 die Gröfse ρ/y_0 als Funktion von ϑ, so dafs man mittels dieser Gleichung die Drucklinie annäherungsweise aus kleinen Kreisbögen zusammensetzen kann.

Unter der Annahme, dafs sich die Spannkräfte gleichmäfsig über den Querschnitt verteilen, wird die Spannung im Scheitel $H : d_0$, diejenige an beliebiger Stelle $X \sec\vartheta : d$, wenn d_0 und d die betreffenden Gewölbstärken sind. Für gleiche Spannung mufs dann $\frac{d}{d_0} = \frac{X \sec\vartheta}{H}$ werden und nach Gl. 3:

$$\frac{d}{d_0} = \frac{\sec\vartheta}{\sqrt{1 + k\,\mathrm{tg}^2\vartheta}} = \frac{1}{\sqrt{1-(1-k)\sin^2\vartheta}} . \tag{7}$$

Bei dieser Belastung durch Erde wird die wagerechte Spannkraft $X = H - 1/2\, k (y^2 - y_0^2)$ mit wachsendem y kleiner und ist an einer bestimmten Stelle gleich Null. Hier ist dann die Richtung der Drucklinie lotrecht, $\vartheta = 90^0$; nennt man die Gewölbstärke an dieser Stelle d_1, so wird nach Gl. 7

$$\frac{d_1}{d_0} = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \text{also für} \quad k = \frac{1}{4} : \frac{d_1}{d_0} = 2 .$$

Für **Wasserbelastung** oder $k = 1$ geht Gl. 5 über in

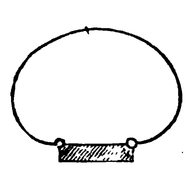
$$\varrho = \frac{r\,y_0}{y} \quad \text{oder} \quad \varrho\,y = r\,y_0, \qquad \text{d. h.}$$

die Krümmung nimmt proportional der Tiefe zu, während Gl. 7 liefert

$$d = d_0.$$

Die Drucklinie hat die Form der Fig. 89.*)

Fig. 89.



Ist die Tiefe y_0 des Scheitels unter dem Wasserspiegel sehr grofs gegen die Höhenerstreckung der Drucklinie, so kann $y = y_0$ angesehen werden, und es wird dann $\varrho = r$, die Drucklinie also ein Kreis.



Annäherungs-Gleichung der Drucklinie für Erdbelastung, nach L. Dyrfsen.**) Die Momentengleichung führt unmittelbar zur Gleichung der Drucklinie, wenn man sich entschliefst, das Gewicht des Erdkörpers CPQ (Fig. 90) so in die Rechnung einzuführen, als wäre der Bogen CP eine Parabel. Zählt man die Koordinaten vom Scheitel C aus, so ist die Fläche des Parabeldreiecks

$$CPQ = {}^1\!/_3\, x\,y$$

mit dem Schwerpunktsabstande ${}^1\!/_4\, x$ von P. Nennt man die Scheitelüberschüttung z_0, so gilt nach der Figur in Bezug auf P

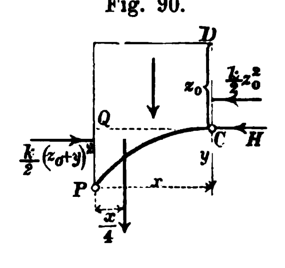
$$H\,y = \frac{k}{6}\left[(z_0 + y)^3 - z_0^2\,(z_0 + 3\,y)\right] + \frac{z_0\,x^2}{2} + \frac{1}{3}\,x\,y \cdot \frac{x}{4}, \quad \text{also wird}$$

$$1) \qquad x^2 = \frac{H\,y - {}^1\!/_6\, k\,y^2\,(3\,z_0 + y)}{{}^1\!/_2\, z_0 + {}^1\!/_{12}\, y} = \frac{2\,y\,[6\,H - k\,y\,(3\,z_0 + y)]}{6\,z_0 + y}.$$

Sind für einen bestimmten Punkt $x = {}^1\!/_2\, l$ und $y = f$ gegeben, so ergibt sich daraus

$$2) \qquad H = \frac{l^2}{8}\left(\frac{z_0}{f} + \frac{1}{6}\right) + \frac{k}{2}\,f^2\left(\frac{z_0}{f} + \frac{1}{3}\right).$$

Fig. 90.



Beispiel: Für $k = {}^1\!/_4$; $l = 10^{\text{m}}$; $f = 7{,}5^{\text{m}}$; $z_0 = 10^{\text{m}}$ wird $H = 30{,}496$ und

$$x^2 = \frac{y\,[365{,}628 - {}^1\!/_2\, y\,(30 + y)]}{60 + y}.$$

Damit erhält man folgende Koordinaten

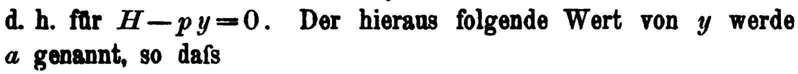
$y =$	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
$x =$	1,72	2,40	3,28	3,88	4,31	4,62	4,84	4,97	5,01.

*) Vergl. A. Ritter, Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik, 1. Aufl., S. 376.

**) Profilformen und Abmessungen von Bauwerken in höheren Dämmen, von L. Dyrfsen; Zeitschrift für Bauwesen, 1884, S. 457.

Drucklinie für Erdbelastung bei sehr großer Überschüttungshöhe. Ist z_0 sehr groß gegenüber der Höhenausdehnung der Drucklinie, so kann für die Ermittelung der Last und des Seitendruckes die Tiefe z eines Punktes gleich z_0 gesetzt werden. Dann ist der lotrechte Druck auf eine wagerechte Ebene $q = z_0$, der wagerechte Druck auf eine lotrechte Ebene $p = k z_0$. Unter Vernachlässigung des Gewichts des Erdkörpers CPQ (Fig. 91) lautet dann die Momentengleichung in Bezug auf P:

Fig. 91.



1) $$H y = {}^1\!/_2\, q\, x^2 + {}^1\!/_2\, p\, y^2 .$$

Ferner ist

2) $$X = H - p y ,$$

3) $$Y = q x \quad \text{und}$$

4) $$\frac{dy}{dx} = \frac{q x}{H - p y} .$$

Die Drucklinie steht lotrecht für $dy : dx = \infty$, d. h. für $H - p y = 0$. Der hieraus folgende Wert von y werde a genannt, so daß

5) $$H = p a .$$

Setzt man dies in Gl. 1 ein, so ergibt sich

$$2 p a y = q x^2 + p y^2 .$$

Dies ist die Scheitelgleichung einer Ellipse. Vertauscht man nämlich y mit $a - y'$, so entsteht

6) $$\left(\frac{y'}{a}\right)^2 + \frac{x^2}{p/q\, a^2} = 1 .$$

Die wagerechte Halbachse ist

7) $$b = a \sqrt{p/q} = a \sqrt{k} .$$

Für $x = b$ (im Punkte A) muß $X = 0$ sein; zugleich ist (nach Gl. 3) $Y = q b$; dies stellt die gesamte Spannkraft im Punkte A dar. Die Spannkräfte bei A und C haben also das Verhältnis $q b : H$, oder (nach Gl. 5)

$$q b : p a = q a \sqrt{k} : q k a = 1 : \sqrt{k} .$$

Für die Gewölbstärken bei A und C bekommt man also wieder

$$d_1 : d_0 = 1 : \sqrt{k} .$$

Für $k = {}^1\!/_4$ ist der Seitendruck p ein Viertel des lotrechten Druckes, das Achsenverhältnis der Ellipse $a : b = 2$ und $d_1 : d_0 = 2$.

Für Wasser ist $k = 1$, also $p = q$, $a = b$ und $d_1 = d_0$.

VIII. Besondere Formen des Vollwandträgers auf zwei Stützen.

a) Innere Kräfte eines Trägers mit nicht parallelen Gurtungen.

Unter einem „Vollwandträger“ soll in folgendem ein solcher mit im allgemeinen I-förmigen Querschnitt, d. h. ein Träger mit verhältnismäfsig dünner, oben und unten durch eine Gurtung abgeschlossener Wand verstanden werden.

Bei einem derartigen Träger mit parallelen Gurtungen bilden die Normalspannkräfte in einem Querschnitt in ihrer Gesamtheit ein Kräftepaar (vergl. Fig. 92). Das der Biegung widerstehende Spannungsmoment wird im wesentlichen nur von den Gurtungen über deren Querschnitte man die Normalspannungen annähernd gleichmäfsig verteilt annehmen kann. $N=\sigma F$ ist dann die in jedem Gurtquerschnitt wirkende Normalspannkraft und, wenn die Schwerpunkte der Querschnitte um h voneinander abstehen, sind das Spannungsmoment

Fig. 92.

$$M=N\cdot h \quad \text{und} \quad \sigma=N:F.$$

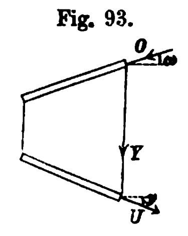
Der Scherwiderstand $T=Q$ wird in der Hauptsache von der Trägerwand geleistet und verteilt sich ziemlich gleichmäfsig über dieselbe. Die mittlere Scherspannung ist

$$\tau_m=\frac{Q}{\delta\cdot h},$$

wenn δ die Wanddicke bezeichnet.

Sind die Gurten eines Trägers nicht parallel, haben ihre Mittellinien vielmehr einen veränderlichen Abstand h voneinander, so wirken die Gurtspannkräfte O und U (Fig. 93) in der Längsrichtung der Gurtungen und schliefsen mit der Wagerechten die Winkel ω und ν ein. Die Verteilung der Gurtspannkräfte über die Gurtquerschnitte werde ebenso annähernd gleichmäfsig vorausgesetzt, als der im Gleichgewicht der äufseren und inneren Kräfte von der Trägerwand zu leistende Scherwiderstand über die Höhe der Wand.

Fig. 93.



Ist nun, wie bisher, M die Momentsumme der äufseren Kräfte, bezogen auf einen Punkt des Querschnittes, Q die Gröfse der Resultierenden aller äufseren Kräfte am linksseitigen Trägerstücke (Q mit der Richtung aufwärts gedacht), so verlangt das Gleichgewicht (siehe Fig. 94):

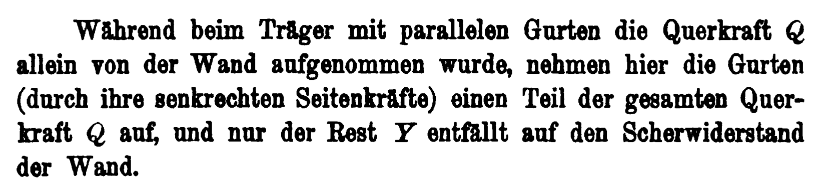
Fig. 94.

$$O\cos\omega = U\cos\nu,$$

1) $$O\cos\omega\cdot h = U\cos\nu\cdot h = M,$$

2) $$Y = Q - (O\sin\omega + U\sin\nu).$$

Die wagerechten Seitenkräfte der Gurten bilden also mit dem Hebelarme h das Widerstandsmoment.



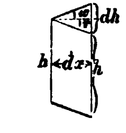
Während beim Träger mit parallelen Gurten die Querkraft Q allein von der Wand aufgenommen wurde, nehmen hier die Gurten (durch ihre senkrechten Seitenkräfte) einen Teil der gesamten Querkraft Q auf, und nur der Rest Y entfällt auf den Scherwiderstand der Wand.

Die Gurtkräfte O und U sind nach Gl. 1 aus dem Momente M unmittelbar zu berechnen, nämlich $O = \frac{M}{h\cos\omega}$, $U = \frac{M}{h\cos\nu}$.

Durch Einführung dieser Werte entsteht aus Gl. 2:

$$Y = Q - \frac{M}{h}(\operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg}\nu).$$

Fig. 95.



Ist nun (Fig. 95) dh die Zunahme der Trägerhöhe auf ein Längenteilchen dx, so wird $dh = dx(\operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg}\nu)$, mithin

3) $$Y = Q - \frac{M}{h}\frac{dh}{dx}.$$

Für $\frac{dh}{dx} \gtreqless 0$ ist $Y \lesseqgtr Q$.

Nach Bd. I S. 178 Gl. 1 ist die Querkraft $Q = \frac{dM}{dx}$, folglich $Y = \frac{dM}{dx} - \frac{M}{h}\frac{dh}{dx}$; dies kann aber noch kürzer geschrieben werden. Es ist nämlich

$$d\left(\frac{M}{h}\right) = \frac{dM}{h} - M\frac{dh}{h^2} = \frac{1}{h}\left(dM - M\frac{dh}{h}\right),$$

so dafs

$$Y = h \frac{d\left(\frac{M}{h}\right)}{dx} \quad \text{entsteht.} \tag{4}$$

Ändern sich nun M und h in gleichem Verhältnisse, wird $M:h$ unveränderlich, so wird $Y = 0$.

Bei derjenigen Belastungsart also, bei welcher sich Moment und Trägerhöhe in gleichem Verhältnis ändern, ist die Wandscherkraft gleich Null.

b) Einflufslinien eines einfachen Trägers mit nicht parallelen Gurten.

Einflufslinien für die Gurtkräfte O und U. Da

$$O = \frac{M}{h \cos \omega}, \quad U = \frac{M}{h \cos \nu},$$

so sind die Einflufslinien für diese von derselben Form wie diejenigen für M (s. Bd. I S. 158 Fig. 122), die Ordinaten sind nur durch $h \cos \omega$ bezw. $h \cos \nu$ zu teilen. Man trage daher am linksseitigen Auflager nicht x, sondern $\frac{x}{h \cos \omega}$ bezw. $\frac{x}{h \cos \nu}$ auf und verfahre im übrigen wie früher (Fig. 96 b). Diese Verhältniszahlen sind nach einem willkürlichen Mafsstabe aufzuzeichnen. **Bezüglich der ungünstigsten Belastungsart für die Gurtkräfte gilt hiernach dasselbe wie für das Biegungsmoment.**

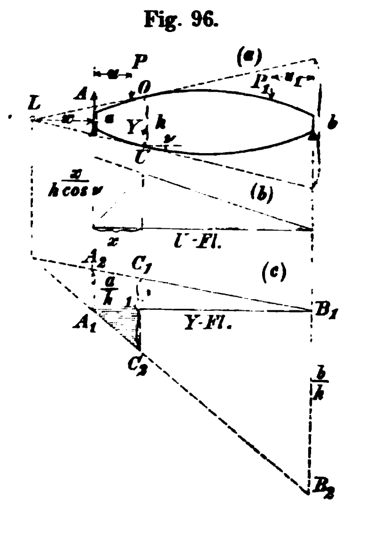


Fig. 96.

Einflufslinie für die Wandscherkraft Y. Um Y zu finden, verlängert man die Richtungen der Gurtkräfte O und U (Tangenten an die Mittellinien der Gurten) bis zum Schnittpunkte L und stellt in Bezug auf diesen die Momentengleichung auf; in dieser kommen dann O und U nicht vor, und Y ist die einzige Unbekannte. Daher ist die Lage

dieses Drehpunktes L mafsgebend, u. zw. werde zunächst L links von der Spannweite, im Abstande w von A, angenommen (Fig. 96 a).

Die Lasten P und P_1 bedingen den Auflagerdruck

$$A = P - P\frac{u}{l} + P_1\frac{u_1}{l},$$

und es wird dann

$$Y(w + x) = Aw - P(w + u) = -Pu\left(1 + \frac{w}{l}\right) + P_1 u_1 \frac{w}{l}.$$

Setzt man $P = 0$, $P_1 = 1$, so wird die Einfluß-Ordinate rechts vom Schnitte

$$\eta_1 = \frac{u_1 w}{l(w + x)};$$

setzt man aber $P_1 = 0$, $P = 1$, so wird die linksseitige Einflufs-Ordinate

$$\eta = \frac{u}{l}\frac{w + l}{w + x}.$$

Macht man nun (Fig. 96 c) $A_1 A_2 = \frac{w}{w + x}$, $B_1 B_2 = \frac{w + l}{w + x}$, zieht $A_1 C_2 B_2$ und $B_1 C_1 A_2$, so bilden die Stücke $A_1 C_2$ und $B_1 C_1$ die Einflufslinie. Links vom Schnitte sind die Einflüsse negativ, rechts positiv. Da die Abschnitte $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ sich verhalten wie w zu $w + l$, so ist ersichtlich, dafs die beiden Stücke der Einflufslinie sich auf einer Senkrechten durch den Drehpunkt L schneiden müssen. — Schneiden die Richtungen von O und U (Fig. 96 a) auf den Stützensenkrechten die Stücke a und b ab, so ist $w : w + x = a : h$, $w + l : w + x = b : h$, man kann daher in Fig. 96 c auch

$$A_1 A_2 = \frac{a}{h}, \quad B_1 B_2 = \frac{b}{h} \quad \text{auftragen.}$$

Wählt man den Schnitt in der Nähe des rechtsseitigen Auflagers, so dafs die Richtungen von O und U sich rechts von der Spannweite schneiden, so wird $a > b$; die Einflufsfigur ändert sich dem entsprechend, doch bleiben nach wie vor die Einflüsse rechts vom Schnitte positiv, links negativ, so dafs der gröfste positive Wert der Wandscherkraft Y_{max} bei einseitiger Belastung rechts vom Schnitte, dagegen Y_{min} bei einseitiger Belastung links vom Schnitte entsteht; es gelten daher für Y dieselben Belastungsgesetze wie für Q_x Bd. I S. 160 u. f.

Ist aber der Träger so gestaltet, dafs die Richtungen der Gurtkräfte O und U einer Schnittstelle sich innerhalb der Spannweite schneiden, so ergibt sich (nach Fig. 97):

$$Y(w-x) = Pu\left(1-\frac{w}{l}\right)+P_1 u_1 \frac{w}{l};$$

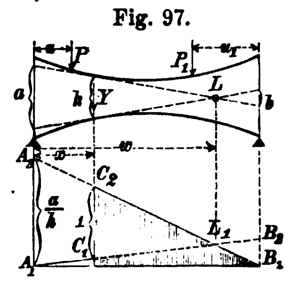


Fig. 97.

die Einflufs-Ordinaten links und rechts vom Schnitte werden

$$\eta = \frac{u}{l}\frac{l-w}{w-x} = \frac{u}{l}\frac{b}{h} \quad \text{bezw.}$$

$$\eta_1 = \frac{u_1}{l}\frac{w}{w-x} = \frac{u_1}{l}\frac{a}{h},$$

d. h. beide positiv. Um die Einflufslinien zu erhalten, hat man $A_1 A_2 = a/h$, $B_1 B_2 = b/h$ beide nach der positiven Seite aufzutragen und im übrigen zu verfahren wie früher. $A_1 B_2$ und $B_1 A_2$ schneiden sich wieder in L_1 auf der Senkrechten durch L. Liegt der Schnitt näher an dem rechten Auflager, so dafs sich L links vom Schnitte ergibt, so findet man, dafs die Einflufs-Ordinaten durchweg negativ werden, dafs man a/h und b/h beide nach der negativen Seite aufzutragen hat.

An der Schnittstelle ändert sich in allen Fällen die Gröfse der Einflufs-Ordinate für Y um die Lasteinheit $C_1 C_2$, denn während sich die Lasteinheit von rechts nach links über die Schnittstelle hinweg bewegt, tritt sie plötzlich als neue Kraft zu den Kräften am linksseitigen Abschnitte hinzu und mufs, da sie in diesem Augenblicke genau mit Y zusammenfällt, diese Kraft um ihre eigene Gröfse entlasten, d. h. vermindern.

Für den gewöhnlichen Fall, dafs der Schnittpunkt L der Gurtrichtungen aufserhalb der Spannweite liegt, gilt daher für die Wandscherkraft Y dasselbe Belastungsgesetz wie für die Querkraft Q_x: es entstehen Y_{max} und Y_{min} bei einseitiger Belastung. Liegt aber der Drehpunkt L (ausnahmsweise) innerhalb der Spannweite, so ist Y für volle Belastung zu berechnen.

c) Parabolischer Träger.

Stellt man die Bedingung, dafs bei gleichmäfsiger Belastung des ganzen Trägers die Wandscherkraft Y an allen Stellen ver-

schwinde, so mufs nach Gl. 4 S. 208 die Trägerhöhe h sich in gleichem Verhältnisse mit dem Momente, d. h. nach parabolischem Gesetz ändern, weil bei dieser Belastungsart die Darstellung der Momente eine Parabel ist. Die Gleichung für das Moment lautet:

$$M = {}^1/_2\, q x (l - x), \text{ mithin wird } h = {}^1/_2\, q x (l - x) \cdot C.$$

Ist nun für $x = {}^1/_2\, l$ die Trägerhöhe in der Mitte und zugleich die gröfste Trägerhöhe $h = h_m$, so wird $h_m = {}^1/_8\, q l^2 \cdot C$, mithin nach Entfernung von C:

$$1)\qquad h = \frac{4 h_m}{l^2} x (l - x) = h_m \frac{x}{l/_2} \frac{l - x}{l/_2}.$$

Ein nach dieser Gleichung gestalteter Träger heifst **parabolischer Träger.** Dem einen Gurte kann man beliebige Form geben, nur mufs die von diesem aus gemessene lotrechte Trägerhöhe dem Parabelgesetze (Gl. 1) folgen. Gewöhnlich macht man aber einen Gurt gerade, den anderen parabolisch, oder beide parabolisch, u. zw. mit Krümmung nach entgegengesetzten Seiten oder (seltener) nach derselben Seite (Sichelträger).

Fig. 98.

Unter Annahme einer gleichmäfsigen ständigen Last g und einer ebenfalls gleichmäfsigen beweglichen Last p sollen nun die gröfsten Werte der Gurtkräfte und der Wandscherkraft ermittelt werden.

Die **Gurten** erhalten die stärksten Spannungen bei voller Belastung mit $g + p = q$; das Moment an einer Schnittstelle ist dann ${}^1/_2\, q x (l - x)$. Nach S. 207 bilden die wagerechten Seitenkräfte der Gurten $O \cos \omega = U \cos \nu$, die wir nun H nennen wollen, mit dem Hebelarme h das Widerstandsmoment. Daher wird

$$H h = {}^1/_2\, q x (l - x);$$

setzt man hier den Wert von h aus Gl. 1 S. 211 ein, so entsteht

$$2)\qquad H = \frac{q l^2}{8 h_m}.$$

D. h.: **Bei voller Belastung hat die wagerechte Seitenkraft der Gurten eines parabolischen Trägers längs der ganzen Trägerlänge den gleichen Wert.** Derselbe ist leicht zu berechnen, indem man das Moment ${}^1/_8\, q l^2$ in der Mitte durch die Trägerhöhe h_m in der Mitte teilt.

Die Gurtkräfte selbst sind

$$O = H \sec\omega, \qquad U = H \sec\nu.$$

Ist der eine Gurt (beispielsweise der untere) gerade, so ist dessen Spannkraft überall von der gleichen Gröfse H. In dem anderen parabolischen Gurte herrscht in der Mitte auch die Kraft H, nach den Auflagern nimmt aber die Gurtkraft O mit $\sec\omega$ zu. An den Enden ist (Fig. 98 *a*)

$$\operatorname{tg}\omega_1 = 2h_m : \tfrac{1}{2}l = \frac{4h_m}{l}, \quad \text{mithin} \quad \sec\omega_1 = \sqrt{1 + \frac{16h_m^2}{l^2}}.$$

Für $h_m = \tfrac{1}{8}l$ ist beispielsweise $\sec\omega_1 = \sqrt{5/4} = 1{,}12$, d. h. die Gurtkraft nimmt von der Mitte nach den Enden hin um 12 % zu.

Verteilt sich die Pfeilhöhe gleichmäfsig auf beide Gurten (Fig. 98 *b*) so wird

$$\operatorname{tg}\omega_1 = \frac{2h_m}{l} \quad \text{und} \quad \sec\omega_1 = \sqrt{1 + \frac{4h_m^2}{l^2}}.$$

Ist daher wieder $h_m = \tfrac{1}{8}l$, so wird $\sec\omega_1 = \sqrt{1 + 1/16} = 1{,}03$, oder die Zunahme der Gurtkraft beträgt in diesem Falle nur 3 %.

Die **Wandscherkraft** erreicht ihren gröfsten Wert Y_{max} bei einseitiger Belastung rechts vom Schnitte. Die ständige Belastung g der ganzen Trägerlänge bringt aber nach der Grundbedingung des parabolischen Trägers die Wandscherkraft $Y = 0$ hervor, so dafs hier nur die bewegliche Last p in Frage kommt.

Für die Lage des Drehpunktes L gilt nach Fig. 99:

$$\frac{h}{w+x} = \frac{dh}{dx} = \frac{4h_m}{l^2}(l - 2x)$$

Fig. 99.

(nach Gl. 1); also

$$w + x = \frac{hl^2}{4h_m(l-2x)} = \frac{x(l-x)}{l-2x},$$

mithin $$w = \frac{x^2}{l-2x}$$ und

$$3) \qquad \frac{w}{w+x} = \frac{x}{l-x}.$$

Daraus ergibt sich nach S. 209 die in Fig. 99 gezeichnete Einflufsfigur für Y. Die positive Einflufsordinate an der Schnittstelle beträgt $\frac{x}{l-x}\frac{l-x}{l} = \frac{x}{l}$, der Inhalt der gesamten positiven

Einflufsfläche also $\frac{x}{l}\frac{l-x}{2}$, die Einwirkung der rechtsseitigen Belastung daher $Y_{max} = \frac{p}{2}\frac{x(l-x)}{l}$. Da hierin das parabolische Glied $x(l-x)$ vorkommt, so kann man dieses nach Gl. 1 durch $\frac{h\,l^2}{4\,h_m}$ ersetzen und erhält kürzer

4) $$Y_{max} = \frac{p\,l}{8}\frac{h}{h_m}.$$

Y_{min} entsteht, wenn die Strecke links vom Schnitte mit p belastet ist. Die negative Einflufsfläche in Fig. 99 mufs aber mit der positiven den gleichen Inhalt haben, weil ja eine gleichmäfsige Belastung des g a n z e n Trägers Y zu Null macht; daher ist $Y_{min} = -Y_{max}$ und

5) $$Y_{\substack{max\\min}} = \pm\frac{p\,l}{8}\frac{h}{h_m};$$

oder: **Die gröfste positive und die gröfste negative Wandscherkraft haben beim parabolischen Träger gleichen absoluten Wert und ändern sich in gleichem Verhältnisse mit der Trägerhöhe h der betreffenden Schnittstelle.**

In der Trägermitte, wo die Gurten parallel, ist die Wandscherkraft Y_{max} gleichbedeutend mit der Querkraft Q_{max}; letztere hat aber nach Bd. I S. 161 (und wie sich leicht ohne weiteres berechnen läfst) den Wert $\frac{1}{8}\,p\,l$; hat man sich daher nur gemerkt, dafs beim parabolischen Träger Y_{max} mit h verhältnisgleich ist, so kann man Gl. 5 ohne besondere Rechnung leicht anschreiben.

Nimmt man an, dafs die Scherkraft Y_{max} sich gleichmäfsig über die Wandhöhe h verteilt, so kommt (bei der Wandstärke δ) auf die Flächeneinheit eine mittlere Scherspannung

$$\tau_m = \frac{p\,l}{8\,h_m\,\delta}.$$

Mit Rücksicht darauf, dafs diese überall gleiche Schubspannung an jedem Schnitte mit einer starken Normalspannung der Gurten zusammentrifft, wähle man für τ_m etwa $^4/_{10}$ der zulässigen Anstrengung, setze also $\tau_m = 0{,}4\,s$; dann erhält man als erforderliche Wandstärke

$$\delta = \frac{1}{8}\frac{p\,l}{0{,}4\,s\,h_m}.$$

Von Interesse ist der Vergleich des parabolischen Trägers mit dem Parallelträger (dem Träger mit parallelen Gurten).

Beim Parallelträger nehmen die Gurten im wesentlichen nur das Moment auf; wegen der unveränderlichen Höhe h_m ändern sich die Gurtkräfte verhältnisgleich mit dem Momente, nehmen daher von der Mitte nach dem Ende hin von dem gröfsten Werte $\frac{q l^2}{8 h_m}$ bis auf Null ab, u. zw. nach parabolischem Gesetze. — Die Wand hat die ganze Querkraft Q aufzunehmen, welche in der Mitte am kleinsten ist, nämlich $\pm {}^1/_8 p l$, nach den Enden aber auf das Vierfache (bis zu ${}^1/_2 q l$) zunimmt.

Beim parabolischen Träger findet eine Abnahme der Gurtkräfte nach den Enden hin nicht statt, vielmehr behält deren wagerechte Seitenkraft durchweg denselben Wert $H = \frac{q l^2}{8 h_m}$, und die Gurtkräfte selbst nehmen, wenigstens in einem gekrümmten Gurt, nach den Auflagern hin sogar um einige Hundertstel zu. — Die Wandscherkraft hat in der Mitte (naturgemäfs) denselben Wert wie beim Parallelträger, erfährt aber nach den Auflagern hin nicht etwa eine erhebliche Zunahme, sondern vielmehr eine Abnahme bis auf Null.

d) Pauli'scher Träger.

Wurden beim parabolischen Träger beide Gurten symmetrisch gekrümmt, so betrug die Zunahme der Gurtkraft nach den Enden hin bei $h_m = {}^1/_8 l$ nur etwa 3% (S. 212). Daraus kann man schliefsen, dafs eine geringe Formänderung es ermöglichen wird, überall gleiche Gurtkräfte zu bekommen. Dieser Bedingung genügt der von dem Ingenieur Pauli ersonnene Träger.

An beliebiger Schnittstelle ist $O \cos\omega\, h = {}^1/_2 q x (l - x)$ (Fig. 100). Dieselbe Spannkraft O soll nun auch in der Mitte sich finden, so dafs auch $O h_m = {}^1/_8 q l^2$. Aus beiden Gleichungen folgt für die Trägerhöhe an beliebiger Stelle

Fig. 100.

$$h = \frac{4 h_m}{l^2} x (l - x) \sec\omega .$$

Darin ist ω noch unbekannt; es ist nämlich $\operatorname{tg}\omega = \frac{d\left(\frac{h}{2}\right)}{dx}$ und

$$\sec\omega = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\frac{dh^2}{dx^2}}, \quad \text{so dafs}$$

$$h = \frac{4 h_m}{l^2} x (l - x) \left(1 + \frac{1}{4}\frac{dh^2}{dx^2}\right)^{1/2} \quad \text{wird.} \tag{1}$$

Dies ist die Differentialgleichung des Pauli'schen Trägers (weil aufser h und x auch $dh:dx$ vorkommt); dieselbe läfst sich in geschlossener Form nicht lösen. Weil aber, wie oben bemerkt, der Träger nur wenig von dem parabolischen abweichen kann, so ist es genau genug, den immerhin nur kleinen Wert $dh:dx$ annäherungsweise von der Gleichung des parabolischen Trägers zu entnehmen und in Gl. 1 einzusetzen. Dann folgt aus $h = \frac{4\,h_m}{l^2}\,x(l-x)$:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{4\,h_m}{l}\left(1 - \frac{2\,x}{l}\right)$$

$$\text{und} \quad \left(1 + \frac{1}{4}\frac{dh^2}{dx^2}\right)^{1/2} = \left\{1 + \frac{4\,h_m^2}{l^2}\left(1 - \frac{2\,x}{l}\right)^2\right\}^{1/2}.$$

Ist aber $h_m : l \leqq 1/8$, so wird

$$\frac{4\,h_m^2}{l^2}\left(1 - \frac{2\,x}{l}\right)^2 \leqq \frac{1}{16},$$

so dafs man zur weiteren Abkürzung noch

$$\left(1 + \frac{1}{4}\frac{dh^2}{dx^2}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{8}\frac{dh^2}{dx^2} - + \ldots .$$

mit alleiniger Benutzung der beiden ersten Glieder setzen kann. Dann entsteht

$$h = \frac{4\,h_m}{l^2}\,x(l-x)\left\{1 + \frac{2\,h_m}{l^2}\left(1 - \frac{2\,x}{l}\right)^2\right\}$$

als Annäherungsgleichung des Pauli'schen Trägers.

Da die Trägerform nur wenig von der des parabolischen Trägers abweicht, so können natürlich auch die Eigenschaften beider nur wenig voneinander verschieden sein. Die Wandscherkraft Y, deren gröfster absoluter Wert beim parabolischen Träger so klein war, wie überhaupt nur möglich, wird hier etwas gröfser ausfallen. Allgemeine Gleichungen dafür werden reichlich verwickelt, man kann aber in jedem besonderen Falle für jede Schnittstelle leicht die Lage des Drehpunktes L und darnach die Einflufsfigur für Y bestimmen, woraus sich dann Y_{max} und Y_{min} ergeben. Die ständige Belastung hat hier auch einen, allerdings nur geringen, Einflufs auf Y.

Vierter Abschnitt.

Elastizität und Festigkeit ebener Fachwerke, der Fachwerksbalken.

I. Begriffserklärung, Entstehung und allgemeine statische Eigenschaften ebener Fachwerke.

a) Begriffserklärung und Voraussetzungen.

Im zweiten und dritten Abschnitt wurden die unter der Wirkung äufserer Kräfte in einem stabförmig geraden, bezw. einfach gekrümmten Stabe entstehenden Spannungen und Formänderungen untersucht. Hier ist die gleiche Aufgabe für eine Verbindung von Stäben zu einem sogenannten Fachwerk zu lösen.

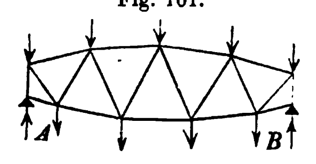
Unter einem Fachwerk in statischem Sinne als Bauwerk soll in folgendem ein System von Stäben verstanden werden, die an ihren Enden gelenkartig und in solcher Anordnung miteinander verbunden sind, dafs das entstehende Stabgebilde unter der Voraussetzung völliger Starrheit der Stäbe durch den Angriff beliebiger äufserer Kräfte keinerlei Formänderung, in Wirklichkeit aber, d. h. bei der tatsächlich vorhandenen Elastizität der Stäbe und wenn die äufseren Kräfte ein gewisses Mafs nicht überschreiten, nur elastische Formänderungen erleidet. Die gemeinsamen Gelenk- oder Verbindungspunkte der Stäbe sind die sogenannten Knotenpunkte des Fachwerks. Ein derartiges auch als „steifes" Fachwerk bezeichnetes Stabgebilde unterliegt gegenüber dem Angriff äufserer Kräfte genau denselben Gleichgewichtsbedingungen, wie ein starrer, bezw. elastisch fester Körper.

Das gebräuchliche Fachwerk besteht meistens aus geraden Stäben und nur in seltenen Ausnahmefällen kommen auch einfach

gekrümmte Stäbe in Anwendung. Liegen die Mittellinien bezw. Achsen aller Stäbe und somit namentlich auch alle Gelenkpunkte in einer Ebene, so wird das Stabgebilde ein „ebenes“, andernfalls ein „räumliches“ Fachwerk genannt. Das hier allein zu behandelnde ebene Fachwerk kann, wie leicht ersichtlich, nur im Gleichgewicht sein, bezw. seine Form nur aufrecht erhalten gegenüber Kräften, welche in seiner Ebene wirken; nur solche vermögen sich in ihrer Wirkung auf das Fachwerk, bezw. durch Vermittelung desselben gegenseitig wie an einem starren Körper aufzuheben.

Wird ein ebenes Fachwerk in einzelnen Punkten unterstützt und dadurch einem etwaigen Kräfte- oder Lastenangriff in seiner Ebene gegenüber festgehalten, so entsteht der ebene Fachwerkbalken (Fig. 101).

Fig. 101.



Die Frage, ob nach der Art der Unterstützung der äufsere Gleichgewichtszustand des steifen Fachwerkbalkens ein statisch bestimmter oder statisch unbestimmter ist, mufs nach den gleichen Gesichtspunkten entschieden werden, welche im dritten Abschnitt unter I für den ebenen Vollwandbalken dargelegt sind. Handelt es sich danach um einen äufserlich, d. h. hinsichtlich der äufseren Kräfte statisch bestimmten Fachwerkbalken, so hat auch die Ermittelung der Stützwiderstände wie beim statisch bestimmten Vollwandbalken zu geschehen.

Die Stäbe des Fachwerks nehmen wir zunächst gewichtslos an und setzen ferner voraus, dafs alle auf dasselbe wirkenden äufseren Kräfte in seinen Knotenpunkten angreifen. Dann kann der einzelne Stab nur in den Gelenkpunkten seiner Enden von Kräften getroffen werden, und wenn man von der Reibung in den Gelenken absieht, so verlangt das Gleichgewicht des Stabes für sich allein, dafs diese unter der Wirkung der äufseren Kräfte von dem umschliefsenden Fachwerk auf die Stabenden ausgeübten Kräfte einander entgegengesetzt gleich sind und in die Verbindungsgerade der Gelenkpunkte fallen. Im Gleichgewicht der äufseren und inneren Kräfte am ganzen Fachwerk hat der Stab einen gleich grofsen, entgegengesetzt gerichteten Spannungswiderstand, die sogenannte Stabkraft zu leisten, welche als Mittelkraft der in allen Stabquerschnitten auftretenden inneren Spannkräfte anzusehen ist. Je nachdem die Stabkräfte einer Vergröfserung oder einer Ver-

kleinerung der Abstände der beiden Gelenkpunkte entgegen zu wirken haben, sind sie Zug- oder Druckkräfte. Bei der Bestimmung der Stabkräfte empfiehlt es sich, zunächst alle als Zugkräfte einzuführen; ein sich ergebender positiver oder negativer Wert kennzeichnet dieselben dann als Zug- oder Druckkräfte. In besonderen Fällen freilich, wo über das Vorzeichen einer Gruppe von Stabkräften von vornherein ein Zweifel nicht besteht, ist es einfacher, von der Benutzung dieser Regel abzusehen. Bei der Bestimmung sowohl der äufseren Stützkräfte als der Stabspannkräfte können und sollen die elastischen Formänderungen des Fachwerkes aufser Acht bleiben und alle Kräfte in solcher Lage und Richtung angenommen werden, als wenn das Fachwerk völlig unelastisch, starr wäre.

Die Stabkräfte sind ihrer Richtung und Lage nach durch den geometrischen Zusammenhang des Fachwerkes gegeben; es bleibt nur ihre Gröfse zu ermitteln. Ist dies geschehen, so können die Spannungen in den einzelnen Stabquerschnitten, je nachdem die Verbindungsgerade der Gelenkpunkte mit der Stabachse zusammenfällt (wie meistens der Fall) oder nicht, nach den bekannten Regeln für zentrische oder exzentrische Zug- oder Druckbelastung berechnet werden.

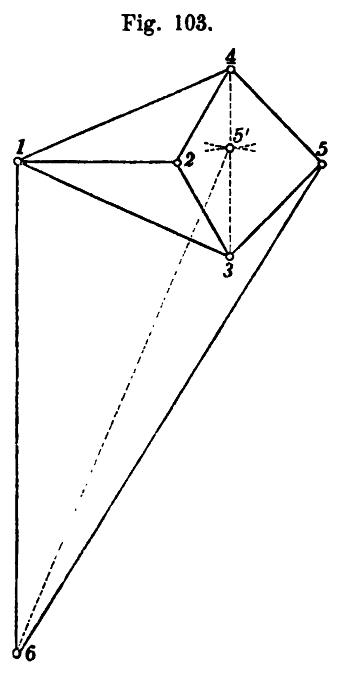
Die Stäbe, welche das Fachwerk oben und unten begrenzen, bilden den O b e r - bezw. U n t e r g u r t, welche beim Vollwandbalken auch vorkamen (S. 206). Die Spannkräfte dieser Gurten sollen hier ebenfalls mit O bezw. U, ihre Neigungswinkel gegen die Wagerechte mit ω und ν bezeichnet werden (Fig. 102). Die Stäbe, welche die Gurten miteinander verbinden (also die Wand des Vollwandträgers ersetzen), werden im allgemeinen W a n d g l i e d e r, F ü l l u n g s s t ä b e, G i t t e r s t ä b e genannt; die schräg stehenden Wandglieder nennt man im besonderen S t r e b e n oder D i a g o n a l e n und ihre Spannkraft D (mit dem Neigungswinkel δ gegen die Wagerechte), die etwa lotrecht stehenden aber S t ä n d e r, P f o s t e n oder V e r t i k a l e n mit der Spannkraft V. Übrigens sind die Ständer bei der Berechnung nur Sonderfälle der Streben mit $\delta = 90^{\circ}$.

Fig. 102.

b) Entstehung und allgemeine statische Eigenschaften ebener Fachwerke.

Wie geometrisch ein Dreieck durch seine drei Seiten eindeutig bestimmt ist, so bilden drei in Dreiecksform miteinander verbundene starre Gelenkstangen ein durch äufsere Kräfte in seiner Form nicht veränderliches Gelenkstangendreieck. Fügt man mehrere Gelenkstangendreiecke so aneinander, dafs je zwei benachbarte eine Seite, bezw. eine Gelenkstange gemeinsam haben, so entsteht das **einfache Dreiecksfachwerk** oder **Dreiecksnetz** (Fig. 101), die bei weitem am häufigsten ausgeführte Fachwerksform. Aus ihrer Entstehungsweise erkennt man ohne weiteres, dafs sie äufseren Kräften gegenüber starr, bezw. nur elastischer Formänderung fähig ist. Denn es ist von einem in sich unverschieblich starren Anfangsdreieck ausgehend, jeder weitere Knotenpunkt durch zwei Stangen gegen die Endpunkte einer Dreiecksseite unverschieblich festgelegt. Wie leicht ersichtlich, kann ein derart unverschieblicher Anschlufs weiterer Knotenpunkte an ein bereits vorhandenes starres Fachwerk je durch zwei Gelenkstangen allgemein auch in der Weise geschehen, dafs man die Verbindung jedesmal mit zwei **beliebigen** schon festliegenden Knotenpunkten herstellt (Fig. 103). Auch das so entstehende „**einfache Fachwerk**" mufs in sich unverschieblich starr sein; denn, wäre der mit dem Fachwerk 1 2 3 4 zu verbindende neue Knotenpunkt (5) nur durch einen Gelenkstab $\overline{4\,5}$ mit dem bereits festliegenden Knotenpunkte (4) verbunden, so würde er sich nur noch auf einem Kreisbogen um diesen bewegen können, seine Verbindung durch einen zweiten Gelenkstab $\overline{3\,5}$ mit dem zweiten Festpunkte (3) zwingt ihn gleichzeitig auf einen Kreisbogen um diesen Knotenpunkt und damit auf den Schnittpunkt 5 beider, also in eine bestimmte und

Fig. 103.



unveränderliche Lage. Ebenso ist der Punkt 6 durch Verbindung mit den beliebigen nicht einem Dreieck angehörigen Punkten 1 und 5 festgelegt. Eine gewisse kleine Bewegungsfreiheit würde den so angeschlossenen Knotenpunkten nur in dem Falle verbleiben, wo die drei Gelenkpunkte 3 5′ und 4 der beiden Anschlufsstäbe in eine gerade Linie fallen, jene beiden Kreisbögen sich also nicht schneiden, sondern tangieren. Ein derartiges, auch unter der Voraussetzung völlig starrer Stäbe nicht völlig unverschiebliches Fachwerk kann die statischen Bedingungen für das Gleichgewicht von Bauwerken gegenüber einem beliebigen Angriff äufserer Kräfte im allgemeinen nicht erfüllen und ist daher praktisch unbrauchbar. Auf die statischen Eigenschaften solcher auch in anderer Weise entstehender Fachwerke mit kleiner Beweglichkeit soll weiter unten noch näher eingegangen werden.

Das Bildungsgesetz für ein einfaches starres Fachwerk läfst sich also wie folgt aussprechen: Aus drei Stäben ist ein Gelenkstabdreieck zu bilden und alle weiteren Knotenpunkte sind je mit zwei Stäben an die bereits vorhandenen so anzuschliefsen, dafs beide Stäbe nicht dieselbe Richtung erhalten.*)

Ist bei einem so gebildeten starren Fachwerk n die Anzahl der Knotenpunkte, so ist die Zahl der Stäbe

$$s = 2n - 3\,.\text{**)}$$

Denn für das allereinfachste Fachwerk, das Gelenkstabdreieck, erkennt man die Richtigkeit dieser Beziehung ohne weiteres; es ist $3 = 2 \cdot 3 - 3 = 3$ die Zahl der Stäbe. Fügt man mit $2 \cdot r$ Stäben r Knotenpunkte hinzu, so steigt die Zahl der Stäbe auf $s = 3 + 2r$ und die Zahl der Knotenpunkte auf $n = 3 + r$. Es ist also

$$s = 3 + 2r = 2(r + 3) - 3 = 2n - 3\,.$$

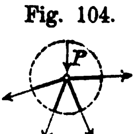
Ein derart gebildetes Fachwerk ist nun stets auch in sich statisch bestimmt, d. h. es lassen sich, wenn es unter dem Angriff äufserer Kräfte im Gleichgewicht steht, auch alle Stabkräfte mit Hülfe der statischen Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte in einer Ebene bestimmen. Denkt man sich nämlich an irgend einem Knotenpunkt

*) In der praktischen Geometrie entsteht in gleicher Weise aus der Verbindung von Punkten durch Gerade das Triangulationsnetz.

**) In der Geometrie bestimmen $2n - 3$ Seiten und Diagonalen das n-Eck.

des Fachwerks die ihn festhaltenden Stäbe durchschnitten und an den Schnittstellen die Stabkräfte als äufsere Kräfte angebracht, so müssen diese mit den am Knoten angreifenden äufseren Kräften im Gleichgewicht sein (Fig. 104). Da alle diese Kräfte einen gemeinsamen Angriffspunkt haben, so müssen sie zwei Gleichgewichtsgleichungen erfüllen. Daraus ergeben sich für n Knoten $2n$ Gleichungen. Da aber, wenn an allen n-Knotenpunkten Gleichgewicht herrscht, auch das ganze Fachwerk im Gleichgewicht sein mufs, so umfassen jene $2n$-Gleichungen auch das äufsere Gleichgewicht, das im allgemeinen durch 3 Gleichungen bestimmt ist. Es bleiben daher für die Ermittelung der $2n-3$ unbekannten Stabkräfte noch $2n-3$, also eine hinreichende Anzahl von Gleichungen verfügbar. Oder man kann auch wie folgt schliefsen: Wenn ein von Kräften in seiner Ebene ergriffenes Fachwerk in statisch bestimmter Weise gestützt wird, so sind 3 unbekannte äufsere Stützwerte und $2n-3$ unbekannte Stabkräfte zu ermitteln, was im allgemeinen mit $2n$-Gleichungen geschehen kann.

Fig. 104.



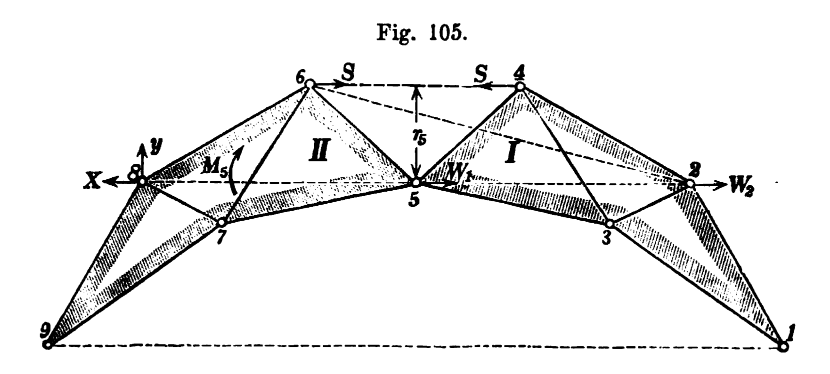
Ein nach obiger Regel gebildetes einfaches Fachwerk ist also sowohl „steif“ als auch in sich oder wie man sagt „innerlich statisch bestimmt“. Es entsteht nun die Frage, ob und wie auch etwa in anderer Weise steife und statisch bestimmte Fachwerke gebildet werden können.

Aus obigen Betrachtungen ergibt sich zunächst, dafs jedes „äufserlich“ statisch bestimmte, d. h. in statisch bestimmter Weise gestützte Fachwerk nur dann auch „innerlich“ statisch bestimmt sein kann, wenn die Anzahl der Stäbe nicht gröfser ist als $2n-3$. Ist sie kleiner, so ist das Fachwerk geometrisch unbestimmt und statisch nicht steif, sondern eine durch den Angriff äufserer Kräfte im allgemeinen veränderliche Figur, die für jede Änderung des Kräfteangriffs auch eine andere Gleichgewichtsform annimmt, also nur gegenüber einem bestimmten äufseren Kräfteangriff ihre Form aufrecht zu erhalten, im Gleichgewicht zu bleiben vermag. Wäre z. B. für ein solches Fachwerk von n-Knotenpunkten die Anzahl der Stäbe nur $2n-4$, so könnten die ebensoviel unbekannten Stabkräfte nur gleichviel, d. h. $2n-4$ Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, die äufseren Kräfte würden also von den im ganzen $2n$-Bedingungen noch 4, d. h. eine mehr zu erfüllen haben,

als dem Gleichgewicht von Kräften an einem starren Körper entsprechen; ein solches Fachwerk könnte also nur einem „bedingten“ äufseren Kräfteangriff gegenüber im Gleichgewicht sein.

Wir erkennen daher, dafs ein Fachwerk, damit es steif und zugleich statisch bestimmt sei, unter allen Umständen die Bedingung $s = 2n - 3$ erfüllen mufs. Es wird sich aber zeigen, dafs nicht auch umgekehrt, alle Fachwerke, welche diese Bedingung erfüllen, wirklich stets auch steif und statisch bestimmt sind, sondern unter Umständen gleichzeitig einerseits geometrisch unbestimmt und statisch nicht steif, andererseits aber geometrisch überstimmt und statisch unbestimmt sein können. Bei zweckmäfsiger Anordnung der Stäbe aber läfst sich immer mit $2n - 3$ Stäben ein steifes und in sich statisch bestimmtes Fachwerk mit n-Knotenpunkten bilden, ohne dafs das oben für das „einfache“ Fachwerk ausgesprochene Bildungsgesetz befolgt wird. Wie das geschehen und wie bei beliebig gebildeten ebenen Fachwerken von $2n - 3$ Stäben die Steifheit und statische Bestimmtheit untersucht werden kann, soll in folgendem einer vorläufigen Betrachtung unterzogen werden.

Fig. 105.



Verbindet man zwei steife Fachwerke oder gegliederte Scheiben I und II (Fig. 105) so miteinander, dafs sie einen Knotenpunkt gemeinsam haben, so ist, wie man ohne weiteres erkennt, das entstehende ebene Stabgebilde statisch nicht steif, vielmehr in sich verschieblich, ein Ergebnis, das auch mit dem oben nachgewiesenen analytischen Merkmal für die Steifheit eines Fachwerks übereinstimmt. Ist nämlich n_1 die Zahl der Knoten und $s_1 = 2n_1 - 3$ die Zahl der Stäbe des einen, n_2 die Zahl der Knoten und $s_2 = 2n_2 - 3$

die Zahl der Stäbe des anderen steifen Fachwerks, so ist offenbar $n = n_1 + n_2 - 1$ die Zahl der Knoten und

$$s = s_1 + s_2 = 2(n_1 + n_2) - 6 = 2(n_1 + n_2 - 1) - 4 = 2n - 4$$

die Anzahl der Stäbe der Verbindung beider Fachwerke; es fehlt dieser also ein Stab, um ein einziges geometrisch bestimmtes und statisch steifes Fachwerk zu bilden. Dementsprechend besteht auch nur eine bestimmte Bewegungsmöglichkeit, oder wie man sagt, eine zwangläufige Beweglichkeit der Teile I und II des Fachwerks gegeneinander, dadurch gekennzeichnet, dafs durch die Bewegung irgend eines Punktes des einen Teiles die Bewegungen aller übrigen Punkte desselben gegen den anderen Teil bestimmt sind. Wird also ein Punkt der einen Scheibe festgehalten, zur relativen Ruhe gegen die andere Scheibe gezwungen, so werden dadurch auch alle Punkte beider Scheiben gegeneinander unbeweglich, das ganze Stabgebilde also zu einem steifen Fachwerk.

Im vorliegenden Falle kann die eine Scheibe (II) gegen die andere etwa festgehaltene (I) nur eine Drehbewegung um den gemeinsamen Knotenpunkt (5) beider ausführen. Dabei ändert sich m allgemeinen die Entfernung eines jeden Punktes der einen Scheibe von jedem Punkte der anderen. Wird die gegenseitige Bewegung eines Punktpaares, etwa 4 und 6 durch Einfügung eines Gelenkstabes $\overline{46}$ zwischen den Punkten 4 u. 6 aufgehoben, so entsteht dadurch das steife Fachwerk 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (Anzahl der Stäbe $s = 2n - 4 + 1 = 2n - 3$), dessen Form aber von der Länge des Stabes $\overline{46}$ abhängig und mit dieser zwanglos, d. h. ohne jeden Widerstand in den Stäben veränderlich ist. Gleich ungehindert können natürlich beliebige Längenänderungen der übrigen Stäbe, etwa infolge von Temperaturänderungen oder aus anderen Gründen vor sich gehen. Jeder Stab übt im allgemeinen für sich allein einen bestimmten selbständigen Einflufs auf die geometrische Form des Fachwerks aus.

Die Längenänderung eines jeden Stabes für sich allein ist indes bei feststehender endlicher Länge aller übrigen Stäbe an bestimmte Grenzen gebunden. Die Stablänge kann zu einem Maximum und zu einem Minimum werden. Für die Länge des Stabes $\overline{46}$ z. B. tritt das Maximum, bezw. Minimum seiner Länge ein, wenn die Scheiben I und II solche Lage gegeneinander einnehmen, dafs die

Punkte 4 und 6 mit 5 auf einer Geraden liegen und zwar das Maximum, wenn die Punkte 4 und 6 beiderseits von 5 liegen, das Minimum, wenn sie auf derselben Seite von 5 sich befinden.

Indem der Stab $\overline{4\,6}$ eine bestimmte Entfernung der Punkte 4 und 6 und damit auch aller übrigen Punktpaare beider Scheiben gegen irgend einen äufseren Kraftangriff aufrecht erhält, hat er wie alle übrigen Stäbe eine statisch bestimmte Stabkraft zu leisten. Ist M_5 das etwa um den Punkt 5 rechts drehende Moment aller auf die Scheibe II wirkenden äufseren Kräfte, so erfordert das Gleichgewicht dieser Scheibe, ihre Ruhe gegen die Scheibe I, dafs der Verbindungsstab $\overline{4\,6}$ die Momentengleichung $M_5 + S \cdot r_5 = 0$ erfülle, dafs also $S = -\frac{M_5}{r_5}$ ist. Hierin ist die Stabkraft S von ihrem Hebelsarm r_5 (Höhe des Dreiecks 4 5 6) abhängig und für $r_5 = 0$, d. h. wenn die Richtungslinie des Stabes $\overline{4\,6}$ durch 5 geht, die Stablänge also ihren Gröfst- oder Kleinstwert annimmt, wird S und werden damit gleichzeitig auch andere Stabkräfte unendlich grofs.

Die steife Verbindung der beiden Scheiben gegeneinander hätte nun auch durch Einfügung eines Verbindungsstabes zwischen einem anderen Punktpaare, etwa 4 und 8, 1 und 9 usw. geschehen können; immer aber würden für das Maximum und Minimum seiner Länge, also wenn seine Richtungslinie durch 5 geht, unendlich grofse Stabkräfte entstehen.

In der in Fig. 105 gezeichneten Lage beider Scheiben zueinander liegen die Punkte 2 und 8 in einer Geraden mit 5. Wollte man also durch Einfügung eines Stabes $\overline{2\,8}$ die Scheiben in dieser Lage zu einem Fachwerk verbinden, so hätte der Verbindungsstab und mit ihm andere Stäbe (sofern nicht etwa zufällig $M_5 = 0$) unendlich grofse Stabkräfte zu leisten.

Dieser hier an einem einfachen Beispiele hervorgetretene Sonderfall hat allgemeinere Bedeutung für die Beurteilung der geometrischen und statischen Bestimmtheit von Fachwerken und soll deshalb noch etwas eingehender erörtert werden. Das Auftreten unendlich grofser Stabkräfte in einem Fachwerk von $s = 2n - 3$ Stäben ist nämlich das Kennzeichen mangelnder statischer Steifigkeit bezw. geometrischer und gleichzeitig statischer Unbestimmtheit desselben.

Tatsächlich ist auch das aus den in 5 drehbar verbundenen einfachen Fachwerken I und II durch Einfügung eines mit seiner Mittellinie durch 5 gerichteten geraden Stabes entstandene Fachwerk gleichzeitig geometrisch und statisch unbestimmt, obgleich es $s = 2n - 3$ Stäbe aufweist.

Die geometrische Unbestimmtheit erkennt man daraus, dafs Punkt 8 in seiner Lage gegen die Scheibe I nur dadurch bestimmt ist, dafs er auf zwei sich nicht schneidenden, sondern nur tangierenden Kreisbögen liegen mufs, nämlich auf einem solchen mit dem Halbmesser $\overline{58}$ um 5 und auf einem anderen mit dem Halbmesser $\overline{28}$ um 2 beschriebenen. Dadurch ist aber der Punkt 8 und somit auch die Scheibe II in ihrer Lage gegen I keineswegs geometrisch sicher bestimmt. Beide die Lage des Punktes 8 bestimmende Kreisbögen haben bei 8 ein Bogenelement ds gemein und auf diesem kann sich der Punkt trotz seiner gleichzeitigen steifen Verbindung mit den Punkten 2 und 5 der Scheibe I bewegen. Das durch solche Verbindung beider Scheiben entstandene Fachwerk ist also geometrisch nicht bestimmt bezw. statisch nicht steif. Dafs es gleichzeitig auch statisch unbestimmt ist, erweist sich dadurch, dafs der Punkt 8 in der Richtung $\overline{258}$ sowohl durch die Scheibe II, als auch durch den Stab $\overline{28}$ gegen die Scheibe I festgehalten ist und dafs daher eine etwa in jener Richtung im Punkte 8 angreifende Kraft X einen entgegengesetzt gerichteten Widerstand sowohl in der Scheibe II als im Stabe $\overline{28}$ hervorrufen mufs. Die Berechnung beider Widerstände aber kann nur auf Grund der gleichzeitig eintretenden elastischen Verschiebungen des Punktes 8 gegen die Punkte 5 und 2 geschehen, ist also eine statisch unbestimmte Aufgabe. Greift im Punkte 8 neben der Kraft X in der Richtung $\overline{258}$ noch eine Kraft Y senkrecht dazu an (beide etwa Seitenkräfte der Mittelkraft R einer Kräftegruppe), so erzeugt Y ein Moment M_5 und ruft dadurch, wie erwähnt, unendlich grofse Stabkräfte hervor. Es sei hier noch besonders darauf hingewiesen, dafs der Stab $\overline{28}$ in seiner Lage $\overline{258}$ auch keiner zwanglosen Verlängerung fähig ist, dafs jeder Verlängerung vielmehr Spannungen in ihm selbst und den übrigen Stäben entgegentreten, die statisch unbestimmbar sind. Der Stab $\overline{28}$ erfüllt danach in seiner Lage $\overline{258}$ keinen selbständigen statischen Zweck, weil er den Punkt 8 nur in der Richtung $\overline{258}$

festhält, in der seine Bewegung schon durch die Scheibe II ausgeschlossen ist, ihm aber in der Richtung senkrecht dazu und somit beiden Scheiben gegeneinander eine kleine Beweglichkeit läßt.

Infolge der doppelten Erfüllung eines statischen Zweckes bleibt ein anderer unerfüllt und diese beiden bei einem Fachwerk mit n-Knoten und $2n-3$ Stäben stets zusammen hervortretenden Erscheinungen kennzeichnen dessen gleichzeitige geometrische und statische Unbestimmtheit.

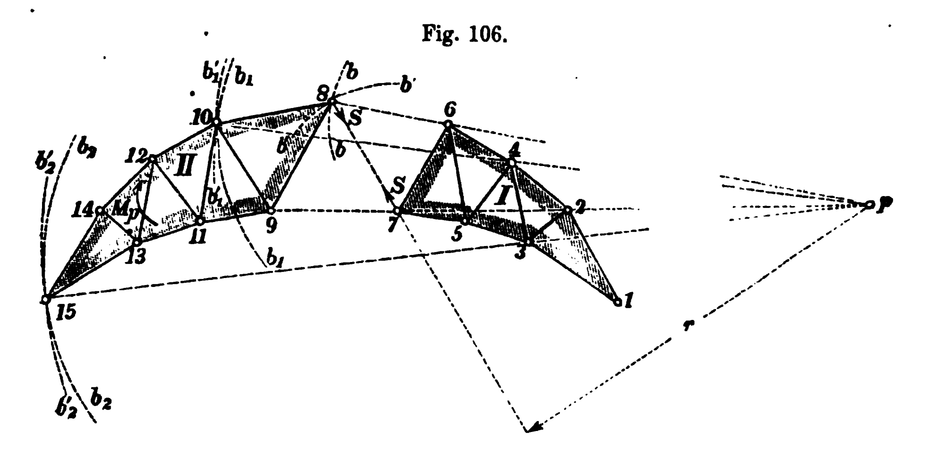
Wir wollen nun noch ein steifes und statisch bestimmtes Fachwerk in der Weise entstehen lassen, dafs wir zwei einfache Fachwerke durch drei Gelenkstäbe unverschieblich miteinander verbinden. Dafs eine solche Verbindung stets möglich sein mufs, ergibt sich aus der Überlegung, dafs eine beliebige Kräftegruppe in einer Ebene, bezw. deren Mittelkraft stets durch drei nach Richtung und Lage gegebene Einzelkräfte ersetzt, oder (wenn man diese umkehrt) im Gleichgewicht gehalten werden können, vorausgesetzt, dafs sich die gegebenen Richtungslinien der letzteren nicht in einem Punkte schneiden. (Vergl. Keck, Mech. 1, 3. Aufl. S. 117.) Wird also eines der zu verbindenden beiden Fachwerke in seiner Ebene von einer Kräftegruppe erfaßt, so kann es immer auch durch drei Stäbe, deren Richtungslinien sich nicht in einem Punkte schneiden, gegen das andere Fachwerk festgehalten werden, denn die Stabkräfte erfüllen obige Bedingung. Auch die analytische Bedingung für die geometrische und statische Bestimmtheit des entstehenden Fachwerks hinsichtlich der Anzahl der Knoten und Stäbe desselben ist erfüllt, denn erstere wird $n = n_1 + n_2$ und letztere

$$s = (2n_1 - 3) + (2n_2 - 3) + 3 = 2(n_1 + n_2) - 3 = 2n - 3\,.$$

Verbindet man die starren Scheiben I und II (Fig. 106) zunächst durch nur einen Stab $\overline{79}$, so enthält das entstehende Stabgebilde nur $s = 2n - 5$ Stäbe, also 2 zu wenig und es bleiben für beide Scheiben noch zwei Bewegungsmöglichkeiten gegeneinander bestehen, denn die Scheibe II kann sich mit dem Stabe $\overline{97}$ um 7 und außerdem noch allein um 9 drehen. Durch Einfügung noch eines zweiten Stabes $\overline{69}$ kann erstere, oder eines solchen $\overline{78}$ letztere aufgehoben werden. In beiden Fällen enthält das entstehende Gebilde $s = 2n - 4$ Stäbe und hat nur noch einen Stab zu wenig und eine Bewegungsmöglichkeit, nämlich die einer Drehung um 9 oder um 7,

welche beiden Fälle mit dem zuvor bereits besprochenen übereinstimmen. Fügt man dagegen neben dem Stabe $\overline{7\,9}$ noch einen anderen nicht in einem der Punkte 7 oder 9 angreifenden Stab, etwa $\overline{6\,8}$ ein, so bleibt auch nur eine Bewegungsmöglichkeit oder eine bestimmte zwangläufige Beweglichkeit bestehen, die nun aber

Fig. 106.



keine einfache Drehbewegung mehr ist. Beide Scheiben sind jetzt durch das in sich verschiebliche Gelenkstangenviereck 6 8 9 7 miteinander verbunden. Bei der dadurch bedingten zwangläufigen Bewegung der einen Scheibe gegen die andere durchläuft jeder Punkt der einen gegen die andere etwa festgehaltenen Scheibe eine bestimmte Bahnlinie, die sich leicht zeichnen läfst. Die Punkte 8 und 9 z. B. bewegen sich je auf einem Kreisbogen um 6 bezw. 7, Punkt 10 bewegt sich auf der Linie $b_1 b_1$ und Punkt 15 auf $b_2 b_2$. Dabei ändert sich wiederum im allgemeinen die Entfernung eines jeden Punktes der einen Scheibe von jedem Punkte der anderen. Für jedes Punktpaar wird diese Entfernung in bestimmten Lagen der Scheiben zueinander zu einem Maximum und zu einem Minimum. In diesen Lagen mufs ersichtlich die Bahnlinie des einen Punktes gegen den andern senkrecht zur Verbindungslinie beider gerichtet sein, also auf letzterer der Krümmungsmittelpunkt der Bahnlinie an betreffender Stelle liegen. In der gezeichneten Lage der Scheiben zueinander befinden sich die Punktpaare 4 u. 10 und 3 u. 15 in maximaler Entfernung; $\overline{4\,10}$ ist in 10 senkrecht zu $b_1 b_1$ und $\overline{3\,15}$ in 15 senkrecht zu $b_2 b_2$ gerichtet.

Verbindet man ein Punktpaar in irgend einer Lage miteinander durch Einfügung eines dritten Stabes, so wird dadurch die Entfernung und Lage beider Punkte sowie die der beiden Scheiben gegeneinander festgelegt. Der eine mufs sich nämlich aufser auf der oben bezeichneten Bahnlinie nun auch noch auf einem Kreisbogen um den andern bewegen, also im Schnittpunkte beider Bahnlinien ruhen, und zwar um so sicherer, je steiler der Schnitt beider Bahnlinien erfolgt, d. h. je mehr der Schnittwinkel sich einem rechten nähert. In der vorerwähnten Sonderlage beider Punkte zueinander, wo die Bahnlinie des einen senkrecht auf der Verbindungsgeraden beider steht, der Schnittwinkel beider Bahnlinien also gleich Null ist, die Bahnlinien sich nur berühren, kann die Lage beider Punkte zueinander durch einen dritten Verbindungsstab geometrisch nicht sicher bestimmt und statisch nicht völlig unverschieblich festgelegt werden; denn jetzt fallen beide Bahnlinien wieder mit einem Element ds zusammen und in dieser unendlich kleinen Erstreckung kann der Punkt sich auf beiden gleichzeitig bewegen. Er ist in der einen Richtung wieder doppelt, in der dazu senkrechten gar nicht sicher festgehalten.

In Fig. 106 wird durch einen Stab $\overline{4\,10}$ der Punkt 10 gezwungen, gleichzeitig die Bahnlinie $b_1 b_1$ und den Kreisbogen $b_1' b_1'$ um 4 zu verfolgen; beide berühren sich in 10, dieser Punkt ist also durch den Stab $\overline{4\,10}$ nicht sicher festgelegt, das entstehende Fachwerk ist trotz seiner $2n-3$ Stäbe kein steifes. Dasselbe gilt für einen zwischen dem Punktlager 3 und 15 eingefügten Stab. Dagegen wird durch Einfügung eines Stabes $\overline{78}$ oder $\overline{69}$ zwischen dem Punktpaar 7 und 8 bezw. 6 und 9 jedesmal eine unverschiebliche Verbindung beider Scheiben, also im ganzen ein steifes Fachwerk erzielt.

Die vom Stabe $\overline{78}$ zu leistende Stabkraft S berechnen wir aus der Momentengleichung in Bezug auf den Schnittpunkt p der Stabachsen $\overline{68}$ und $\overline{79}$, in welcher die durch diesen Punkt gerichteten unbekannten Stabkräfte $\overline{68}$ und $\overline{79}$ nicht vorkommen. Ist M_p das etwa rechts herum drehende Moment der die Scheibe II angreifenden äufseren Kräfte, so fordert das Gleichgewicht dieser Scheibe, wenn S die Stabkraft des Stabes $\overline{78}$ ist, $M_p - S \cdot r = 0$, also $S = \frac{M_p}{r}$. In völlig gleicher Weise aber berechnet sich die Stab-

kraft jedes andern statt des Stabes $\overline{7\,8}$ eingefügten „Ersatzstabes“. Jeder dieser Stäbe aber kann nur unter der Voraussetzung, daſs seine Richtungslinie nicht durch p geht, also r nicht gleich Null ist, beide Scheiben mit einer endlichen Stabkraft gegeneinander in Ruhe, unverschieblich festgehalten, denn mit $r = 0$ wird eine unendlich groſse, also unmögliche, Stabkraft erforderlich. Dieser Fall müsste z. B. eintreten, wenn man statt des Stabes $\overline{7\,8}$ den Ersatzstab $\overline{4\,10}$ oder $\overline{3\,15}$ einfügen würde; er würde aber nicht eintreten mit $\overline{6\,11}$, $\overline{5\,12}$ usw. als Ersatzstab.

Nur in dem Sonderfalle, wenn die Mittelkraft der die Scheibe II angreifenden Kräftegruppe auch durch den Punkt p gerichtet ist, kommen auch bei Anwendung eines durch p gerichteten Ersatzstabes unendlich groſse Stabkräfte nicht vor. Es wird dann aber $S = \frac{0}{0}$, d. h. statisch unbestimmt, ein Ergebnis, das man auch erkennt, wenn man bedenkt, daſs die Zerlegung einer Kraft in drei mit ihr durch denselben Punkt gerichteten Seitenkräfte eine statisch unbestimmte Aufgabe ist.

Ein beliebiger Angriff äuſserer Kräfte in der Ebene des Fachwerkes muſs, wie man danach leicht erkennt, wenn die drei Verbindungsstäbe beider Scheiben sich in einem Punkte p schneiden, im allgemeinen wieder gleichzeitig unendlich groſse und statisch unbestimmte Stabspannkräfte erzeugen.

Für die Beurteilung der Steifheit und statischen Bestimmtheit der Verbindung zweier einfacher Fachwerke durch drei Stäbe spielt der Schnittpunkt p zweier Verbindungsstäbe eine ähnliche Rolle, wie bei zwei durch einen gemeinsamen Knotenpunkt und einen Stab verbundenen einfachen Fachwerken der gemeinsame Knotenpunkt. Damit in letzterem Falle eine steife und statisch bestimmte Verbindung entstehe, darf der Verbindungsstab nicht durch den gemeinsamen Knotenpunkt, den gegenseitigen Drehpunkt beider Scheiben gehen. Aus gleichem Grunde darf im ersteren Falle keiner der drei Verbindungsstäbe durch den Schnittpunkt der beiden andern gehen. Werden diese Bedingungen nicht erfüllt, so verbleibt in beiden Fällen eine unendlich kleine Beweglichkeit der Scheiben gegeneinander bestehen, die als Drehbewegung um den gemeinsamen Knotenpunkt beider, bezw. um den Schnittpunkt der drei Verbindungsstäbe derselben angesehen werden kann. Auf diese Ver-

hältnisse, die Kinematik der ebenen Fachwerke, soll später noch etwas näher eingegangen werden.

Aus obigen Darlegungen ziehen wir hier zunächst folgende Schlüsse:

1. Wird aus einem einfachen Fachwerke ein Stab entfernt, so dafs noch $2n-4$ Stäbe übrig bleiben, so geht dasselbe über in eine Verbindung zweier steifer gegliederter Scheiben mit einer bestimmten Bewegungsmöglichkeit, bezw. einer zwangläufigen Beweglichkeit.

2. Durch Einfügung eines beliebigen Ersatzstabes entsteht aus dem zwangläufig beweglichen Stabgebilde stets wieder ein steifes und statisch bestimmtes Fachwerk, wenn der Stab zwischen zwei gegeneinander beweglichen Punkten in solcher Lage eingebaut wird, dafs der Krümmungsmittelpunkt der Bahnlinie des einen gegen den anderen nicht auf die Verbindungsgerade beider fällt, also die Entfernung beider Punkte nicht zufällig ein Maximum oder ein Minimum ist, vielmehr jede beliebige unendlich kleine gegenseitige Bewegung beider Punkte auch eine solche in der Richtung des Stabes zur Folge hat, durch deren Verhinderung der Stab einen selbständigen statischen Zweck erfüllt.

3. Ein Fachwerk von $2n-3$ Stäben ist immer dann, aber auch nur dann zugleich statisch steif und bestimmt, wenn jeder Stab desselben im Sinne des unter 2 ausgesprochenen Satzes einen selbständigen statischen Zweck erfüllt.

Diese letztere Wahrheit ergibt sich auch durch folgende allgemeine Überlegung: Jeder in einer Ebene frei bewegliche Punkt besitzt zwei Bewegungsmöglichkeiten, d. h. jede beliebige Bewegung desselben kann durch die Bewegung in zwei Richtungen ersetzt werden. Soll der Punkt ruhen, so mufs seine Beweglichkeit in zwei Richtungen aufgehoben werden. Die n-Kotenpunkte eines ebenen Fachwerks haben vor ihrer starren Verbindung $2n$-Bewegungsmöglichkeiten. Damit das Fachwerk ruhe, müssen die n-Knotenpunkte zur Ruhe gezwungen, ihre $2n$-Bewegungsmöglichkeiten aufgehoben werden. Wird ein Knotenpunkt äufserlich durch ein festes, ein anderer durch ein bewegliches Stützgelenk festgehalten, das Fachwerk also statisch bestimmt

gestützt, so verschwinden dadurch $2+1=3$ Bewegungsmöglichkeiten und es bleiben deren noch $2n-3$ bestehen. Jeder Stab kann für sich allein nur die Beweglichkeit eines Punktes in seiner Richtung aufheben. Werden alle Stäbe so angeordnet, dafs jeder für sich einen solchen Zweck erfüllt, so sind $2n-3$ Stäbe erforderlich und ausreichend, um alle Punkte festzuhalten und damit ein steifes und statisch bestimmtes Fachwerk zu bilden.

Unter Beachtung vorstehender Sätze kann man aus einem einfachen Fachwerk durch wiederholte Auswechselung eines Stabes gegen einen andern die verschiedenartigsten Fachwerke entstehen lassen, die alle $s=2n-3$ Stäbe haben und alle gleichzeitig statisch steif und bestimmt sind, wenn alle Ersatz- oder Wechselstäbe im Sinne vorstehender Darlegungen richtig angeordnet werden. Man gelangt dadurch zu steifen und statisch bestimmten Fachwerken, deren Bildung mit Hülfe der oben ausgesprochenen Regel für **einfache Fachwerke** nicht direkt möglich ist und die wir daher als „abgeleitete“ Fachwerke bezeichnen wollen. Die richtige Anordnung der Ersatzstäbe läfst sich freilich nicht immer leicht erkennen. Sehr anschaulich und bequem überblicken lassen sich diese Verhältnisse meist mit Hülfe der in ihren Grundzügen weiter unten noch zu behandelnden Kinematik des ebenen Fachwerks.

II. Bestimmung der Stabkräfte in einem Dreiecksfachwerk.

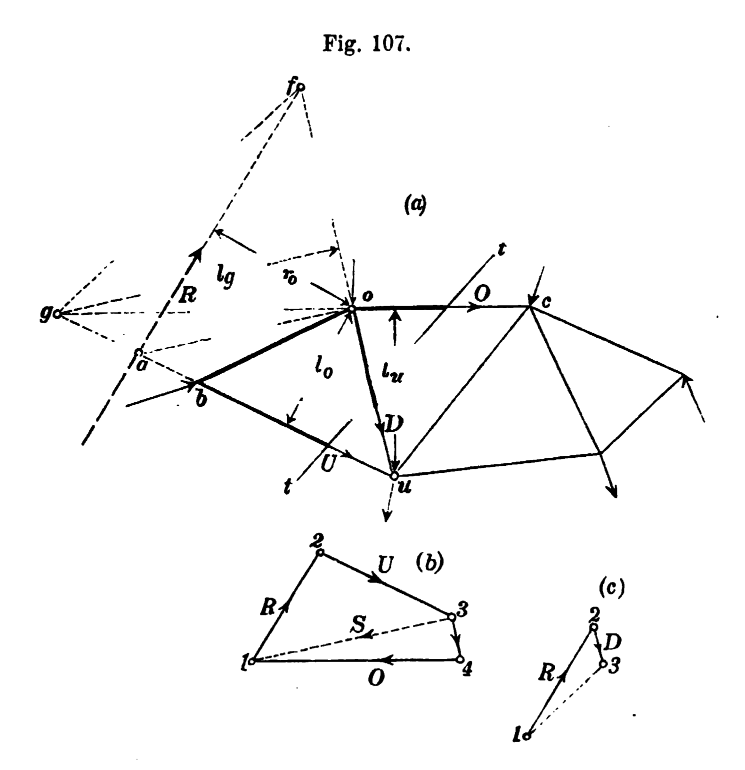
a) Allgemeines Verfahren.

Ein Fachwerk (Fig. 107) befinde sich unter der Wirkung beliebiger äufserer Kräfte in seiner Ebene im Gleichgewicht. Denkt man sich dasselbe dann durch irgend einen Schnitt tt in zwei Teile getrennt und an den Schnittstellen der Stäbe die Stabkräfte (U, O und D) als äufsere Kräfte angebracht, so müssen diese sich mit den in den Knotenpunkten angreifenden äufseren Kräften an jedem der beiden durch den Schnitt getrennten Teile des Fachwerks das Gleichgewicht halten, die drei Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte in einer Ebene erfüllen. Es werde nun zunächst ein einfaches Dreiecksnetz angenommen und vorausgesetzt, dafs nicht mehr als drei Stäbe durch den Schnitt getroffen werden.

Die Mittelkraft der an beiden Teilen angreifenden äufseren Kräfte sei R, habe die aus der Figur ersichtliche Lage und sei in Bezug auf den Teil links vom Schnitt aufwärts gerichtet.

An diesem Teil stehen dann die Kraft R und die drei unbekannten Stabkräfte U, O und D miteinander im Gleichgewicht.

Fig. 107.



Wir denken uns zwei der letzteren, etwa O und D durch ihre Mittelkraft ersetzt. Diese mufs, weil auch sie mit den beiden anderen Kräften R und U im Gleichgewicht ist, durch den Schnittpunkt a beider gehen, also in die Gerade ao fallen und mit R und U ein schliefsendes Krafteck bilden. Zeichnet man dies Krafteck, Fig. 107*b*, indem man $\overline{12} = R$ macht, durch 2 eine Parallele zu bu und durch 1 eine solche zu ao zieht, so ist im Krafteck $\overline{23} = U$ und $\overline{31} = S$, gleich der Mittelkraft von O und D. Um diese beiden Stabkräfte selbst zu erhalten, zerlegen wir S parallel zu ou und oc in die Seitenkräfte $\overline{34} = D$ und $\overline{41} = O$, womit die

Stabkräfte U, O und D bekannt sind und zwar sind im vorliegenden Falle U und D positiv, Zugkräfte, während O negativ, eine Druckkraft ist. Die Stabkraft U wurde schon durch das erste Krafteck 1 2 3 bekannt. Soll eine der drei Stabkräfte, etwa D, bestimmt werden, so kommt man am schnellsten zum Ziele, wenn man so verfährt, dafs diese im ersten Krafteck erscheint (Fig. 107 *c*). Wir ziehen jetzt durch 1 und 2 im Krafteck $\overline{31} \parallel fg$ und $\overline{23} \parallel (ou)$, dann ist $\overline{23} = D$. Die Lage des Punktes a links oder rechts von g ist ersichtlich bestimmend für das Vorzeichen von D. Nähert sich nämlich a dem Punkt g, so dreht sich fg links um g und im Krafteck Fig. 107 *c* $\overline{13}$ links um 1, wobei D abnimmt. Fällt a mit g, also fg mit af zusammen, so wird im Krafteck $\overline{23} = D = 0$. Rückt a links von g, so tritt im Krafteck 3 links von 2 und $\overline{23} = D$ wird negativ. Das hier mitgeteilte graphische Bestimmungsverfahren ist zuerst von Culmann angegeben und wird nach ihm benannt. (Vergl. auch Keck, Mech. I, 3. Aufl. S. 118.) Handelt es sich um die Bestimmung aller Stabkräfte eines einfachen Fachwerks, so führt man zweckmäfsig die Schnitte nacheinander so, dafs jedesmal nur 2 unbekannte Stabkräfte getroffen werden. Es ist dann jedesmal der Streckenzug der bekannten Kräfte durch nur zwei Parallelen zu einem schliefsenden Krafteck zu ergänzen.

Benutzt man den Satz, dafs die Summe der statischen Momente der vier Kräfte R, U, D und O in Bezug auf irgend einen Punkt der Ebene des Fachwerks gleich Null sein mufs, so kann man die Stabkräfte leicht auch wie folgt durch Rechnung bestimmen: Man wählt nacheinander die Schnittpunkte u, o und g der Richtungslinien je zweier unbekannter Stabkräfte als Drehpunkt für eine Momentengleichung, in der dann jedesmal nur die dritte unbekannte Stabkraft auftritt. (Vergl. Keck, Mech. I, 3. Aufl. S. 119.) In Bezug auf o als Drehpunkt hat man $R \cdot r_o - U \cdot l_o = 0$ und daraus

$$1) \qquad U = \frac{R \cdot r_o}{l_o} = \frac{M_o}{l_o},$$

worin M_o das Moment aller links von tt angreifenden äufseren Kräfte in Bezug auf o bezeichnet. Ebenso erhält man, wenn M_u und M_g die positiv gedachten Momente aller links von tt an-

greifenden äuſseren Kräfte in Bezug auf u und g sind, $M_u + O \cdot l_u = o$ und daraus

$$2) \qquad O = -\frac{M_u}{l_u}.$$

Ferner $M_g + D \cdot l_g = O$, woraus

$$3) \qquad D = -\frac{M_g}{l_g}.$$

Nach Gl. 1 und 2 ist U in irgend einem Stabe der unteren Gurtung im Vorzeichen gleichstimmig mit M_o, dagegen O in jedem Stabe der oberen Gurtung ungleichstimmig mit M_u. Für einen an beiden Enden frei gestützten einfachen Fachwerksbalken mit lotrechten Lasten sind M_o und M_u stets positiv, daher immer U positiv und O negativ. Nicht so einfach läſst sich allgemein und für jede Angriffsart der äuſseren Kräfte das Vorzeichen der Stabkraft D irgend eines Wandgliedes beurteilen.

Das hier dargelegte rechnerische Verfahren zur Bestimmung der Stabkräfte ist zuerst von Ritter angewandt und wird nach ihm als „Ritter'sche Momentenmethode" bezeichnet.

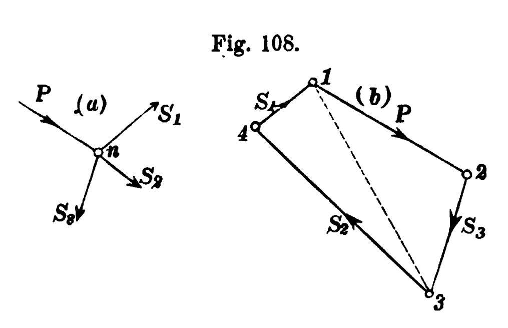
Sowohl das Culmann'sche als das Ritter'sche Verfahren setzen voraus, daſs die Zahl der durch den Schnitt getroffenen unbekannten Stabkräfte im allgemeinen nicht gröſser als drei ist. Werden auſserdem schon bekannte Stabkräfte von dem Schnitt getroffen, so spielen diese im Gleichgewicht jedes der beiden durch den Schnitt getrennten Fachwerksteile die gleiche Rolle, wie die bekannten äuſseren Kräfte und können mit diesen als durch die gemeinsame Mittelkraft R (Fig. 107) bezw. die Momente M_o, M_u und M_g ausgedrückt gelten. Ist zunächst keine von allen Stabkräften des Fachwerks bekannt, so bedingt die Anwendbarkeit beider Verfahren, daſs der erste Schnitt tt so gelegt werden kann, daſs überhaupt nur drei Stäbe geschnitten werden. Das ist, wie man sich leicht überzeugt, bei Dreiecksfachwerken wie überhaupt bei „einfachen" Fachwerken immer möglich. Bei „abgeleiteten" Fachwerken indes ist, wie weiter unten noch zu zeigen sein wird, diese Bedingung nicht immer erfüllbar, und obige beiden Verfahren werden daher bei diesen auch nicht immer direkt anwendbar sein.

Legt man, wie vielfach zweckmäſsig, den Schnitt tt so, daſs nur ein Knotenpunkt abgetrennt wird, und benutzt dessen Gleich-

gewicht für die Bestimmung der Stabkräfte, so darf die Zahl der unbekannten Stabkräfte bei jedem Schnitt nur gleich **zwei** sein, weil alle miteinander im Gleichgewicht befindlichen Kräfte jetzt an diesem einen Punkte angreifen und nur zwei Gleichgewichtsbedingungen unterliegen. Ist von allen Stabkräften des Fachwerks noch keine bekannt, so darf in diesem Falle der erste Schnitt überhaupt nur zwei Stäbe treffen. Das ist wiederum bei allen „einfachen“ Fachwerken stets, bei den „abgeleiteten“ dagegen nicht immer möglich.

Bei Trennung nur eines Knotenpunktes gestaltet sich das graphische Verfahren wie Fig. 108 a zeigt. Im Knoten n treten drei Stäbe, S_1, S_2 und S_3 zusammen und greife aufserdem eine äufsere Kraft P an. Von den Stabkräften sei S_3 bekannt. Wir fügen im Krafteck (Fig. 108 b) P und S_3 zu dem Streckenzuge 1 2 3 zusammen und erhalten in dessen Schlufslinie $\overline{1\,3}$ die Mittelkraft beider Kräfte. Zieht man noch durch 1 und 3 $\overline{4\,1} \parallel S_1$ und $\overline{3\,4} \parallel S_2$, so sind im schliefsenden Krafteck 1 2 3 4 1 $\overline{3\,4} = S_2$ (negativ) und $\overline{4\,1} = S_1$ (positiv).

Fig. 108.



Für die bei **Fachwerkbalken** zumeist vorkommende **lotrechte Belastung** erhält man eine allgemeine Darstellung der Stabkraft irgend eines Wandgliedes aus der Bedingung der Nullgleichheit je der Summe aller lot- und wagerechten Kräfte.

Fig. 109.

Mit Bezug auf Fig. 109 lauten die beiden Gleichungen

$$Q - (O \cdot \sin\omega + U \sin\nu) - D \sin\delta = 0 \quad \text{und}$$

$$O \cos\omega - U \cdot \cos\nu - D \cdot \cos\delta = 0,$$

worin Q als Mittelkraft aller links vom Schnitt angreifenden äufseren

Kräfte die Bedeutung einer Querkraft hat. Die Lösung für $D \sin \delta$ und $D \cdot \cos \delta$ ergibt

4) $$D \sin \delta = Q - (O \sin \omega + U \cdot \sin \nu) \quad \text{und}$$

5) $$D \cos \delta = O \cdot \cos \omega - U \cdot \cos \nu .$$

Gleichung 4 stimmt mit Gleichung 2 S. 207 für den Vollwandträger überein, wenn man beachtet, dafs $D \cdot \sin \delta$ im Gleichgewicht der äufseren und inneren Kräfte die gleiche Wirkung hat, als der Scherwiderstand Y der Wand des Vollwandträgers. Setzt man in Gl. 5 mit Bezug auf Fig. 109 und Gl. 1 u. 2 ohne Rücksicht auf die Vorzeichen von O und U $O = \frac{M_u}{l_u} = \frac{M_u}{h_u \cos \omega}$ und $U = \frac{M_o}{l_o} = \frac{M_o}{h_o \cos \nu}$, so folgt

6) $$D \cos \delta = \frac{M_u}{h_u} - \frac{M_o}{h_o},$$

worin allgemein M_u und M_o die Momente der äufseren Kräfte in Bezug auf den unteren und oberen Endpunkt der Strebe, h_u und h_o die Trägerhöhen in diesen Punkten bedeuten. In Fig. 107 und 109 hat die Strebe ou nach links ansteigende Richtung. Man erkennt leicht, dafs obige beiden Gleichungen in unveränderter Form auch für nach rechts ansteigende Wandglieder Gültigkeit haben. Das Vorzeichen der Differenz rechtsseits der Gl. 6 ist stets auch das der Stabkraft D des Wandgliedes, einerlei ob dasselbe nach links oder rechts ansteigt, δ positiv oder negativ ist. (Vergl. Stab ou und $u_1 o$ Fig. 109.)

Gleichung 6 ist nur zur Bestimmung der Stabkräfte geneigter nicht lotrechter Wandglieder, d. h. für Winkel $-90^0 < \delta < +90^0$ anwendbar, weil für $\delta = \pm 90^0$ $\cos \delta \cdot D = 0$ wird. Gleichung 4 dagegen liefert für alle Neigungen $0 \lesseqgtr \delta \lesseqgtr \pm 180^0$ bestimmte Werte von D, und zwar ist für $0 < \delta < 90^0$ (links ansteigende Streben) das Vorzeichen von D gleichstimmig, für $0 > \delta > 90^0$ (rechts ansteigende Streben) ungleichstimmig mit der rechten Seite der Gl. 4. Sind die Gurtungen beide wagerecht (parallel), der Träger also ein sogenannter **Parallelträger**, ω und ν zugleich Null, so nimmt Gl. 4 die Form an

7) $$D \sin \delta = Q .$$

Je nachdem δ positiv oder negativ ist, die Streben nach links oder rechts ansteigen, ist jetzt D im Vorzeichen gleich- oder ungleichstimmig mit der Querkraft Q. Besteht das Wandsystem aus wechselweise links und rechts ansteigenden Gliedern, so sind die

Stabkräfte der ersteren gleich-, die der letzteren ungleichstimmig mit Q. Läfst man daher in solchem Falle entweder die rechts- oder die linksansteigenden Glieder in Vertikalen übergehen, so dafs $\sin\delta$ gleich ∓ 1 wird, so erhält man für die jetzt mit V zu bezeichnende Stabkraft

8) $$\mp V = Q\,.$$

Je nachdem bei einem Parallelträger neben Vertikalen links oder rechts ansteigende Diagonalen vorhanden sind, sind die Stabkräfte D der Diagonalen gleich- oder ungleichstimmig, die Stabkräfte V der Vertikalen dagegen ungleich- oder gleichstimmig mit der Querkraft Q.

b) Anwendung auf den einfachen Fachwerkbalken mit lotrechter Belastung.

Die Anwendung der unter a in ihrer allgemeinen Gestaltung dargelegten Verfahren zur Bestimmung der Stabkräfte eines einfachen Fachwerks nach Culmann und Ritter kann bei nur lotrechten äufseren Kraftangriff vielfach zweckmäfsig mit Hülfe eines Kraft- und Seilecks geschehen.

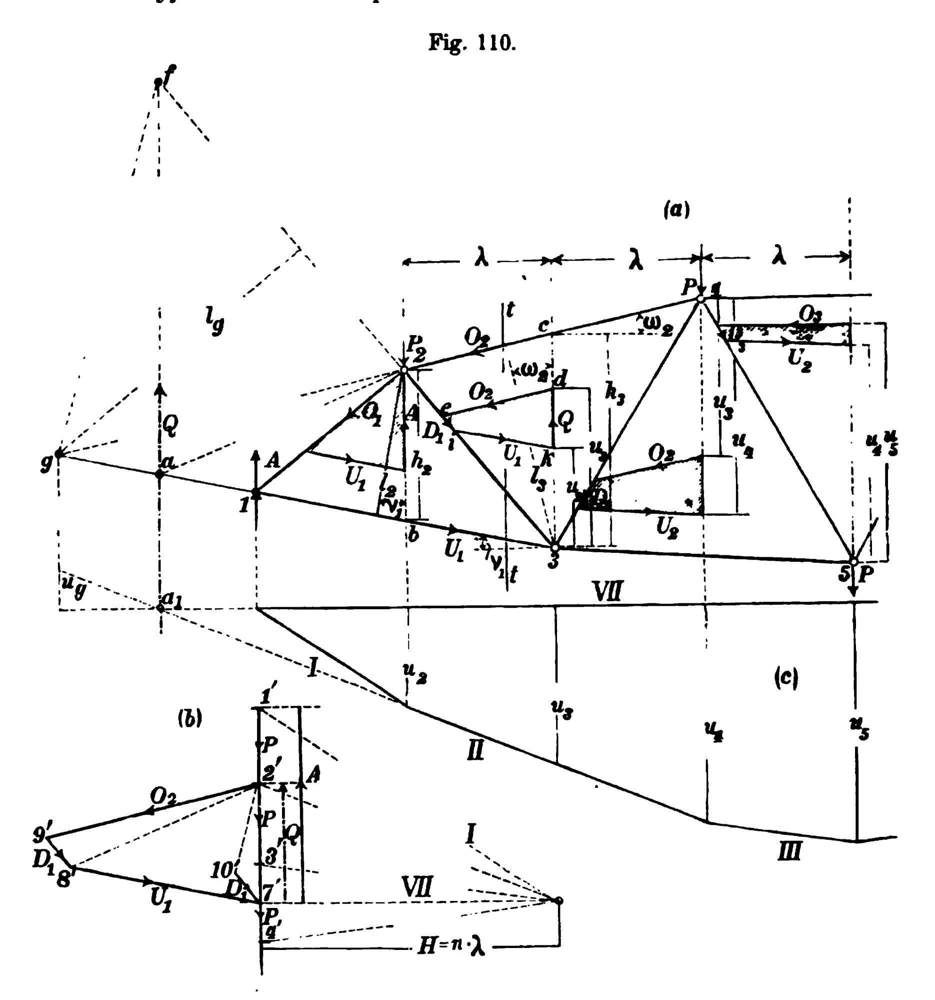
Fig. 110a stellt die eine Hälfte eines einfachen symmetrischen Fachwerksbalkens mit wechselweise links und rechts ansteigenden Wandgliedern dar, der in den Endknoten 1 und 9 statisch bestimmt gestützt ist und beispielsweise in den Knoten 2, 4, 5, 6 und 8 gleiche Lasten P trägt. Das äufsere Gleichgewicht wird durch die in bekannter Weise ermittelten im Krafteck Fig. 110 durch die Strecken $7'1' = A$, $6'7' = B$*) dargestellten Stützkräfte hergestellt. Die Mittelkraft der links vom Schnitt tt angreifenden äufseren Kräfte A und P_2 erscheint im Krafteck in der Strecke $7'2'$ und soll als Querkraft mit Q bezeichnet werden. Ihrer Lage nach geht sie durch den Schnittpunkt a_1 der Seilecksseiten II und VII (Fig. 110c).

Zur Bestimmung der durch den Schnitt tt frei gewordenen Stabkräfte U_1, D_1 und O_2 nach Culmann ziehen wir im Krafteck $\overline{2'8'} \parallel \overline{a2}$ und $\overline{7'8'} \parallel \overline{13}$, wodurch $8'$ festgelegt ist. Ferner $\overline{8'9'} \parallel \overline{23}$ und $\overline{9'2'} \parallel \overline{24}$, wodurch $9'$ bestimmt wird. Das Gleichgewicht des Trägerteiles links vom Schnitt tt wird nun durch das schliefsende

*) Das Krafteck in Fig. 110b ist nach unten abgebrochen, so dafs die Punkte $5'$ und $6'$ und der Stützdruck B nicht erscheinen.

Krafteck $7'2'9'8'7'$ **ausgedrückt, worin** $8'7' = U_1$, $9'8' = D_1$ **und** $2'9' = O_2$ **ist. Zur direkten Bestimmung nur der Stabkraft** D **würde das Krafteck** $2'10'7'$ **geführt haben, in dem** $7'10' \parallel \overline{23}$, $2'10' \parallel gf$ **und** $10'7' = D_1$ **ist.**

Fig. 110.



Mit H als Polweite des Seilecks und mit den sonst aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen erhält man nach Ritter mit Bezug auf Gl. 1, 2 und 3 S. 234/35

$$1) \qquad U_1 = \frac{M_2}{l_2} = \frac{H \cdot u_2}{l_2},$$

2) $$O_2 = \frac{-M_3}{l_3} = -\frac{H \cdot u_3}{l_3} \quad \text{und}$$

3) $$D_1 = \frac{-M_g}{l_g} = \frac{H \cdot u_g}{l_g}.$$

Da M_2 und M_3 an sich positiv sind, ist U_1 eine Zug- und O_2 eine Druckkraft. $M_g = u_g \cdot H$ ist in vorliegendem Falle negativ (der Abschnitt u wechselt in a' sein Vorzeichen, Q dreht in Bezug auf g links herum), daher D_1 positiv.

Die Ausdrücke der Gl. 1—3 für die Stabkräfte U_1, O_2 und D_1 können leicht auch geometrisch konstruiert werden.

Zu einer unter Umständen vorteilhaften geometrischen Darstellung der Stabkräfte gelangt man wie folgt: Man wählt die Polweite H gleich einem Vielfachen des wagerechten Abstandes λ der Knotenpunkte voneinander, so daſs $H = n\lambda$ wird und setzt mit Bezug auf Fig. 110a in Gl. 1 u. 2 $l_2 = h_2 \cdot \cos \nu_1$, $l_3 = h_3 \cdot \cos \omega_2$. Dann wird $U_1 = \frac{n \cdot \lambda \cdot u_2}{h_2 \cdot \cos \nu_1}$ und $O_2 = \frac{n \cdot \lambda \cdot u_3}{h_3 \cdot \cos \omega_2}$. Nun ist $\frac{\lambda}{\cos \nu_1} = \overline{b\,3}$ und $\frac{\lambda}{\cos \omega_2} = \overline{c\,2}$ und demnach auch $U_1 = \frac{n \cdot \overline{c\,2} \cdot u_2}{h_2}$ und $O_2 = \frac{n \cdot \overline{b\,3} \cdot u_3}{h_3}$.

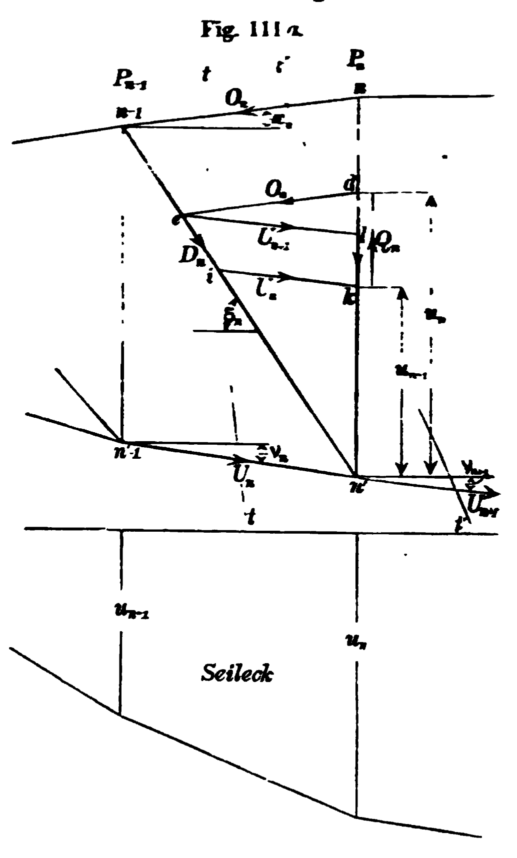
Macht man nun im Liniennetz des Fachwerks $\overline{3k} = u_2$, $\overline{3d} = u_3$ und zieht $\overline{ik} \| \overline{31}$ und $\overline{de} \| \overline{24}$, so ist $\triangle ik3 \backsim 3b2$ und $\triangle ed3 \backsim \triangle 3c2$ und daher $\frac{\overline{c\,2} \cdot u_2}{h_2} = ik$ und $\frac{\overline{b\,3} \cdot u_3}{h_3} = de$. Somit $U_1 = n \cdot ik$ und $O_2 = n \cdot de$, oder, wenn man die Multiplikation der als Kräfte geltenden Strecken ik und de mit der ganzen Zahl n durch Verwendung eines n-fach kleineren Kräftemaſsstabes berücksichtigt, als er im Krafteck (Fig. 110b) benutzt wurde, einfach $U_1 = ik$ und $O_2 = de$.

Man erkennt nun leicht auch, daſs die Strecke ei in vollem Umfange die Gl. 5 S. 236 befriedigt, wenn man sie an die Stelle der Stabkraft D treten läſst; es ist also $D = ei$. Aus Gl. 4 S. 236 und der Fig. 110a erkennt man weiterhin, daſs die Strecke $kd = Q$, gleich der links vom Schnitt tt wirkenden Querkraft sein muſs. Diese und die Stabkräfte U_1, O_2 und D_1 bilden das schlieſsende Krafteck $deikd$, das ersichtlich ähnlich ist dem Viereck $9'2'7'8'9'$ der Fig. 110b. Letzteres ist n-mal so groſs als ersteres.

In gleicher Weise sind für alle übrigen Stäbe des symmetrischen Balkens die Stabkräfte bestimmt. Im ersten Felde, wo $\omega_1 = 0$, geht das Kräfteviereck in ein Dreieck über; die Kräfte O_1 und U_1 stehen allein mit der Querkraft, d. i. hier mit der Stützkraft A, im Gleichgewicht.

Besteht das System der Wandglieder aus Diagonalen und Vertikalen, so bleibt das Verfahren zur Bestimmung der Stabkräfte in den Gurtungen und Diagonalen völlig ungeändert, wie das dem Schnitt tt entsprechende Krafteck $deik$ (Fig. 111 a) erkennen läfst, in dem kd die im n-ten Felde herrschende Querkraft Q_n darstellt. Die Stabkräfte in den Vertikalen erhält man dagegen wie folgt: Den links ansteigenden Diagonalen gegenüber sind die Vertikalen als rechtsansteigende Wandglieder mit dem Neigungswinkel $\delta = -90^0$, $\sin\delta = -1$ anzusehen. Setzt man daher für den Schnitt $t't'$ in Gl. 4 S. 236 $D\sin(-90^0) = -V_n$, vertauscht O mit O_n, U mit U_{n+1} und Q mit Q'_n (Querkraft links vom Schnitt $t't'$), so erhält man

Fig. 111 a.



4) $$V = -Q'_n + (O_n \sin\omega_n + U_{n+1} \sin\nu_{n+1}).$$

Ferner aus Gl. 5 S. 236 mit $\cos(90^0) = 0$

5) $$0 = O_n \cos\omega_n - U_{n+1} \cos\nu_{n+1}.$$

Letzterer Gleichung zufolge ergibt sich die noch unbekannte Stabkraft U_{n+1} aus der bereits bekannten O_n, indem man in

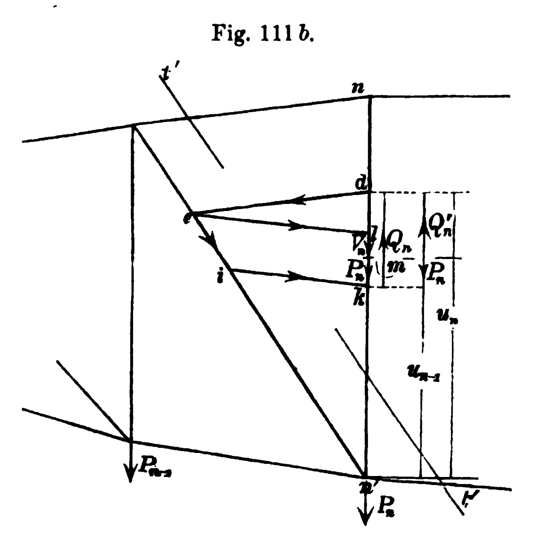
Fig. 111 *a* $el \parallel \overline{n'(n'+1)}$ zieht, in der Strecke $el = U_{n+1}$. Aus der Figur folgt nun ferner $O_n \sin \omega_n + U_{n+1} \sin \nu_{n+1} = dl$ und daher

6) $$V_n = -Q'_n + dl.$$

Greifen nun alle Lasten in den Knotenpunkten der oberen Gurtung an, so ist $Q'_n = Q_n = kd$ und daher $V_n = -(kd - dl) = -kl = lk$, d. h. abwärts gerichtet, eine Druckkraft; alle Kräfte links vom Schnitt $t't'$ bilden das schliefsende Krafteck $delkd$.

Greifen dagegen auch an den Knotenpunkten der unteren Gurtung, oder nur an diesen, Lasten an, und zwar im Knoten n' die Last P_n, so ist $Q'_n = Q_n - P_n$ und daher $V_n = -(Q'_n - P_n - dl)$ $= -(kl - P_n)$. Macht man daher (vergl. Fig. 111 *b*) $mk = P_n$, so wird $V_n = -ml = lm$. Die Kräfte links vom Schnitt $t't'$ bilden das schliefsende Krafteck $delmkd$.

Fig. 111 *b*.

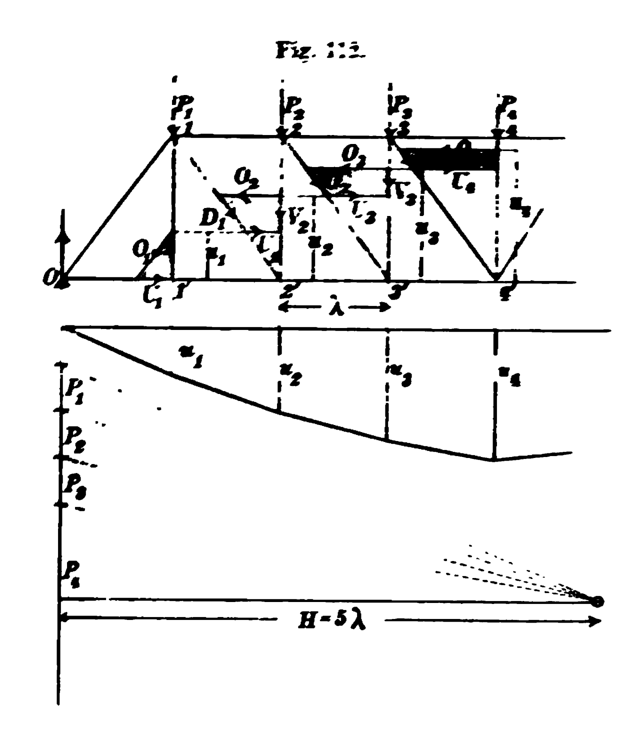


Diese zeichnerische Bestimmung der Stabkräfte im Liniennetz des Fachwerkbalkens gestaltet sich sehr einfach und kann auch ohne Zeichnung eines Seilecks ausgeführt werden, wenn die Momente der äufseren Kräfte in Bezug auf die Knotenpunkte berechnet sind. Man kann dann zufolge der Beziehung, $M_n = u_n \cdot H$ $= u_n \cdot n \cdot \lambda$, setzen $u_n = \frac{M_n}{n\lambda}$, oder bei der Wahl eines n-fach kleineren Mafsstabes für u_n auch $u_n = \frac{M_n}{\lambda}$ benutzen.

Fig. 112 zeigt die Anwendung des Verfahrens auf einen sogenannten Trapezträger, der symmetrisch und symmetrisch belastet ist. Die Lasten greifen in den Knoten des Obergurtes an. Die Stabkraft V_4 im Stabe $\overline{44'}$ wird wegen des Richtungswechsels der

Diagonalen rechts von dem Stabe zweckmäſsig aus dem Gleichgewicht der im Knoten 4 zusammentretenden Kräfte bestimmt,

Fig. 112.



welches ergibt $V_4 = -P_4$. V_1 erhält man aus dem Gleichgewicht am unbelasteten Knoten 1′ zu Null.

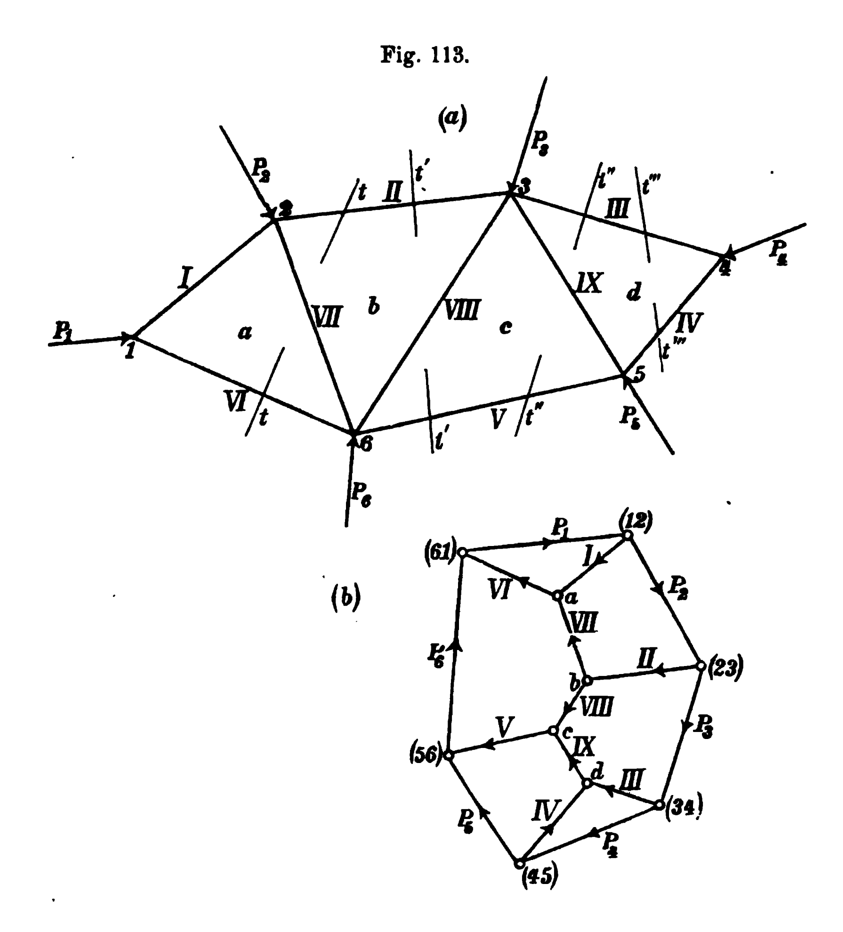
c) Kräftepläne.

Handelt es sich um die graphische Ermittelung aller Stabkräfte eines einfachen Fachwerkes, so verfährt man, wie oben bereits erwähnt, zweckmäſsig so, daſs bei jedem Schnitt nur zwei unbekannte Stabkräfte getroffen werden. Bei systematischer Aneinanderreihung der auszuführenden geometrischen Konstruktionen im Krafteck entsteht ein sogen. Kräfteplan, der alle äuſseren Kräfte und Stabkräfte in übersichtlicher Anordnung enthält.

Ein beliebiges Dreiecksfachwerk 1 2 3 4 5 6 (Fig. 113a) sei in seinen Knoten von beliebigen Kräften P_1, P_2, … P_6 ergriffen. Das

äußere Gleichgewicht der Kräfte P_1, P_2, ... P_6 führt zunächst zu dem schließenden Krafteck (1 2) (2 3) ... (4 5) (5 6) (6 1) (Fig. 113 *b*), dessen Eckpunkte als Schnittpunkte der Kräfte P_1 und P_2, P_2 und P_3 usw. mit (1 2) (2 3) usw. bezeichnet sind. Die Stäbe

Fig. 113.



des Fachwerks wie die in ihnen tätigen Stabkräfte sollen mit I, II, III ... IX bezeichnet werden.

Am Knoten 1 halten sich die Kraft P_1 und die Stabkräfte I und VI das Gleichgewicht. Ziehen wir daher im Krafteck durch (1 2) und (6 1) $(1\,2)\,a \parallel 1\,2$ und $(6\,1)\,a \parallel 1\,6$, so wird im Dreieck $(1\,2)\,a\,(6\,1)$ die Stabkraft $I = \overline{(1\,2)\,a}$ und $VI = \overline{a\,(6\,1)}$.

Wir schneiden nun nach tt; dann wirken am Teil links vom Schnitt die äußeren Kräfte P_1 und P_2 und die Stabkräfte VI, VII und II, von denen nur die beiden letzten unbekannt sind. Zieht man durch a und $(2\,3)$ $a\,b \parallel \overline{2\,6}$ und $(2\,3)\,b \parallel \overline{2\,3}$, so erscheinen die Kräfte P_1, P_2, VI, VII und II im Krafteck $(6\,1)\,(1\,2)\,(2\,3)\,b\,a$ vereinigt und es ist die Stabkraft $II = (2\,3)\,b$ und $VII = b\,a$.

Den Schnitten $t't'$ und $t''t''$ entsprechen die Kraftecke $(2\,3)$ $b\,c$ $(5\,6)$ $(6\,1)$ $(1\,2)$ $(2\,3)$ und $(3\,4)$ $d\,c$ $(5\,6)$ $(6\,1)$ $(1\,2)$ $(2\,3)$ $(3\,4)$ und aus denselben erhält man die Stabkräfte $VIII = b\,c$, $V = c\,(5\,6)$. $IX = d\,c$ und $III = (3\,4)\,d$. Durch den Schnitt $t'''t'''$ wird nur noch die unbekannte Stabkraft IV getroffen. Diese aber ist nach Richtung und Größe im Kräfteplan schon vorhanden, nämlich in der geraden Verbindung der Punkte $(4\,5)$ und d. Der Pfeilsinn dieser Kraft fällt für den Teil links vom Schnitt, an dem die Kräfte III, IV, P_5, P_6, P_1, P_2 und P_3 sich das Gleichgewicht halten, das schließende Krafteck $(3\,4)$ d $(4\,5)$ $(5\,6)$ $(6\,1)$ $(1\,2)$ $(2\,3)$ $(3\,4)$ bilden, in die Richtung $d\,(4\,5)$, und im Gleichgewicht der Kräfte III, IV, P_4 am Knoten 4 (Krafteck $(3\,4)$ $(4\,5)$ d) in die Richtung $(4\,5)\,d$. Der Umstand, daß $d\,(4\,5) \parallel \overline{4\,5}$ sein muß, bildet eine Kontrolle des ganzen Kräfteplans.

Den genau gleichen Kräfteplan erhält man, wenn man nacheinander das Gleichgewicht der Stabkräfte und der äußeren Kräfte an den einzelnen Knotenpunkten betrachtet. Dem Gleichgewicht an den Knoten 1, 2, 3 usw. entsprechen die Kraftecke $(1\,2)\,a\,(6\,1)$, $(2\,3)\,b\,a\,(1\,2)$, $(3\,4)\,d\,c\,b\,(2\,3)$ usw., wobei bezüglich des Pfeilsinnes der Stabkräfte zu beachten ist, daß jede Stabkraft im Gleichgewicht zweier benachbarter oder gegenüberliegender Knoten auftritt, in beiden aber entgegengesetzten Pfeilsinn aufweist. Die Stabkraft VII z. B. ist am Knoten 2 (Krafteck $(1\,2)$ $(2\,3)\,b\,a$) von b nach a und am Knoten 6 (Krafteck $(5\,6)$ $(6\,1)\,a\,b\,c$) von a nach b gerichtet. Bei der in Fig. 113 a gezeichneten Form und Lage des Fachwerks, der Größe und Richtung der äußeren Kräfte, haben alle Gurtstäbe und Wandglieder Druckkräfte zu leisten.

Die in der dargelegten Weise entstehenden Kräftepläne sind in ihren bemerkenswerten Eigenschaften von Cremona zuerst untersucht und werden daher vielfach nach ihm benannt.

Den Figuren 113*a* und 113*b* lassen sich folgende für die Zeichnung des Kräfteplans unter Umständen mit Vorteil verwendbare Beziehungen entnehmen:

1. *) In der Fig. 113*a* bilden die Stäbe *I, VII, VI* das Dreieck *a*	In Fig. 113*b* schneiden sich die Kräfte *I, VII, VI* im Punkte *a*
„ „ *II, VIII, VII* „ „ *b*	„ *II, VIII, VII* „ „ *b*
usw.	usw.
2. In Fig. 113*a* trennt der Stab *VII* die Dreiecke *a* u. *b*	In Fig. 113*b* trennt die Stabkraft *VII* die Punkte *a* u. *b*
„ „ *VIII* „ „ *b* u. *c*	„ *VIII* „ „ *b* u. *c*
usw.	usw.
3. In Fig. 113*a* verbindet der Stab *I* die Punkte 1 u. 2	In Fig. 113*b* geht die Stabkraft *I* durch den Punkt (1 2)
„ „ *II* „ „ 2 u. 3	„ *II* „ „ „ (2 3)
usw.	usw.

Wirken auf ein Fachwerk nur unter sich parallele äufsere Kräfte, wie z. B. bei einem Fachwerkbalken die etwa lotrechten Lasten und Stützwiderstände, so fallen die Eckpunkte des Kraftecks der äufseren Kräfte (1 2) (2 3) (3 4) ... in eine Gerade zusammen. Wird nur eine Gurtung von äufseren Kräften ergriffen, verschwinden beispielsweise in Fig. 113*a* die Kräfte P_2 und P_3, so fallen im Kräfteplan Fig. 113*b* die Punkte (1 2) (2 3) und (3 4) zusammen, die Stabkräfte *I*, *II* und *III* schneiden sich in einem Punkte.

In folgendem sollen für einige öfter vorkommende Trägerformen die Kräftepläne entwickelt werden.

1. Der Bogensehnenträger (Fig. 114*a* und 114*b*).

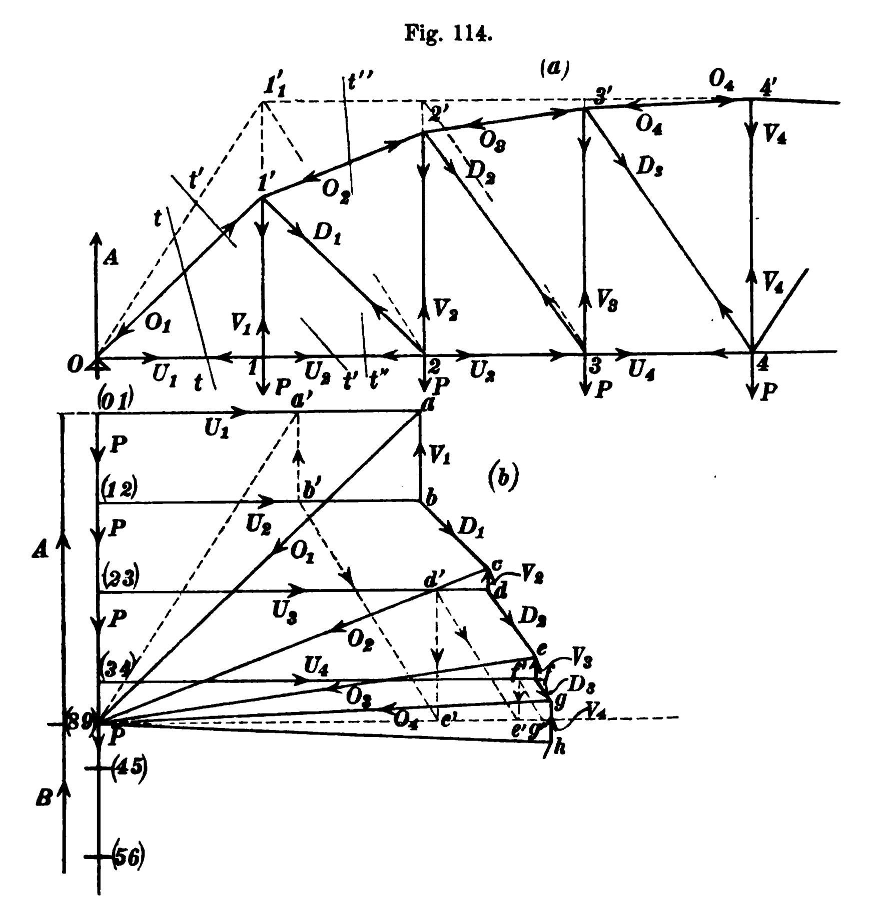
Einen in seiner oberen Gurtung nach irgend einem Gesetz symmetrisch gekrümmten in der unteren Gurtung geraden Fachwerkträger pflegt man „Bogensehnenträger" zu nennen. Liegt die gerade Gurtung des Trägers oben und ist die untere gekrümmt, so nennt man ihn „Fischbauchträger"; sind beide Gurtungen gekrümmt „Linsenträger".

---

*) Vergl. Müller-Breslau, Graph. Statik Bd. I, 3. Aufl. S. 214.

Der in Fig. 114*a* zur Hälfte dargestellte symmetrische Bogensehnenträger wird nur in den Knotenpunkten der unteren Gurtung von der überall gleichen Last P ergriffen. Diese bilden mit den Stützwiderständen $A = 3^1/_2 P$ in A und $B = 3^1/_2 P$ in B das

Fig. 114.



schliefsende Krafteck (0 1) (1 2) (2 3) ... (7 8) (8 9) (0 1) (Fig. 114*b*), wobei zu bemerken ist, dafs die etwa auf die gestützten Knotenpunkte 0 und 8 entfallenden Lasten $P/_2$ direkt auf die Stützen übergehen und ohne Einflufs auf die Stabkräfte bleiben. Die Entstehung des Kräfteplanes ist ohne weiteres ersichtlich. Die Stabkräfte O_1 bis O_8 der oberen Gurtung, deren Knotenpunkte unbelastet

sind, schneiden sich strahlenförmig im Punkte (8 9), in dem die Stützkräfte A und B zusammentreten.

Den Schnitten tt, $t't'$, $t''t''$ usw. entsprechen die schließenden Kraftecke (8 9) (0 1) a (8 9), (8 9) (0 1) (1 2) ba (8 9), (8 9) (0 1) (1 2) bc (8 9) usw., in denen $(0\,1)\,a = U_1$, $a\,(8\,9) = O_1$, $ba = V_1$, $(1\,2)\,b = U_2$, $bc = D_1$, $c\,(8\,9) = O_2$ usw. sind.

Wie aus den Gl. 4 und 5 S. 236 ersichtlich und auch durch freie Überlegung verständlich, nehmen die Stabkräfte in den Gurtstäben neben denjenigen in den Wandgliedern einen von ihrer Neigung (ω, ν) abhängigen Anteil an der Übertragung der Querkraft. Bei wagerechten Gurtungen verschwindet jene Anteilnahme und die Querkraft ist von den Wandgliedern allein aufzunehmen.

Bei der in Fig. 114 a angenommenen Gestaltung des Bogensehnenträgers haben die Vertikalen alle positive Stabkräfte V_1, V_2, V_3 und V_4 zu leisten. Gestaltet man den Obergurt zwischen den Punkten 1' und 4' wagerecht, indem man dem Träger Trapezform gibt, so geht der Kräftezug der Wandglieder im Kräfteplan von der Lage $abcdefg$ über in die Lage $a'b'c'd'e'f'g'$, in welcher die Strebenkräfte alle bei gleichbleibendem Richtungssinn erheblich größer ausfallen, die Ständerkräfte V_2 und V_3 ihren Richtungssinn umkehren und absolut genommen gleichfalls größer werden, während V_1 unverändert bleibt und V_4 verschwindet.

Man erkennt aus dem Kräfteplan auch leicht, welche Richtung die Stäbe 1'2', 2'3' und 3'4' des Obergurtes erhalten müßten, damit die Strebenkräfte D_1, D_2 und D_3 verschwinden. Es müßte der Punkt c mit b, e mit d und g mit f zusammenfallen, wodurch die Richtung der Strahlen (8 9) a, (8 9) b, (8 9) c usw. im Kräfteplan (Fig. 114 b) festliegen, denen die entsprechenden Stäbe des Obergurts parallel sein müssen. Dabei würde der Kräftezug der Wandglieder in eine Lotrechte durch a übergehen, $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = P$ und die Stabkräfte des Untergurtes alle gleich $U_1 = (0\,1)\,a$ werden, wenn man bei der Gestaltung des Obergurtes von der Richtung des Stabes $0\,1_1'$ ausgeht.

2. Der belgische Dachträger (Dachstuhl).

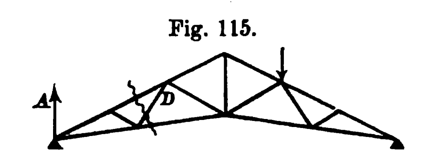
Als lotrechte ständige Belastung kommt in Frage diejenige durch das Eigengewicht des Trägers selbst und des Daches, sodann zeitweise auch Schneelast.

Neben dieser lotrechten Belastung kommt noch der senkrecht gegen die Dachfläche wirkende Winddruck in Betracht. Der Anteil der lotrechten Lasten und des Winddrucks an den Stabkräften soll getrennt festgestellt werden.

Was zunächst die lotrechten Lasten anlangt, so ist die ständige Belastung als gleichmäßig verteilt über die wagerechte Projektion

des Daches anzunehmen. Die Schneelast kann das ganze Dach, unter Umständen aber auch nur Teile desselben bedecken. Die gröfsten Stabkräfte in den Gurtungen entstehen, wenn das ganze Dach gleichmäfsig und tunlichst hoch mit Schnee bedeckt ist; denn alle lotrechten Lasten, wo sie sich zwischen den Stützpunkten auch befinden mögen, liefern positive Beiträge zu den Knotenpunktsmomenten M_u und M_o (vergl. S. 233/34) und folglich auch gleichsinnige Beiträge zu den Stabkräften aller Gurtstäbe. Dieselbe volle Schneelast führt auch, wie man sich leicht überzeugt, die gröfsten Stabkräfte in den Wandgliedern herbei. Ist nämlich, wie meistens, der Dachträger so gestaltet, dafs sich die geraden Gurten in den Auflagern schneiden (Fig. 115), so fällt der Momentendrehpunkt für alle Wandglieder der linken Hälfte in das linksseitige Auflager. Der von Lasten in irgend einer Lage in A erzeugte Stützdruck bleibt, weil durch den Drehpunkt gerichtet, ohne Einflufs auf die Stabkraft des durchschnittenen Wandgliedes. Alle Lasten rechts

Fig. 115.



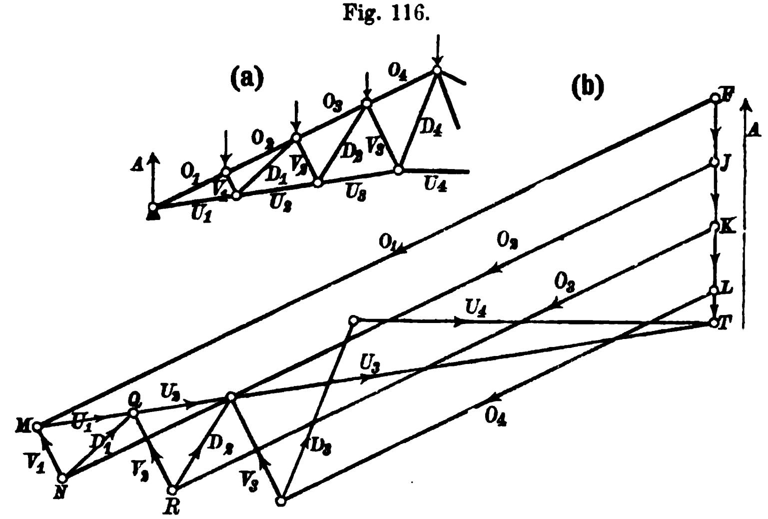
vom Schnitt wirken auf das Trägerstück links desselben aber nur durch den von ihnen erzeugten Stützdruck, liefern also keinerlei Beitrag zu der Stabkraft des betr. Wandgliedes. Alle Lasten links vom Schnitt erzeugen selbst in Bezug auf A ein positives Moment, also in links ansteigenden Wandgliedern negative, in rechts ansteigenden positive Stabkräfte. Volle Belastung links vom Schnitt führt also die absoluten Gröfstwerte der Stabkräfte in den Wandgliedern herbei, während die Belastung rechts vom Schnitt für dieselben indifferent ist. Zuweilen ist der Mittelstab des Untergurtes wagerecht und höher gelegen als die Stützpunkte A und B (vergl. Fig. 116 a). Dann fällt für einen Schnitt, der diesen Mittelstab trifft, der für die Bestimmung der Stabkräfte in den beiden anschliefsenden Wandgliedern mafsgebende Momentendrehpunkt zwischen die Auflagerlote und alle Lasten liefern positive Beiträge zu dem Moment und gleichsinnige Beiträge zu der Stabkraft des durchschnittenen Wandgliedes. Für so gelegene Wandglieder tritt der absolute Gröfstwert der Stabkraft daher nur für volle Belastung des ganzen Trägers ein.

Kräfteplan für lotrechte Belastung.

Ist F_1 die Gröfse der wagerechten Projektion der auf einen Knotenpunkt des Obergurts entfallenden Dachfläche, q die gröfstmöglichste lotrechte Belastung der Flächeneinheit der wagerechten Projektion der Dachfläche (ständige Last und Schneelast), so kommt auf einen Knotenpunkt eine Last $P = q \cdot F_1$.

In Fig. 116 *a* ist die eine Hälfte eines symmetrischen belgischen Dachträgers dargestellt und bei gleicher Teilung des Obergurtes in

Fig. 116.



allen Knotenpunkten die gleiche Last P angenommen. Die auf die gestützten Endknoten entfallendenLasten $P/_2$ gehen wieder, ohne auf die Stabkräfte zu wirken, in die Stützen über.

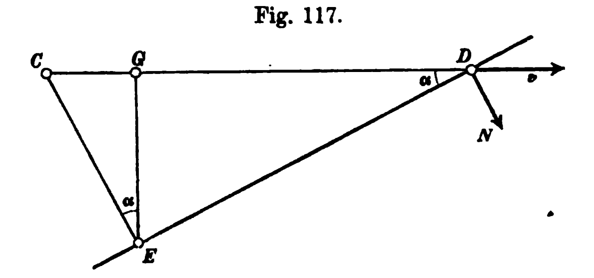
Der Kräfteplan für die linke Trägerhälfte, der auch für die rechte Hälfte gilt, ist in Fig. 116*b* dargestellt. Der Stützdruck A ist gleich $3^1/_2 P$, $(4P - P/_2)$ gleich der Strecke TF. Da die untere Gurtung unbelastet ist, schneiden sich die Stabkräfte derselben U_1, U_2, U_3 und U_4 in einem Punkte T, während die Stabkräfte des Obergurtes O_1, O_2, O_3 und O_4 in paralleler Lage durch die Knotenlasten $P = FJ = JK = KL$ getrennt sind. Zwischen beiden Kräftegruppen fügt sich der Zug der Stabkräfte in den Wandgliedern V_1, D_1, V_2, D_2, V_3 und D_3 ein. Die nacheinander durch die Trägerhälfte geführten Schnitte tt treffen die Stabkräfte O_1 und U_1 mit A im Gleichgewicht (Krafteck FMT), U_1, V_1 und O_2 mit

A und P im Gleichgewicht (Krafteck $JNMTFJ$), O_2, D_1 und U_2 mit A und P im Gleichgewicht (Krafteck $JNQTFJ$) U_2, V_2 und O_3 mit A und $2P$ im Gleichgewicht (Krafteck $KRQTFJK$) usw. Die Stabkräfte der links ansteigenden Wandglieder V_1, V_2, V_3 und V_4 sind Druckkräfte (negativ), die der rechts ansteigenden Zugkräfte (positiv).

Kräfteplan für den Winddruck.

Die Dachfläche schliefse mit der wagerecht angenommenen Windrichtung den Winkel α ein. Dann berechnet sich die auf einen Teil derselben von der Gröfse F entfallende, im wesentlichen senkrecht zu ihr wirkende Druckkraft des Windes nach der Lehre vom Stofs der Gase zu $N = 2\nu \cdot F \cdot \frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g}$ (ν Dichte der Luft). Der Winddruck bezogen auf 1 m² rechtwinklig zur Windrichtung, also lotrecht gestellter Fläche wird dann mit $\sin\alpha = 1$ $w = 2\nu \cdot \frac{v^2}{2g}$ und demnach, durch ω ausgedrückt, $N = \sin^2\alpha F \cdot w$. Ist F die Gröfse der auf einen Knotenpunkt des Obergurtes gestützten Dachfläche, so ist N die in jedem Knoten angreifende, senkrecht zur Dachfläche gerichtete Druckkraft des Windes.

Fig. 117.

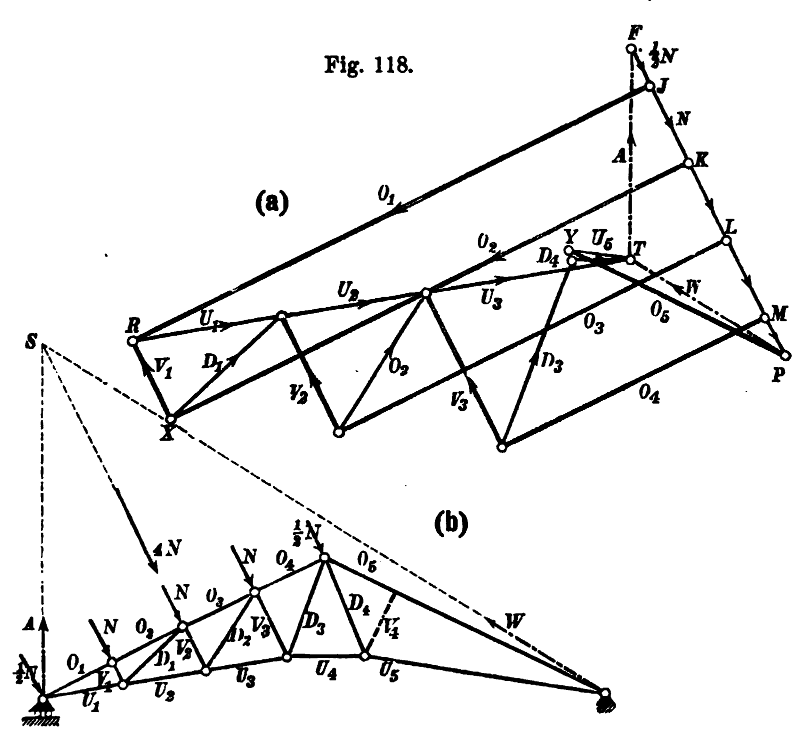


Die Kraft N kann man leicht auch durch Zeichnung finden: Man mache nach beliebigem Mafsstabe (Fig. 117) $CD = w \cdot F$, ziehe CE senkrecht zur Dachfläche und EG lotrecht; dann ist $CG = CE \sin\alpha = CD \sin^2\alpha = wF \cdot \sin^2\alpha = N$. Der Einheitsdruck w kann bei stärkstem Sturm und freier Lage 200—250 kg/m² erreichen.

Da immer nur eine Seite des Daches vom Winde getroffen werden kann, so mufs diese einseitige Windkraft allein mit den Stützdrücken in A und B im Gleichgewicht sein, wenn man bei Beurteilung lediglich der Wirkung des Winddruckes den Träger

selbst als gewichtslos annimmt. Die Gesamtdruckkraft des zunächst von links angenommenen Windes ist nach Fig. 118*a* gleich 4 N; sie muſs sich mit den Stützdrücken A und B in einem Punkte S schneiden. Ist bei der statisch bestimmten Lagerung des Trägers A als wagerecht verschiebliches, B als festes Stützgelenk ausgebildet, so ist der Stützdruck A lotrecht und S liegt senkrecht über A. Macht man im Krafteck (Fig. 118*b*) $FP = 4\,N$ und zieht durch P eine Parallele zu BS und durch F eine Lotrechte, so ist im

Fig. 118.

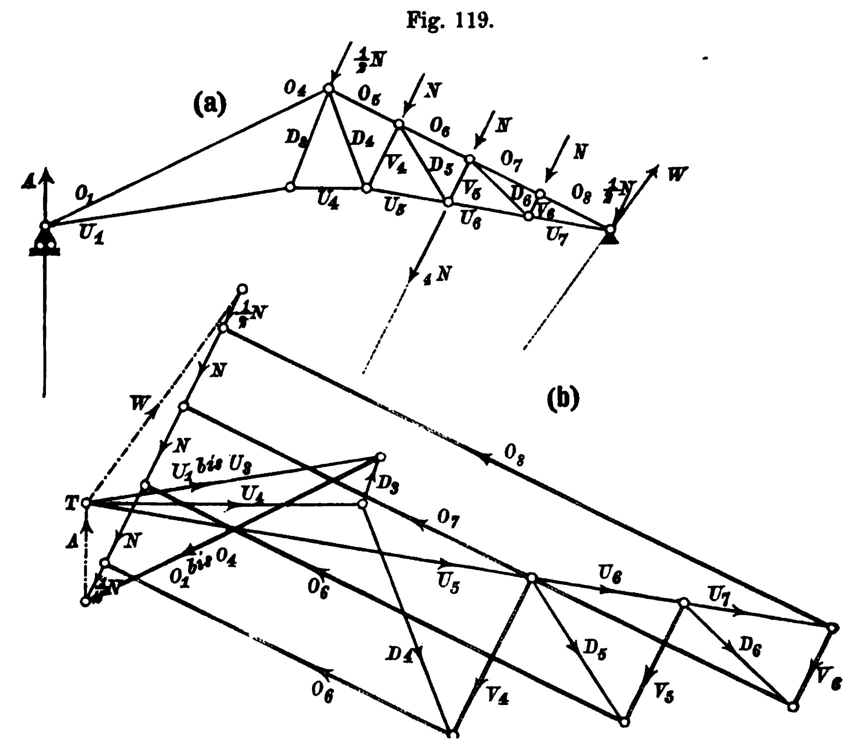


schlieſsenden Krafteck $FPTF \cdot TF = A$ und $PT = W$. Damit sind alle auf den Träger wirkenden äuſseren Kräfte bekannt und die Zeichnung des Kräfteplanes kann geschehen.

Die nacheinander durch die Trägerhälfte geführten Schnitte *tt* treffen die Spannkräfte U_1 und O_1 mit A und $N/2$ im Gleichgewicht (Krafteck $JRTFJ$), $U_1 V_1$ und O_2 im Gleichgewicht mit A, $N/2$ und N (Krafteck $KXRTFJK$), $O_2 D_1$ und U_2 mit A, $N/2$ und N im Gleichgewicht (Krafteck $KXZTFJK$) usw.

Die Stabkräfte des unbelasteten Untergurtes gehen durch denselben Punkt T, diejenigen des belasteten Obergurtes sind durch die Knotenlasten N getrennt. Im Zuge der Stabkräfte der Wandglieder folgen sich $V_1 D_1 V_2 D_2 V_3 D_3 D_4$. Die folgerichtige Durchführung des Kräfteplanes ergibt die Stabkräfte in den Wandgliedern in der unbelasteten Trägerhälfte rechts von D_4 durchweg gleich Null und die Stabkräfte in der oberen und unteren Gurtung je unter sich gleich, nämlich erstere alle gleich O_5 und letztere alle gleich U_5. Zu diesem Ergebnis gelangt man auch durch folgende Überlegung: führt man einen beliebigen Schnitt durch die unbelastete rechte Hälfte, so trifft dieser beide Gurtungen und irgend ein Wandglied. Die rechts vom Schnitte angreifenden vier Kräfte, die drei Stabkräfte und der Stützdruck B, müssen miteinander im Gleichgewicht sein. Die beiden Gurtstabkräfte schneiden sich mit dem Stützdruck B in B. Da nicht auch die Stabkraft des geschnittenen Wandgliedes durch den Punkt B gerichtet ist, so muſs diese gleich Null, und

Fig. 119.



die durch B gehenden drei Kräfte unter sich im Gleichgewicht sein. Das gilt für alle möglichen Schnitte durch die sich in B schneidenden Gurtstäbe und führt für alle zu dem Krafteck $PTYP$. Von der Dachneigung α hängt es dabei ab, ob beide Stabkräfte O_5 und U_5 Druckkräfte sind, oder nur erstere eine solche, aber letztere eine Zugkraft oder Null ist. Liegt der Punkt S (Fig. 118*b*) und daher auch der Stützdruck B in der Richtung des Obergurtstabes, so wird $U_5 = 0$; liegen beide unterhalb desselben, so wird U_5 eine Druckkraft, liegen sie, wie in Fig. 118*a*, oberhalb, so wird U_5 eine Zugkraft.

Weht der Wind von rechts (Fig. 119*a*), so liegt der Schnittpunkt S der Gesamtdruckkraft $4N$ des Windes mit dem lotrechten Stützdruck in A unterhalb A, wodurch wiederum auch die Richtung des Stützdruckes in B bekannt ist. Das aus der nach Gröfse und Richtung bekannten Kraft $4N$ und den nur in ihren Richtungen bekannten Stützdrücken A und B gebildete Krafteck, Fig. 119*b*, ergibt die Gröfse der letzteren. Im übrigen entwickelt sich der Kräfteplan wie für linksseitigen Winddruck, wobei jetzt die Gurtkräfte O_1 bis O_4 und U_1 bis U_4 je einander gleich und alle Wandglieder links von D_3 spannungslos werden.

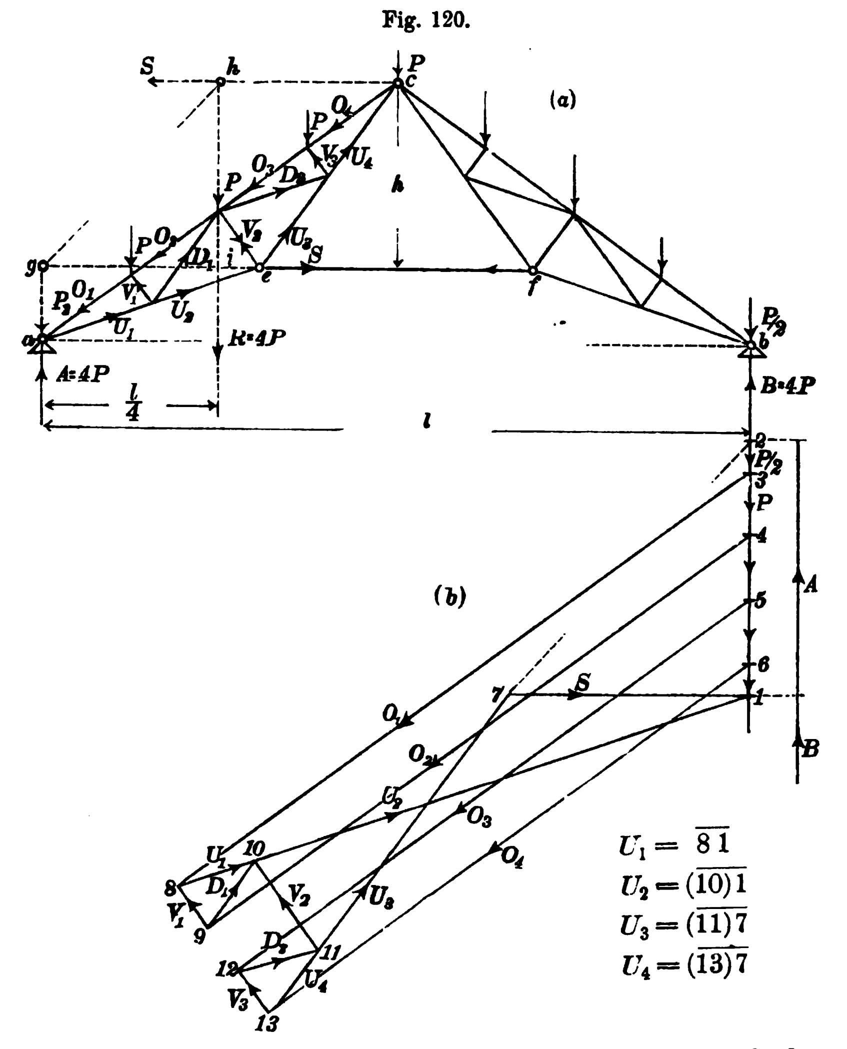
Von den beiden Spannkräften, die durch die Kräftepläne, Fig. 118*b* und Fig. 119*b*, für jeden Stab bei von links und rechts kommendem Winde ermittelt sind, ist je nur die gröfsere bei Berechnung der Stärkenabmessungen der Stäbe zu benutzen und zu diesem Zwecke der aus der lotrechten Belastung bestimmten Spannkraft hinzuzufügen.

3. Kräfteplan eines Wiegmann-Polonceau-Dachträgers.

Der in Fig. 120*a* dargestellte Dachträger kann als aus den beiden steifen gegliederten Scheiben *aec* und *bfc*, welche einfache Dreiecksfachwerke sind, entstanden angesehen werden. Im Sinne der Darlegungen auf S. 223 sind beide Scheiben in *c* drehbar verbunden und durch Einfügung des Stabes *ef* gegeneinander festgelegt. Die wirklichen Stützdrücke A und B für lotrechte Belastung sind hier, wie bei dem unter 2 behandelten Träger $A = B = 4P$, wovon indes, wenn man berücksichtigt, dafs die Lasten $P/2$ der gestützten Endknoten ohne Einwirkung auf die Stabkräfte direkt in die Stützen

übergehen unter gleichzeitiger Fortlassung dieser Last bei Ermittelung der Stabkräfte nur $3^1/_2 P$ als Stützdruck zu benutzen sein würde. Wir wollen hier indes, was gleichfalls berechtigt

Fig. 120.



ist, unter Beibehaltung der Last $P/_2$ in den Endknoten, auch den wirklichen Stützdruck $A = B = 4\,P$ einführen.

Bei Entwicklung des Kräfteplanes zunächst für die lotrechten Lasten entsteht die Unbequemlichkeit, dafs, wenn man vom links-

seitigen Auflager her nacheinander die Stabkräfte U_1 und O_1, dann U_1, V_1 und O_2, und weiter O_2, D_1 und U_2 durch Schnitte frei gelegt und aus dem Gleichgewicht mit den Kräften A und $P/_2$ bezw. A, $P/_2$ und P durch die Kraftecke 38123, bezw. 4981234, bezw. 49101234 bestimmt hat, jeder weitere Schnitt drei unbekannte Stabkräfte trifft und die Weiterentwicklung des Kräfteplanes in gleicher Weise, wie bis dahin unmöglich macht.

Um diese Unbequemlichkeit auf einfachste Weise zu umgehen, soll die Spannkraft S in dem Stabe ef vorweg bestimmt werden. Die Nullgleichheit der Summe der wagerechten Kräfte in Bezug auf jede der verbundenen steifen Scheiben bedingt, daſs in c ein der Spannkraft S im Stabe ef entgegengesetzt gleiche Kraft von Scheibe zu Scheibe übergeht. An der linksseitigen Scheibe wirken dann äuſserlich zwei Kräftepaare, nämlich einmal das aus der Stützkraft $A = 4P$ und der halben Dachlast $R = 4P$ bestehende mit dem Hebelsarm $\frac{l}{4}$ und das aus den beiden unbekannten Kräften S bestehende mit dem Hebelsarm h. Aus der Gleichung $S \cdot h = \frac{4P \cdot l}{4}$ erhält man $S = 4P \cdot \frac{l}{4} : h$. Zieht man im Kräfteplan, Fig. 120*b*, durch 1 eine Wagerechte und durch 2 eine Parallele $\overline{27}$ zu hg (Fig. 120*a*), so entstehen die ähnlichen Dreiecke 127 und ihg, woraus $\overline{17} = gi \cdot \overline{12} : hi = \frac{l}{4} \cdot 4P : h = S$ sich ergibt.

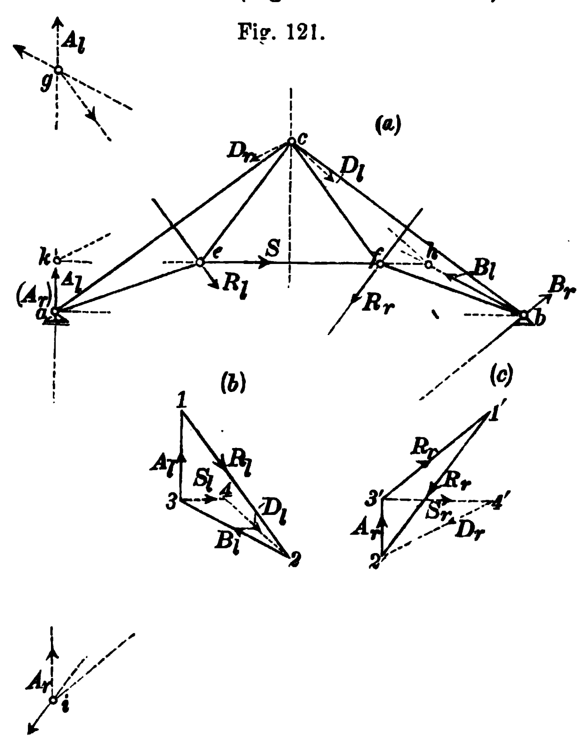
Zu demselben Ergebnis gelangt man, wenn man beachtet, daſs die Mittelkraft der sich in g schneidenden Stabkraft S und der Stützkraft A durch den Schnittpunkt h der Kraft R und der in c angreifenden Kraft S gehen muſs.

Nachdem so die Stabkraft $S = \overline{71}$ bekannt geworden, führt ein die Stabkräfte O_2, D_1, V_2, U_3 und S frei legender Schnitt zu dem Krafteck 49(10)(11)71234, indem man nämlich durch die bekannten Punkte 10 und 7 Parallelen zieht zu den Stäben V_2 und U_3. Die weitere Entwicklung des Kräfteplanes bietet keine Schwierigkeiten mehr. Sie führt aber noch zu einer nützlichen Kontrolle des Planes. Hat man nämlich vermittelst zweier weiterer Schnitte durch O_3, D_2 und U_3 und durch O_3, V_3 und U_4 die Kräfte O_3 und D_2 durch das Krafteck 5(12)(11)712345 und die Kräfte V_3 und U_4 durch das Krafteck 5(12)(13)712345

bestimmt, so wird im letzten Schnitt durch O_4, U_4 und S nur noch die Kraft O_4 als Unbekannte getroffen. Die am Trägerteil links vom Schnitt wirkenden bekannten Kräfte U_4, S, A und $3^1/_2\,P$ bilden im Kräfteplan den Streckenzug (13) 7 1 2 6. Die Schlufslinie desselben 6 (13), mufs also nach Richtung und Gröfse gleich der Stabkraft O_4 und daher parallel dem Stabe O_4 sein.

Die Kräftepläne für die Windkräfte von links und rechts lassen sich in ähnlicher Weise wie für den unter 2 behandelten Träger entwickeln, nur ist es zweckmäfsig, vorweg wieder die Stabkraft S im Stabe ef zu ermitteln. Das kann wie folgt geschehen. Die Stützkräfte A_l und B_l für den Winddruck von links, sowie A_r und B_r für Winddruck von rechts werden genau wie unter 2 durch die Kraftecke 1 2 3 und 1′ 2′ 3′ (Fig. 121 *b* und 121 *c*) bestimmt. In

Fig. 121.



beiden Fällen üben die in *c* verbundenen steifen Scheiben hier entgegengesetzt gleiche Kräfte D aufeinander aus. Bei Winddruck von links steht die Kraft D_l an der rechtsseitigen unbelasteten

Scheibe mit der Stabkraft S im Stabe ef und dem Stützdruck B_l im Gleichgewicht, mufs also durch den Schnittpunkt h (Fig. 121 a) von S und B_l gehen, also die Richtung ch aufweisen. Das Krafteck $2\,3\,4\,2$ ergibt $S_l = 3\,4$. Je nach der Dachneigung fällt der Punkt g unterhalb oder oberhalb der Richtung bc oder auf dieselbe, und dementsprechend im Krafteck der Punkt 4 oberhalb, unterhalb oder auf die Richtung $2\,3$. Im ersten Falle wird S_l eine Druckkraft, im zweiten eine Zugkraft, im letzten gleich Null. Für rechtsseitigen Winddruck hat die Kraft D_r in c die Richtung ck; D_r, S_r und A_r stehen an der unbelasteten linken Scheibe im Gleichgewicht. Aus dem Krafteck $2'\,3'\,4'\,2'$ erhält man $S_r = 3'\,4'$ stets als Zugkraft.

III. Stabkräfte für ständige und bewegliche Lasten.

a) Einflufslinien der Stabkräfte.

Wir machen die Voraussetzung, dafs die Lasten nur an den Knotenpunkten des e i n e n Gurtes, z. B. des oberen, angreifen und nennen diesen den b e l a s t e t e n Gurt. Zur unmittelbaren Aufnahme der Lasten und Übertragung derselben auf die Knotenpunkte dienen Zwischenträger; die Belastung des Fachwerkbalkens ist also als eine m i t t e l b a r e anzusehen. Für die Berechnung der Spannkräfte des unbelasteten Gurtes dienen die Knotenpunkte des anderen als Drehpunkte.

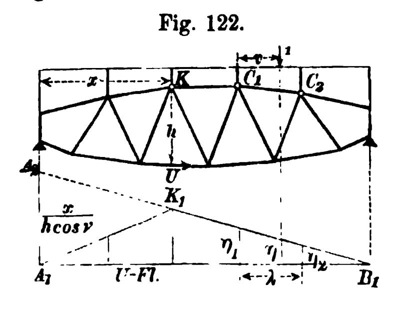
1. Einflufslinie für den unbelasteten Gurt.

Da für die Spannkraft U in einem beliebigen Stabe des unbelasteten Untergurts dieselbe Gleichung

$$U = \frac{M_k}{h \cos \nu}$$

gilt wie für einen Vollträger (M_k bedeutet das Biegungsmoment in Bezug auf den Knotenpunkt K des belasteten Gurtes, Fig. 122), so wird auch die Einflufslinie für U dieselbe werden wie in Fig. 96, S. 208. Hat der Drehpunkt K den Abstand x vom linksseitigen Auflager, so macht man

Fig. 122.



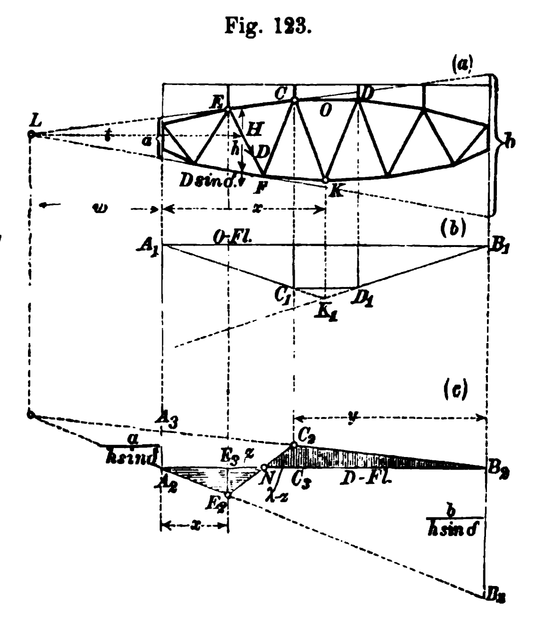
$A_1 A_2 = \dfrac{x}{h \cos \nu}$, wodurch sich der Linienzug $A_1 K_1 B_1$ als Einflußlinie für unmittelbare Belastung bestimmt.

Die Einflußlinie für die hier in Frage kommende mittelbare Belastung ist nach Bd. I S. 158 ein Sehnenvieleck derjenigen für unmittelbare Belastung, dessen Eckpunkte unter den Knotenpunkten (hier den belasteten) des Trägers liegen. Da im vorliegenden Falle die Einflußlinie für unmittelbare Belastung aus zwei im Punkte K_1 zusammenstoßenden Geraden besteht, K_1 aber selbst lotrecht unter einem belasteten Knoten (K) liegt, so fällt für die Stabkräfte des unbelasteten Gurtes die Einflußlinie mit dem Linienzuge $A_1 K_1 B_1$ zusammen.

2. Einflußlinien für den belasteten Gurt.

Für die Stabkraft O im Stabe CD des belasteten Gurtes liegt der maßgebende Drehpunkt K auf dem unbelasteten Gurte. Daraus ergibt sich in bekannter Weise zunächst für unmittelbare Belastung die Einflußlinie $A_1 K_1 B_1$ (Fig. 123) für die Stabkraft O, wobei die Richtung $B_1 K_1$ auf dem linksseitigen Stützlot wieder die Strecke $x : h \cos \omega$ abschneidet. Die Knotenpunktslote durch C und D schneiden jetzt den Streckenzug $A_1 K_1 B_1$ in C_1 und D_1 und $A_1 C_1 D_1 B_1$ ist daher wirkliche Einflußlinie der Stabkraft O des belasteten Gurtes. Greift die Last in dem Knotenpunkte des Untergurtes an, ist dieser der belastete Gurt, so wird die Einflußfigur seiner Stabkräfte ein Viereck $A_1 C_1 D_1 B_1$ und diejenige der Stabkräfte des Obergurtes ein Dreieck. Ist das Fachwerk

Fig. 123.



ein Ständerfachwerk, d. h. enthält es lotrechte Pfosten, so dafs der Drehpunkt K immer in einem Knotenpunktslot der belasteten Gurtung liegt, so fällt K_1 stets entweder mit C_1 oder D_1 zusammen und die Einflufsfiguren der Stabkräfte sowohl der oberen als der unteren Gurtung sind einfache Dreiecke $(A_1 C_1 B_1)$. (Um auszudrücken, dafs die Stabkraft positiv oder negativ ist, kann man die Einflufsordinaten nach oben oder nach unten auftragen.) Für jeden Gurtstab sind die Einflußordinaten der Stabkraft alle gleichstimmig und zwar für die Stäbe des Obergurtes alle negativ, für die des Untergurtes alle positiv.

3. Einflufslinien für eine Strebe.

Weil zufolge Gl. 2 S. 207 und Gl. 4 S. 236 der Scherwiderstand Y der Wand eines Vollwandträgers genau die gleiche statische Bedeutung hat wie die lotrechte Seitenkraft $D \sin \delta$ der Stabkraft eines beliebigen Wandgliedes, so läfst sich auch die Einflufslinie der Strebenkraft D ohne weiteres aus derjenigen des Scherwiderstandes Y (Fig. 96 *c*) gewinnen, indem man die Ordinaten der letzteren durch $\sin \delta$ dividiert, wobei für links ansteigende Diagonalen $\delta > 0$ Y und D auch hinsichtlich des Vorzeichens gleichstimmig, für rechts ansteigende Diagonalen dagegen ungleichstimmig sind. Um die Einflufslinie der Stabkraft einer links ansteigenden Strebe zu erhalten, hat man daher in Fig. 123 *c* in den Stützloten $A_2 A_3 = \frac{a}{h \sin \delta}$ nach oben und $B_2 B_3 = \frac{b}{h \sin \delta}$ nach unten aufzutragen. Die Linien $A_2 B_3$ und $A_3 B_2$ schneiden sich wieder im Lot durch den Drehpunkt L. Die Linie $B_2 A_3$ gilt als Einflufslinie rechts vom durchschnittenen Fach, d. h. bis zum Lot durch den Knotenpunkt C des belasteten Gurtes, die Linie $A_2 B_3$ aber links vom Lot durch den Knotenpunkt E des belasteten Gurtes am durchschnittenen Fach. Verbindet man daher die Schnittpunkte C_2 und E_2 der Lote durch C und E mit den Geraden $A_3 B_2$ und $A_2 B_3$ durch die Gerade $C_2 E_2$, so ist $A_2 E_2 C_2 B_2$ die Einflufslinie der Strebenkraft D. Der Schnittpunkt N, in welchem die Einflufslinie die Einflufsnullachse schneidet, hat die Bedeutung einer Belastungsscheide; links von N herrscht negativer, rechts von N positiver Einflufs. Die Gröfse h (Fig. 123 *c*) ist die Trägerhöhe an der Stelle H (Fig. 123 *a*), wo eine Wagerechte durch den Drehpunkt L die Strebe EF trifft. L ist Schnittpunkt der Richtungen der Gurtstäbe, welche der durch die Strebe

geführte Schnitt trifft, und a und b sind die Abschnitte der Stützlote, welche jene Richtungen zwischen sich fassen. Zur Zeichnung der Einflufsfigur 123 c genügt übrigens die Ermittelung eines der Abschnitte A_2A_3 oder B_2B_3. Ist ersterer bekannt, so liegt damit die Richtung B_2A_3 fest. Da diese und die Richtung A_2B_3 sich im Lot durch L schneiden, so liegt damit auch A_2B_3 fest.

Ist der Untergurt „belasteter“ Gurt, so fallen die Punkte C_2 und E_2 in die Lotrechten durch die das durchschnittene Fach begrenzenden Knotenpunkte dieses Gurtes. Handelt es sich um eine rechts ansteigende Strebe, ist $\delta < 0$, so kehren alle Einflufsordinaten ihre Vorzeichen um; links von N herrscht jetzt positiver, rechts negativer Einflufs. Kommen neben links ansteigenden Diagonalen lotrechte Wandglieder (Ständer) vor, so ist für deren Einflufslinie $\delta = -90^0$ $\sin\delta = -1$ zu setzen. Steigen die benachbarten Diagonalen rechts an, so ist $\sin\delta = \sin 90^0 = 1$ zu setzen.

Die Einflufslinie für D kann man leicht auch unmittelbar finden, ohne auf den Vollwandträger zurückzugreifen. Denkt man sich nämlich die Kraft D in H (Fig. 123 a) in die Seitenkräfte $D\sin\delta$ und $D\cos\delta$ zerlegt, so geht letztere durch L und erstere allein hat gleichwie der Scherwiderstand Y am Vollwandbalken die Momentengleichung S. 209 in Bezug auf L zu erfüllen.

Die Belastungsscheide N kann man leicht auch am Träger unmittelbar finden, ohne die Einflufslinie zu zeichnen. Bei den aus Fig. 123 c ersichtlichen Bezeichnungen mit $\lambda = E_3C_3$ als Weite des durchschnittenen Faches am belasteten Gurt erhält man

$$E_2E_3 = \frac{b}{h\sin\delta}\cdot\frac{x}{l},\quad C_2C_3 = \frac{a}{h\sin\delta}\cdot\frac{x}{l},\ \text{woraus weiter folgt}$$

$$1)\qquad \frac{z}{\lambda - z} = \frac{E_2E_3}{C_2C_3} = \frac{b}{a}\cdot\frac{x}{y}.$$

Bringt man in Fig. 124 die Richtung des vom Schnitte getroffenen Stabes der unbelasteten Gurtung mit den Stützloten in A_1 und B_1 zum Schnitt und zieht von A_1 über E, von B_1 über C je eine Gerade, wobei E und C Endpunkte des durchschnittenen Stabes des belasteten Gurtes sind, so ist der Schnittpunkt N beider Geraden

Fig. 124.

Belastungsscheide für die Stabkraft D, denn er erfüllt die der Einflußfigur 123 c entnommene Gleichung 1. Aus Fig. 124 folgt unmittelbar

$$c = \frac{a}{x'} z' = \frac{b}{y'} \cdot (\lambda' - z'), \quad \text{also} \quad \frac{z'}{\lambda - z'} = \frac{b}{a} \cdot \frac{x'}{y'}$$

und die Strecken $x'y'z'$ und λ' sind ihren wagerechten Projektionen xyz und λ verhältnisgleich. Für Parallelträger wird $a = b = h$, also $\frac{a}{h \sin \delta} = \frac{b}{h \sin \delta} = \frac{1}{\sin \delta}$ und daher $A_2B_3 \parallel B_2A_3$.

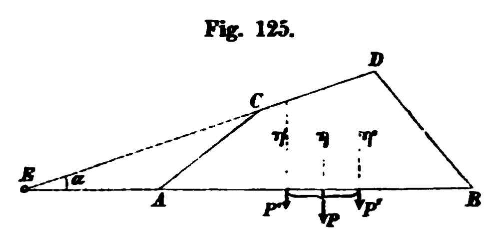
b) Ermittelung der größten Stabkräfte.

Nachdem unter a die Einflußlinien für alle in Frage kommenden Stabkräfte eines einfachen Fachwerkbalkens entwickelt sind, kann die Benutzung derselben zur Ermittelung der größten Stabkräfte im allgemeinen nach der Darlegung Bd. I S. 157 geschehen, indem zur Herbeiführung des positiven oder negativen Größtwertes bezw. des Maximums oder des Minimums einer Stabkraft die bewegliche Last nur im Bereiche der positiven oder nur im Bereiche der negativen Einflußfläche angeordnet wird. Man erhält dann die größten oder kleinsten Stabkräfte in der Form $S_{max} = F_+ \cdot p + (F_+ - F_-)g$ und $S_{min} = -F_- \cdot p + (F_+ - F_-)g$, wenn es sich um gleichmäßig verteilte Last handelt, oder in der Form $S_{\substack{max \\ min}} = \Sigma P_n \cdot \eta_n$, wenn Einzellasten in Frage kommen. Um im letzteren Falle wirklich S_{max} bezw. S_{min} zu erhalten, sind die größten beweglichen Einzellasten im Bereiche der größten positiven bezw. größten negativen Einflußordinaten aufzustellen. Nicht immer ist indes die Stellung einer Gruppe etwa gegenseitig unverschieblich miteinander verbundener beweglicher Einzellasten (Achsdrücke eines Eisenbahnzuges), welche wirklich S_{max} und S_{min} herbeiführt, ohne weiteres genau zu erkennen. Es soll daher in nachstehendem zunächst ein Verfahren zur genauen Ermittelung jener Laststellung mit Hülfe der Einflußlinien entwickelt werden.

Nach Fig. 122 und 123 (S. 257 und 258) sind die hier in Frage kommenden Einflußfiguren Dreiecke oder Vierecke. Es läßt sich nun zunächst zeigen, daß die im Gebiete einer und derselben Einflußgeraden befindlichen Lasten durch

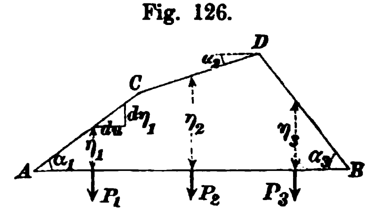
ihre Mittelkraft ersetzt werden können. Sind nämlich in der Einflußstrecke CD (Fig. 125) die Lasten P' und P'' gegeben, so ist deren Gesamteinfluß auf die betreffende Spannkraft (oder sonstige Größe, auf die sich die Einflußfigur bezieht) $S = P'\eta' + P''\eta''$. Schneidet aber CD die Gerade AB in E unter einem Winkel α und in den Abständen x' und x'' von den Lasten, so ist $\eta' = x' \operatorname{tg} \alpha$, $\eta'' = x'' \operatorname{tg} \alpha$, mithin $S = \operatorname{tg} \alpha (P'x' + P''x'')$. Für die Momentensumme $P'x' + P''x''$ läßt sich aber nach der Gleichung der statischen Momente das Moment der Mittelkraft Px setzen (wenn P die Mittelkraft von P' und P''), und da $x \operatorname{tg} \alpha = \eta$, so wird $S = P\eta$, d. h. genau so, als ob man es nur mit der Mittelkraft P zu tun hätte.

Fig. 125.



Sind hiernach die Lasten jeder Einflußstrecke zu Mittelkräften P_1, P_2, P_3 vereinigt (Fig. 126), so ist deren Gesamtwirkung $S = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + P_3\eta_3$. Die Neigungswinkel der Einflußgeraden seien α_1, α_2, α_3. Es möge nun die ganze zusammenhängende Lastengruppe um die Strecke du nach rechts verschoben werden, ohne daß dabei eine der ursprünglich gegebenen Einzellasten eine Einflußgrenze A, C, D oder B überschreite; dann bleiben P_1, P_2 und P_3 dieselben, die Einflußordinaten aber ändern sich vermöge der Verschiebung, und die Gesamtwirkung erleidet eine Zunahme $dS = P_1 d\eta_1 + P_2 d\eta_2 + P_3 d\eta_3$. Hierin ist nach der Figur $d\eta_1 = du \operatorname{tg} \alpha_1$, $d\eta_2 = du \operatorname{tg} \alpha_2$, $d\eta_3 = -du \operatorname{tg} \alpha_3$ (negativ, weil DB nach rechts abfällt). Daher wird

Fig. 126.



1) $$dS = (P_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + P_2 \operatorname{tg} \alpha_2 - P_3 \operatorname{tg} \alpha_3)\, du$$

oder bei beliebig vielen Einflußstrecken und wenn man die Neigungen durchweg als nach rechts ansteigend positiv auffaßt:

2) $$dS = du\, \Sigma P \operatorname{tg} \alpha .$$

Ist $\Sigma P \operatorname{tg} \alpha > 0$, so wird eine Verschiebung der Lasten nach rechts eine Vergrößerung von S zur Folge haben, und umgekehrt. Kommt es also darauf an, dafs S möglichst grofs werde, so mufs bei positivem Vorzeichen von $\Sigma P \operatorname{tg} \alpha$ die Lastgruppe nach rechts verschoben werden, und umgekehrt. War $\Sigma P \operatorname{tg} \alpha$ etwa zu Anfang > 0, so wird bei einer Lastverschiebung nach rechts dieses positive Vorzeichen so lange bestehen bleiben, bis durch Hinübertreten von Einzellasten über die Einflufsgrenzen und dadurch verursachte Aenderung der Gruppen P_1, P_2 und P_3 die negativen Glieder das Uebergewicht bekommen. Da nämlich die Winkel α unveränderlich sind, beim Vorhandensein von Einzellasten aber die Gruppen P_1, P_2, P_3 sich nur sprungweise ändern können, indem eine Last aus der einen Gruppe in eine andere übertritt, so ist es nicht ohne weiteres möglich, durch Lastverschiebung $\Sigma P \operatorname{tg} \alpha = 0$ zu machen. Hat aber dieser Wert einen Zeichenwechsel erfahren, so mufs die Lastengruppe nun entgegengesetzt verschoben werden. **Hiernach wird der Einflufs einer gegebenen Lastgruppe möglichst grofs, wenn diejenige Last, deren Verschiebung über eine Einflufsgrenze hinüber einen Zeichenwechsel in dem Werte $\Sigma P \operatorname{tg} \alpha$ hervorbringt, gerade auf diese Einflufsgrenze gestellt wird.**

Fig. 127.

Ist der positive oder negative Teil der Einflufsfigur ein einfaches Dreieck (von der Höhe f), kommen mithin nur zwei Einflufsstrecken der wagerechten Längen c_1 und c_2 in Frage, so wird (Fig. 127)

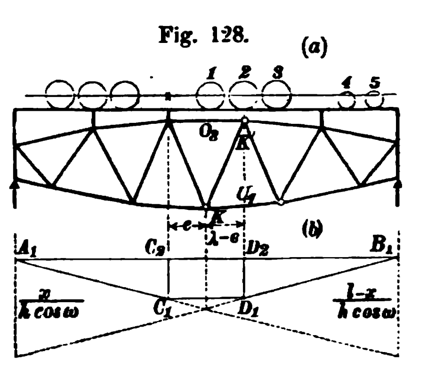
$$3) \qquad \Sigma P \operatorname{tg} \alpha = P_1 \operatorname{tg} \alpha_1 - P_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = f\left(\frac{P_1}{c_1} - \frac{P_2}{c_2}\right).$$

Da nun P_1 die Gesamtlast der Einflufsstrecke c_1, so ist $P_1 : c_1$ die durchschnittliche Belastung der Längeneinheit der Strecke c_1 und $P_2 : c_2$ diejenige der Strecke c_2; um also die ungünstigste Laststellung zu finden, hat man **diese beiden durchschnittlichen Belastungen für die Längeneinheit durch entsprechende Verschiebung der Lastengruppe möglichst auszugleichen, und diejenige Last, deren Verschiebung über eine Einflufsgrenze hinüber einen Zeichenwechsel in dem Unterschiede der durchschnittlichen Be-**

lastungen der beiden Einflufsstrecken hervorbringt, mufs gerade auf diese Einflufsgrenze gestellt werden.

Ungünstigste Laststellung für einen Stab des unbelasteten Gurtes. Da für diesen Fall der Drehpunkt mit einem Lastpunkte zusammenfällt, so ist die Einflufsfigur nach Fig. 122 (S. 257) ein einfaches Dreieck. In Fig. 128*a*, einen Träger von 20 m Weite darstellend, sind die Lasten oben gedacht. Die Spannkraft U_4 im vierten Fache des Untergurts werde betrachtet, so dafs K' der Drehpunkt wird; ist dessen Abstand vom linken Auflager $x = 12^m$, so sind x und $l - x$ die beiden Einflufsstrecken, auf denen die durchschnittlichen Belastungen möglichst auszugleichen sind. Zur Auffindung der ungünstigsten Laststellung zeichne man die Lastgruppe in dem Mafsstabe des Trägers auf einen Papierstreifen, den man leicht über dem Träger verschieben kann. Die in sich unverschiebliche Lastengruppe soll aus den Achsdrücken eines Zuges von Lokomotiven bestehen, deren eine mit zugehörigem Tender in Fig. 127 dargestellt ist. Da es für ein Gurtstück darauf ankommt, möglichst viel schwere Lasten in der Nähe des Momentendrehpunktes K_1 (im Bereich der

Fig. 128.



gröfsten Einflufsordinaten) unterzubringen, so stellt man 2 Lokomotiven mit den Schornsteinen gegeneinander, weil auf diese Weise eine Folge von 6 schweren Triebachsen entsteht. Bringt man nun die mittlere Triebachse der rechtsseitigen Lokomotive über den Drehpunkt K', so ist das die ungünstigste Stellung für U_4. Denkt man sich nämlich zunächst das Rad 2 noch rechts von K' stehend, so wird die Gesamtlast der Einflufsstrecke links von K': $P_1 = 4 \cdot 13 = 52^t$, die Last der rechtsseitigen Strecke $P_2 = 2 \cdot 13 + 2 \cdot 9 = 44^t$. Die durchschnittlichen Belastungen sind daher $52 : 12 = 4^1/_3$ bezw. $44 : 8 = 5^1/_2$; rechts ist daher die Belastung stärker, so dafs eine Verschiebung nach links erfolgen mufs. Steht infolgedessen aber das Rad 2 links von K', so vergröfsert

sich P_1 auf $52 + 13 = 65^t$, während sich P_2 um ebensoviel, also auf $44 - 13 = 31^t$ vermindert, so daſs nun die durchschnittliche Belastung links ($65:12 = 5^5/_{12}$) gröſser ist als rechts ($31:8 = 3^7/_8$). Die Verschiebung des Rades 2 über den Drehpunkt hinüber hat daher den Unterschied der durchschnittlichen Belastungen umgekehrt, es muſs mithin dieses Rad über K' gestellt werden (Fig. 128 *a*).

Während das Rad 2 den Drehpunkt K' überschreitet, geht der Unterschied der durchschnittlichen Belastungen der beiden Einfluſsstrecken links und rechts von K' sprungweise aus dem Positiven ins Negative über. Sobald aber die Radlast 2 gerade bei K' steht, kann man sie offenbar nach Belieben zu der Gruppe P_1 oder der Gruppe P_2 zählen; auch kann man sich diese Last derart in zwei Teile zerlegt denken, daſs wenn man den einen Teil zu P_1, den anderen zu P_2 rechnet, die durchschnittlichen Belastungen links und rechts von K' nicht nur möglichst gleich, sondern wirklich gleich werden. Die durchschnittliche Belastung der Längeneinheit für die ganze Stützweite beträgt $(16 \cdot 13 + 2 \cdot 9):20 = 4{,}8^t$; dies gibt links von K_1 $12 \cdot 4{,}8 = 57{,}6^t$. Von der Last 2 über K_1 müſsten daher $57{,}6 - 4 \cdot 13 = 5{,}6^t$ zur linksseitigen, $13 - 5{,}6 = 7{,}4^t$ zur rechtsseitigen Gruppe gerechnet werden, damit die durchschnittlichen Belastungen beiderseits gleich seien. In diesem Sinne kann man auch den allgemeinen Satz auf S. 263 jetzt dahin ändern: Der Einfluſs einer gegebenen Lastgruppe wird möglichst groſs, wenn dadurch, daſs eine Last gerade auf einer Einfluſsgrenze steht, der Wert $\Sigma P \operatorname{tg} \alpha = 0$ wird.

Was nun die Ermittelung der Spannkraft U_4 selbst anbelangt, so berechnet man den Einfluſs der ständigen Belastung, wie auf S. 257 gezeigt; den Einfluſs der Radlasten kann man entweder ebenfalls mittels der Momentengleichung finden, wobei es nicht erforderlich ist, die Radlasten erst in Knotenpunktsbelastungen umzuwandeln, wenn man nur zur Vermeidung von Irrungen den Schnitt genau durch K' gelegt denkt; — oder man kann das Einfluſsdreieck für U benutzen, jede Last mit der zugehörigen Einfluſsordinate multiplizieren und $\Sigma P \eta$ bilden.

Ungünstigste Laststellung für einen Stab des belasteten Gurtes. Bei einem Ständerfachwerke wäre die Behandlung dieselbe, wie vorstehend, weil der Drehpunkt in einer Lastpunktsenkrechten liegen

würde. In Fig. 128*a* aber liegt der zu O_3 gehörige Drehpunkt K um e bezw. $\lambda - e$ vom linken und rechten Lastpunkte des durchschnittenen Faches entfernt (wagerecht gemessen), so dafs die Einflufsfigur 128*b* zu benutzen ist.

Es kommt darauf an, den Wert $\Sigma P \operatorname{tg} \alpha$ mit Hülfe der gegebenen Abmessungen des Balkens auszudrücken. Bezeichnet man jetzt die Abszisse des Punktes K mit x, so ergibt sich leicht aus der Figur

$$C_1 C_2 = \frac{l-x}{h \cos \omega} \cdot \frac{x-e}{l}; \quad D_1 D_2 = \frac{x}{h \cos \omega} \cdot \frac{l-x-\lambda+e}{l};$$

$$A_1 C_2 = x - e; \quad B_1 D_2 = l - x - \lambda + e.$$

Rechnet man daher die Ansteigungen nach links positiv, so wird

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{l-x}{h \cos \omega \cdot l}; \quad \operatorname{tg} \alpha_3 = -\frac{x}{h \cos \omega \cdot l};$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{x(l-x-\lambda+e)-(l-x)(x-e)}{h \cos \omega \cdot l \lambda}$$

$$= \frac{(l-x)e}{h \cos \omega \cdot l \lambda} - \frac{x(\lambda-e)}{h \cos \omega \cdot l \lambda}.$$

Mithin wird

$$\Sigma P \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{h \cos \omega \cdot l} \left\{ P_1 (l-x) + P_2 (l-x) \frac{e}{\lambda} - P_2 x \frac{\lambda - e}{\lambda} - P_3 x \right\}$$

$$4) \qquad \Sigma P \operatorname{tg} \alpha = \frac{x(l-x)}{h \cos \omega \cdot l} \left\{ \frac{P_1 + P_2 \, {}^e\!/\!_\lambda}{x} - \frac{P_3 + P_2 (1 - {}^e\!/\!_\lambda)}{l-x} \right\}.$$

Der eingeklammerte Teil, auf dessen Vorzeichen es ankommt, ist hier auch wieder auf die Form des Unterschiedes der durchschnittlichen Belastungen links und rechts vom Drehpunkte zurückgeführt; nur ist die Last P_2 des durchschnittenen Faches nach bestimmtem Verhältnisse den Gruppen P_1 und P_3 hinzugerechnet.

Es könnte scheinen, als ob die Laststellung in Fig. 128*a* für O_3 nicht die ungünstigste wäre, als ob die Räder 1, 2, 3 mehr über den Drehpunkt K gestellt werden müfsten. Denkt man sich daher den Zug etwas nach links verschoben, so dafs die Räder 1 und 2 im durchschnittenen Fache stehen, so wird $P_1 = 3 \cdot 13 = 39$, $P_2 = 2 \cdot 13 = 26$, $P_3 = 13 + 2 \cdot 9 = 31^{\,t}$. Das Vorzeichen von $\Sigma P \operatorname{tg} \alpha$ hängt also, da hier $x = 10$, $e = {}^1\!/\!_2 \lambda$, ab von $\frac{39+13}{10} - \frac{31+13}{10} > 0$, was eine Verschiebung nach rechts bedingt. Sobald aber das Rad 2 rechts von K' liegt, wird $P_1 = 39$, $P_2 = 13$, $P_3 = 44$, und

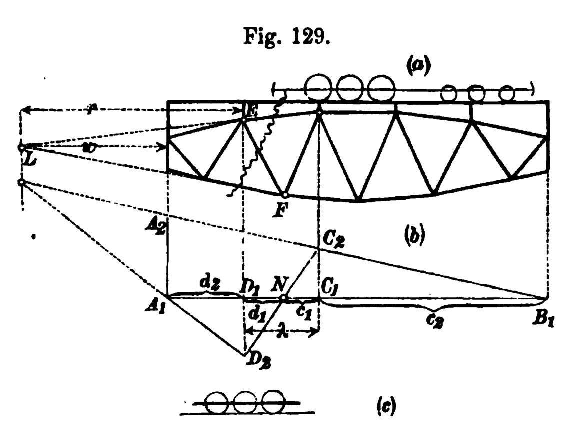
man erhält $\frac{39 + 6^1/_2}{10} - \frac{44 + 6^1/_2}{10} < 0$; die gezeichnete Laststellung ist daher auch für O_3 die ungünstigste.

Will man nun O_3 mittelst der Momentengleichung berechnen, so mufs man die im durchschnittenen Fache befindliche Last in die beiden Knotenpunktsdrücke zerlegen, da nur der linksseitige am linken Abschnitte vorkommt, u. zw. in Bezug auf K mit einem anderen Momente als die Radlast selbst; die übrigen Lasten können unmittelbar benutzt werden. — Die Ermittelung von O_3 mittels der Einflufsfigur geschieht ebenso, wie für U_4 gezeigt.

Wird ein Eisenbahngleis von 2 Fachwerkbalken getragen, so hat man natürlich nur die halben Achslasten, also die Radlasten, für einen Träger zu rechnen. Die Untersuchung der ungünstigsten Laststellung ist aber von dieser Frage unabhängig, weil es dabei nur auf Lastverhältnisse ankommt.

Ungünstigste Laststellung für die Wandglieder. Handelt es sich um eine rechts fallende Strebe, z. B. EF (Fig. 129a), so kommt für D_{max} die positive Einflufsfläche von N bis B_1 in Frage, und man erkennt zunächst, dafs möglichst schwere Lasten von rechts her an das durchschnittene Fach hinan zu schieben sind. Die positive Einflufsfigur zeigt zwei Strecken c_1 und c_2, und es mufs nach S. 262 und 263 eine Ausgleichung der durchschnittlichen Belastungen derselben stattfinden. Nennt man daher die ins durchschnittene Fach vorgeschobene Lastgruppe P_1, die rechts davon befindliche P_2, so mufs

Fig. 129.



$$\frac{P_1}{c_1} = \frac{P_2}{c_2}$$

werden, wofür man aber auch schreiben kann

$$\frac{P_1}{c_1} = \frac{P_1 + P_2}{c_1 + c_2}.$$

Liegt die Einflufsfigur in genügender Genauigkeit vor, so kann man c_1 abgreifen und die durchschnittlichen Belastungen ohne

weiteres berechnen. Wir wollen aber auch hier die Entscheidung aus den gegebenen Abmessungen des Trägers ableiten. Der Abschnitt A_1A_2 ist nach Fig. 123c $a:h\sin\delta$, daher wird

$$C_1C_2 = \frac{a}{h\sin\delta}\frac{c_2}{l}$$

und ebenso

$D_1D_2 = \frac{b}{h\sin\delta}\frac{d_2}{l}$. Aus ähnlichen Dreiecken erhält man

$$\frac{\lambda}{c_1} = \frac{C_1C_2 + D_1D_2}{C_1C_2} = \frac{a c_2 + b d_2}{a c_2} \quad \text{und daraus} \quad \frac{c_2}{c_1} = \frac{a c_2 + b d_2}{a\lambda}.$$

Weil aber nach Fig. 123 (S. 258)

$$\frac{a}{b} = \frac{w}{w+l}$$

und nach Fig. 129 $c_2 = l - d_2 - \lambda$, so wird

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{wl - wd_2 - w\lambda + (w+l)d_2}{w\lambda} = \frac{l(w+d_2)}{w\lambda} - 1$$

oder $\frac{c_1+c_2}{c_1} = \frac{l(w+d_2)}{w\lambda}$. Für $\frac{P_1}{c_1} = \frac{P_1+P_2}{c_1+c_2}$ kann daher auch gesetzt werden:

$$\frac{P_1}{\lambda}(w+d_2) = \frac{P_1+P_2}{l}w. \tag{5}$$

Hierin kann $\frac{P_1}{\lambda}$ als durchschnittliche Belastung des durchschnittenen Faches und $\frac{P_1+P_2}{l}$ als durchschnittliche Belastung des ganzen Balkens aufgefaſst werden. Diese durchschnittlichen Belastungen sind jedoch nicht unmittelbar zu vergleichen, sondern vorher noch mit $w+d_2$ bezw. w zu multiplizieren.

Handelt es sich um D_{min}, also um eine möglichste Ausgleichung der durchschnittlichen Belastung der Strecken d_1 und d_2, so bekommt man zunächst einen von 5) abweichenden Ausdruck. Man kann jedoch letzteren Wert, wie man leicht erkennt, zur Auffindung der ungünstigsten Laststellung für gröſste und kleinste Spannkraft aller Wandglieder benutzen, wenn man die Bedeutung von w und $w+d_2$ verallgemeinert. Wird ein Zug von der einen Seite (etwa der rechten) auf die Brücke geschoben, so nenne man dasjenige Auflager, welches vom Zuge noch nicht erreicht ist, also

den geringeren Stützendruck erhält, schlechtweg das unbelastete Auflager und verstehe unter w stets den Abstand des Drehpunktes vom **unbelasteten** Auflager. Ebenso wird beim Hineinschieben des Zuges ins durchschnittene Fach der eine Knotenpunkt desselben noch nicht vom Zuge bedeckt sein; dieser werde kurz der unbelastete Knotenpunkt genannt, und unter $w + d_2$, wofür wir nun r setzen wollen, möge immer der Abstand des Drehpunktes vom **unbelasteten** Knotenpunkte des durchschnittenen Faches verstanden werden. Bezeichnet man dann mit P_1 die Lasten im durchschnittenen Fache, mit $P_1 + P_2$ sämtliche Lasten des Trägers, so mufs allgemein

$$\frac{P_1}{\lambda} r = \frac{P_1 + P_2}{l} w \quad \text{werden.}$$

Für D_{max} ergibt sich die in Fig. 129*a* gezeichnete Stellung als die ungünstigste. Es sei hierbei $w = 8^m$, $r = 12^m$, $\lambda = 4^m$. Schiebt man dann die erste Achse ins durchschnittene Fach vor, so wird $P_1 = 13$, $P_1 + P_2 = 66$, mithin $\frac{13}{4} 12 - \frac{66}{20} 8 > 0$. Im durchschnittenen Fache ist hiernach zu viel Last, weshalb ein Zurückziehen in die gezeichnete Stellung nötig wird.

Für D_{min} ist die ungünstigste Belastungsart in Fig. 129*c* dargestellt. Weil jetzt das rechtsseitige Auflager das unbelastete ist, so wird $w = 28$, und ebenso $r = 16$. Da hier nur gleich schwere Achsen vorliegen, so kann das Gewicht einer Achse als Einheit gewählt werden. Daher ist, wenn man eine Achse ins durchschnittene Fach vorgeschoben annimmt, $P_1 = 1$, $P_1 + P_2 = 3$.

$$\frac{1}{4} 16 - \frac{3}{20} 28 = 4 - 4{,}2 < 0;$$

die zu geringe Belastung des Faches erfordert also weiteres Hineinschieben des Zuges. Würde aber auch die zweite Achse noch hineintreten, so verursacht die Vergröfserung des ersten Gliedes der Differenz auf das Doppelte einen Zeichenwechsel, woraus die gezeichnete Stelle als die mafsgebende folgt.

Das Eintreten von Lasten ins durchschnittene Fach erschwert die Berechnung mittels der Momentengleichung, weil diese Lasten in Knotenpunktsdrücke zerlegt werden müssen. Die bequemere Stellung in Fig. 129*a* nennt man im Gegensatze dazu die **Grundstellung.***) In dem letzten Zahlenbeispiele war die Differenz 4—4,2 so wenig von Null verschieden, dafs eine geringe Vergröfserung der Vorderlast leicht einen Zeichenwechsel hervorbringt. Es empfiehlt sich daher, bei der einseitigen Belastung für die

*) Siehe Müller-Breslau, Graphische Statik, 3. Aufl., 1. Bd., S. 137.

Wandglieder das Gewicht der Vorderachse etwas zu erhöhen, etwa von 13 auf 15^t; dann kann man ohne weitere Prüfung die Grundstellung (wobei der Zug nur bis an das durchschnittene Fach vorrückt) für alle Wandglieder anwenden.

$$P_1 = 15, \quad P_1 + P_2 = 41^t \text{ gibt}$$
$$\frac{15}{4} \cdot 16 - \frac{41}{20} 28 = 60 - 57{,}4 > 0,$$

d. h. Zurückziehen des Zuges aus dem Fache.

Für parallele Gurten wird die Bedingung 5) einfach zu

$$6) \qquad \frac{P_1}{\lambda} = \frac{P_1 + P_2}{l}$$

(Gleichheit der durchschnittlichen Belastungen), weil bei unendlich großem w der endliche Summand d_2 verschwindet.

Hiernach kann die Bestimmung der größten Stabkräfte wie folgt geschehen:

Der Beitrag der ständigen Belastung zu den Stabkräften sowohl der Gurtungen wie der Wandglieder kann nach einer der unter II erläuterten Methoden bestimmt werden, wird aber meist am bequemsten durch einen Cremona'schen Kräfteplan ermittelt. Bei Ermittelung der durch bewegliche Belastung (Verkehrslast) entstehenden Stabkräfte wird der Träger selbst als gewichtslos vorausgesetzt; auch wollen wir für diese Belastungsart unterscheiden zwischen Stabkräften in den Gurtungen, welche bei voller Belastung, und solchen in den Wandgliedern, welche bei teilweiser (einseitiger) Belastung ihre Größtwerte erreichen. Die größten Stabkräfte für alle Glieder erhält man dann aus der Zusammenfügung derjenigen für ständige Belastung mit denen für Verkehrslast.

1. Gröfste Stabkräfte in den Gurtungen.

Ist die Verkehrslast gleichmäfsig verteilt, so entstehen für alle Gurtstäbe bei voller gleichmäfsiger Belastung des ganzen Trägers die gröfsten Stabkräfte und die Ermittelung derselben geschieht meist am bequemsten mit Hülfe eines Kräfteplans, jedoch zweckmäfsig gesondert von dem für ständige Belastung. Kommen bewegliche Einzellasten in Frage, so sind diese zunächst nach Mafsgabe der Darlegungen auf S. 263 in die dem Gröfstwert der Stabkraft entsprechende Stellung zu bringen. Diese Laststellung

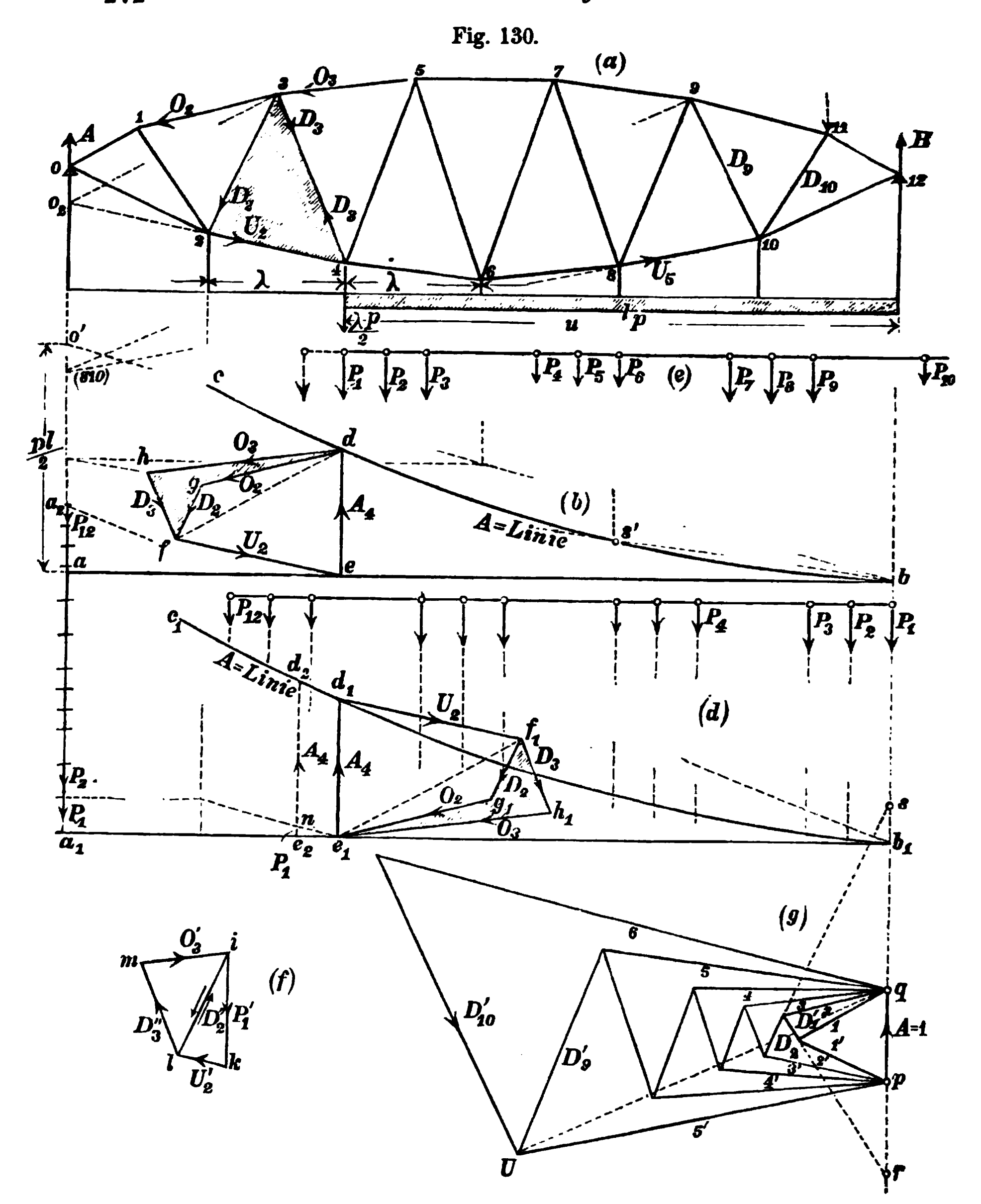
ist im allgemeinen für die einzelnen Stäbe verschieden; immer aber sind nach Ausweis der Einflufslinien für die Gurtstabkräfte tunlichst viele Lasten auf den Träger zu bringen, d. h. der Träger ist „voll" zu belasten. Handelt es sich um eine Gruppe von nur verhältnismäfsig wenigen Einzellasten, so können die Stabkräfte u. U. zweckmäfsig mit Hülfe der Einflufslinien in der Form $O = \Sigma P_n \eta_n$, bezw. $U = \Sigma P_n \eta_n$ bestimmt werden. Besteht die Verkehrslast aus einer Gruppe von gegeneinander unverschieblichen Einzellasten in gröfserer Zahl (Lokomotiv- oder Eisenbahnzug), so werden die gröfsten Stabkräfte in den Gurtungen meistens am bequemsten mit Hülfe eines Seilecks von der Polweite $H = n \cdot \lambda$ in der unter IIb beschriebenen Weise ermittelt. Es genügt in solchem Falle für die verschiedenen Laststellungen die Zeichnung eines Seilecks, indem man den Träger gegen dasselbe so vorschiebt, dafs jedesmal der Gröfstwert der betreffenden Stabkraft entsteht.

2. Gröfste Stabkräfte in den Wandgliedern.

Nach Ausweis der Einflufslinien für die Stabkräfte in den Wandgliedern (Fig. 129) entstehen deren Gröfstwerte für einseitige Belastung links oder rechts der Belastungsscheide N. Ist die Verkehrslast gleichmäfsig verteilt, so führt die gleichmäfsige Belastung der ganzen positiven oder negativen Einflufsstrecke des betreffenden Stabes zu seiner gröfsten positiven oder negativen Stabkraft. Kommen Einzellasten in Frage, so sind diese gemäfs den Darlegungen S. 267 für jeden Stab in eine bestimmte Stellung links und rechts der Belastungsscheide N zu bringen. Ist das geschehen, so kann die Spannkraft D des Stabes zweckmäfsig mit Hülfe der sogenannten A-Linie (vergl. S. 82—84) ermittelt werden.

Für gleichmäfsig verteilte Verkehrslast p für die Längeneinheit ist die A-Linie eine Parabel. Die Belastungsscheide N für jedes Wandglied hat eine bestimmte Lage innerhalb des mit dem Wandgliede durchschnittenen Faches und zur Herbeiführung von D_{max} oder D_{min} müfste, wie erwähnt, die ganze positive oder negative Einflufsstrecke rechts und links von N mit p belastet werden. Zur Vereinfachung soll indes in folgendem angenommen werden, dafs die Belastung aller Knotenpunkte der positiven Einflufsstrecke je mit der vollen Last $p\lambda$ die gröfste positive Stabkraft

Fig. 130.



$D_{p\,max}$ und die gleiche Belastung aller Knotenpunkte der negativen Einflufsstrecke $D_{p\,min}$ herbeiführe.

Für die Strebe $\overline{3\,4}$ des Balkens (Fig. 130 z. B.), der im Untergurt belastet ist, würde danach bei gleichmäfsiger Belastung der

Strecke rechts vom Knoten 4 mit p und außerdem des Knotens 4 mit $\frac{\lambda p}{2}$ das Maximum und bei gleichmäßiger Belastung der Strecke links vom Knoten 2 und dieses Knotens selbst noch mit $\frac{p\lambda}{2}$ das Minimum der Stabkraft D_3 entstehen. Die Last $\frac{p\lambda}{2}$ im Knoten 4 bezw. 2 soll dabei die Wirkung der im durchschnittenen Felde $\overline{24}$ rechts oder links der Belastungsscheide vorhandenen Last ersetzen. Da indes nur bei voller Belastung des Feldes $\overline{24}$ ein Lastenteil $\frac{\lambda p}{2}$ nach 4 und 2 übertragen werden kann, so ergeben sich $D_{3\,max}$ und $D_{3\,min}$ mit der oben bezeichneten vereinfachenden Annahme etwas zu groß. Für die Anwendung ist die erzielte Annäherung jedoch in den meisten Fällen völlig hinreichend. Die Belastung Fig. 130*a* erzeugt in 0 einen Stützdruck

$$A_4 = \frac{p u}{2 l}(u + \lambda) \tag{1}$$

und dieser Gleichung entspricht die parabolische Linie bc mit dem Pol in b (Fig. 130*b*) als A-Linie. Bringt man den Ausdruck Gl. 1 in die Form $\frac{p l}{2} \cdot \frac{u}{l} \cdot \frac{u + \lambda}{l}$, so kann man die Ordinaten der A-Linie unter den belasteten Knotenpunkten leicht zeichnerisch durch eine zweimalige geometrische Reduktion der Größe $\frac{p l}{2}$ gewinnen, wie solches für den Punkt $8'$ der Linie in Fig. 130*b* angedeutet ist.

Am Trägerstück links vom Schnitt wirkt als einzige Kraft der Stützdruck A_4. Schneidet man durch O_3, D_3 und U_2, so führt nach Culmann das Gleichgewicht der Kräfte A_4, U_2, D_3 und O_3 links vom Schnitt zu dem schließenden Krafteck $edhfe$, in welchem die bekannte Kraft A_4 den Umfahrungssinn angibt, $fd \parallel O_2 3$ und $hf = D_{3\,max}$ (Zugkraft) ist. Dieselbe Laststellung, welche $D_{3\,max}$ erzeugt, bringt $D_{2\,min}$ hervor. Schneiden wir daher durch O_2, D_2 und U_2, so erhalten wir für die miteinander im Gleichgewicht befindlichen Kräfte A_4, U_2, D_2 und O_2 links vom Schnitt das schließende Krafteck $edgfe$ und in demselben $gf = D_{2\,min}$ (Druckkraft).

Für eine in sich unverschiebliche Gruppe von Einzellasten P_1, P_2, P_3 usw. (Lokomotivzug), Fig. 130*c*, erhält man die A-Linie $b_1 c_1$ (Fig. 130*d*), wenn man den Lastenzug in umgekehrter Lastenfolge mit der ersten Last P_1 im rechtsseitigen Stützlot aufstellt

(Fig. 130 *d*) und zu der Lastengruppe in dieser Stellung mit der Stützweite l als Polweite (Pol b_1) ein Seileck $b_1 c_1$ zeichnet. (Vergl. S. 82 Fig. 41 *c*.) Es soll beispielsweise wieder für die Stabkraft D_3 das Maximum und für D_2 das Minimum bestimmt werden. Wir bringen den Zug zunächst in die „Grundstellung" (Fig. 130 *c*) (vergl. S. 269), so daſs die erste Last P_1 in den Knotenpunkt 4 zu stehen kommt und $e_1 d_1$ (Fig. 130 *d*) den Stützdruck A_4 in 0 ausdrückt. Das schlieſsende Krafteck $e_1 d_1 f_1 h_1 e_1$, gebildet wie in Fig. 130 *b*, ergibt $f_1 h_1 = D_{3_{max}}$ und dasjenige $e_1 d_1 f_1 g_1 e_1$ bringt $f_1 g_1 = D_{2_{min}}$.

Es bleibt noch fraglich, ob die Grundstellung des Lastenzuges wirklich $D_{3_{max}}$ und $D_{2_{min}}$ herbeiführt. Ist das nicht der Fall, so muſs nach den Ausführungen auf S. 267 u. f. die Lastengruppe so gestellt werden, daſs entweder die nächst- oder die übernächstfolgende Last P_2 oder P_3 in den Knotenpunkt zu stehen kommt. Mit P_2 im Knoten 4 rückt P_1 in die in Fig. 130 *c* punktiert angedeutete Stellung im Fach $\overline{24}$. Im Lot durch P_1 in dieser Stellung erhält man aus Fig. 130 *d* wieder den Stützdruck $A'_4 = e_2 d_2$. Dieser ist nun aber nicht mehr die einzige links vom Schnitt angreifende äuſsere Kraft, sondern es gelangt jetzt ein Teil P'_1 der Last P_1 nach dem Knoten 2. Die Gröſse dieser nun in 2 angreifenden Kraft P'_1 erhält man leicht in der aus Fig. 130 *d* ersichtlichen Weise in der Strecke $n e_2$. Man kann nun die Beiträge der links vom Schnitt angreifenden äuſseren Kräfte A'_4 und P'_1 zu $D_{3_{max}}$ und $D_{2_{min}}$ in bekannter Weise getrennt ermitteln, und zwar denjenigen von A'_4 genau wie für A_4 in der Grundstellung. P'_1 wirkt, weil A'_4 entgegen gerichtet, absolut gedacht, verkleinernd auf $D_{3_{max}}$ und $D_{2_{min}}$. Da die Kraft P'_1 in dem der Stabkraft O_2 entsprechenden Momentendrehpunkt 2 angreift, so erzeugt sie im Stabe $\overline{13}$ eine Stabkraft $O_2 = 0$; sie muſs also mit den andern beiden im Schnitt durch O_2, D_2 und U_2 getroffenen Kräften D_2 und U_2, soweit diese von ihr hervorgerufen sind, im Gleichgewicht sein. Das schlieſsende Krafteck $ikli$ (Fig. 130 *f*) drückt dieses Gleichgewicht aus und darin ist $li = D''_2$ die durch P'_1 in D_2 erzeugte Zugkraft. Im unbelasteten Knoten 3 stehen die Stabkräfte O_2, D_2, D_3 und O_3 miteinander im Gleichgewicht. Da O_2 hier gleich Null und D''_2 bereits bekannt ist, erhält man aus dem Krafteck $ilmi$ $D''_3 = lm$ als Druckkraft. Bringt man also diese Kräfte

D_2'' und D_3'' von den aus A_4' erhaltenen Stabkräften D_3 und D_2 in Abzug, so ergeben sich daraus die der Laststellung „P_2 in 4" entsprechenden wirklichen Stabkräfte $D_{3_{max}}$ und $D_{2_{min}}$. Ein Vergleich mit den aus der Grundstellung ermittelten Werten D_3 und D_2 läfst erkennen, welche von beiden Stellungen die wirklichen Gröfstwerte von D_3 und D_2 erzeugt. Nötigenfalls ist die Lastengruppe noch um eine Lastteilung weiter zu verschieben, so dafs P_3 nach 4 gelangt und das Verfahren zur Bestimmung von D_3 und D_2 wie vor zu wiederholen. In gleicher Weise kann man für alle übrigen Streben die gröfsten Stabkräfte bestimmen.

Bei nicht zu grofsen Feldweiten λ erhält man die Gröfstwerte der Strebenkräfte für die Anwendung meist genau genug aus der Grundstellung, wenn man die erste Last P_1 etwas gröfser annimmt.

Sind gleichzeitig die gröfsten Stabkräfte aller Wandglieder zu bestimmen, so kann dazu mit Vorteil auch das folgende gleichfalls auf die Benutzung der A-Linie sich stützende Verfahren angewandt werden:

Die gröfsten Stabkräfte der Wandglieder sind, wie aus obigen Darlegungen ersichtlich, verhältnisgleich dem Stützdruck A der Laststellung, welche sie hervorruft. Kennt man daher alle Strebenkräfte D_1', D_2' usw., welche ein Stützdruck $A = 1$ erzeugt, so hat man diese nur mit den der A-Linie entnommenen wirklichen Stützdrücken A zu multiplizieren, welche die für die einzelnen Streben ungünstigsten Laststellungen in der Stütze A hervorrufen, um so die gröfsten Strebenkräfte D_1, D_2, D_3 usw. selbst zu erhalten.

Das Verfahren selbst entsteht nun wie folgt: Wir denken uns den Knoten 11 neben der Stütze B so belastet, dafs in der Stütze A ein Stützdruck $A = 1$ entsteht und zeichnen zur Ermittelung der dadurch entstehenden Strebenkräfte D_1', D_2' usw. einen Cremona'schen Kräfteplan (Fig. 130g). Da von allen Knoten links von 11 nur der den Ober- und Untergurt verbindende Knoten 0 von einer äufseren Kraft ergriffen ist, alle übrigen Knoten von 1—10 aber unbelastet sind, so nimmt der Kräfteplan die übersichtliche und einfache Form Fig. 130g an. Die Stabkräfte O_1 bis O_6 des Obergurtes, in der Figur mit 1—6 bezeichnet, treten strahlenförmig in q, diejenigen des Untergurtes 1'—5' ebenso in p zusammen, während der Streckenzug der Strebenkräfte beide verbindet.

Eine einfache und wirksame Kontrolle dieses Kräfteplanes für $A=1$ erhält man aus der Überlegung, dafs die Mittelkraft aus der Stabkraft irgend eines Gurtstabes und der Stützkraft $A=1$ durch den Momenten-Drehpunkt der Gurtstabkraft gehen mufs. Z. B. mufs die Mittelkraft aus U_5 und $A=1$ die Richtung (8 10) 9 (Fig. 130 *a*) aufweisen, während in Fig. 130 *g* uq Mittelkraft von $U_5=5'$ und $A=1$ ist; zieht man daher durch u (Fig. 130 *g*) eine Parallele zu (8 10) 9, so mufs diese durch q gehen. Eine anderweite bequeme und gute Kontrolle des Kräfteplanes ergibt sich aus dem Umstande, dafs nach Mohr*) die Richtungslinien der Stabkräfte D_1', D_2' usw. auf der Richtungslinie der Stützkraft $A=1$ im Kräfteplan Fig. 130 *g* die Strecken $pr=A=1$, $qs=2A=2$ usw. abschneiden.

Nachdem so durch den Kräfteplan (Fig. 130 *g*) die Strebenkräfte D_1', D_2', D_3' usw. sicher bekannt geworden sind, erhält man leicht beispielsweise

$$2)\qquad \begin{cases} D_{3max} = D_3' \cdot A_4 \\ D_{2min} = D_2' \cdot A_4 . \end{cases}$$

Führt nicht die Laststellung „P_1 in 4", sondern diejenige „P_2 in 4" und P_1 entsprechend vorgerückt, zu D_{3max} und D_{2min}, so ist in den Gl. 2 A_4 mit A_4' (Fig. 130 *d*) zu vertauschen und sind daneben die Kräfte D_3'' und D_2'' (Fig. 130 *e*) von den Ergebnissen nach Gl. 2 in Abzug zu bringen, wenn man nicht, was einfacher und meistens praktisch zulässig, die A-Linie mit einer entsprechend vergröfserten ersten Last P_1 gezeichnet hat.

In gleicher Weise erhält man alle übrigen Strebenkräfte. Ist der Fachwerkbalken symmetrisch, so genügt es, die bewegliche Lastengruppe einmal von links nach rechts vorrückend nach und nach für alle in der unbelasteten Gurtung zusammentretenden Strebenpaare in die ungünstigste Stellung zu bringen und nach obigem die Gröfstwerte der Strebenkräfte zu bestimmen. Sind dann so für die Streben D_1, D_3, D_5, D_7 und D_9 die gröfsten Zugkräfte, und für die Streben D_2, D_4, D_6, D_8 und D_{10} die gröfsten Druckkräfte bekannt geworden, so hat man damit auch die gröfsten Druckkräfte von D_1, D_3, D_5, D_7 und D_9 und die gröfsten Zugkräfte von D_2, D_4, D_6, D_8 und D_{10}, denn es sind die gröfsten Zug- und Druckkräfte von D_1 und D_{10}, D_2 und D_9, D_3 und D_8 usw. einander gleich.

---

*) Vergl. Mohr, „Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik" 1906 S. 395.

Ist der Fachwerkbalken unsymmetrisch, so hat man die Lastengruppe noch von links auf den Balken vorzuschieben und nacheinander in die Stellungen zu bringen, welche in D_1, D_3, D_5, D_7 und D_9 die gröfste Druckkraft und in D_2, D_4, D_6, D_8 und D_{10} die gröfste Zugkraft erzeugen. Die Gröfstwerte dieser Kräfte selbst sind dann mit Hülfe einer B-Linie zu ermitteln.

IV. Besondere Formen des Fachwerkträgers auf zwei Stützen.

a) Parallelträger.

Einen Fachwerkträger mit parallelen Gurtungen pflegt man kurz einen „Parallelträger" zu nennen. (Vergl. S. 236.) Die Ermittelung der gröfsten positiven und negativen Stabkräfte eines Parallelträgers kann im allgemeinen nach den unter III entwickelten Regeln geschehen, läfst sich aber naturgemäfs einfacher gestalten, als bei anderen weniger regelmäfsigen Fachwerkträgerformen.

1. Ermittelung der Gurtkräfte.

Nach den Gl. 1 und 2 S. 233 und 234 ist für irgend einen Stab des Untergurtes eines beliebigen Fachwerkträgers die Stabkraft $U = \frac{M_o}{l_o}$ und für einen solchen des Obergurtes $O = -\frac{M_u}{l_u}$. Für den Parallelträger sind die Hebelarme l_o und l_u der Stabkräfte für alle Stäbe gleich der Trägerhöhe h. Ermittelt man daher die Momente M_o und M_u für volle Belastung des Trägers durch ein Seileck, dessen Polweite gleich einem Vielfachen der Trägerhöhe, gleich nh (mit n als ganzer Zahl) gewählt wird (Fig. 131 *b*), so erhält man beispielsweise für den Stab $\overline{1\,2}$ des Untergurtes des Parallelträgers (Fig. 131 *a*) $M_{2'} = n \cdot h \cdot u_{2'}$ und daher

$$1) \qquad U_2 = \frac{n \cdot h \cdot u_{2'}}{h} = n \cdot u_{2'}$$ und ebenso für den

Stab $\overline{2'3'}$ des Obergurtes

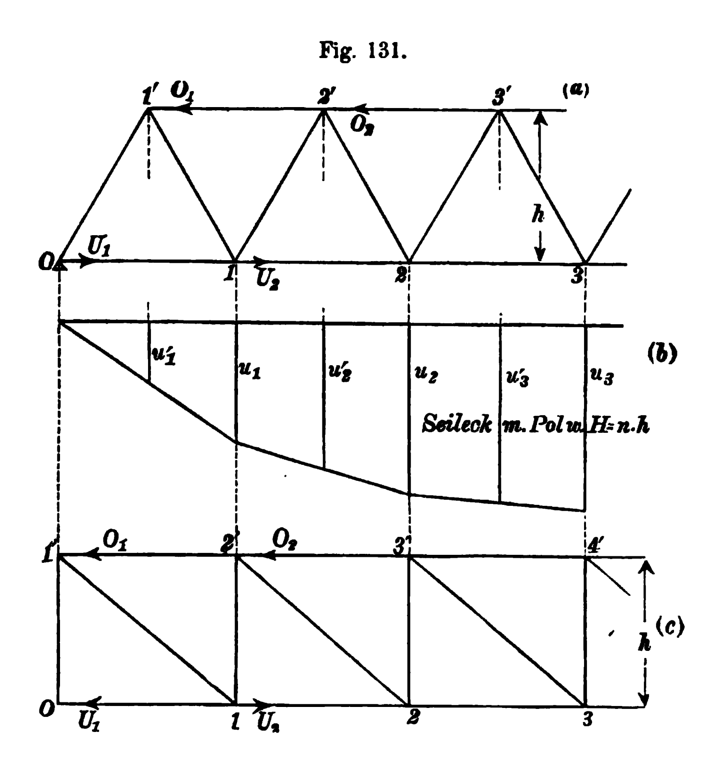
$$2) \qquad O_2 = -\frac{n \cdot h \cdot u_2}{h} = -n \cdot u_2.$$

Mifst man die Momentenabschnitte $u_{2'}$ und u_2 mit $n$fach kleinerem Kräftemafsstabe, als die Lasten im Krafteck, so erhält man einfach

$U_2 = u_{2'}$ und $O_2 = -u_2$ und ebenso aus demselben für volle Belastung des Trägers gezeichneten Seileck alle übrigen Stabkräfte der Gurtstäbe.

Tritt an Stelle der wechselweise nach links und rechts ansteigenden Wandglieder (Fig. 131 *a*) ein Wandsystem mit links

Fig. 131.



ansteigenden Diagonalen und (lotrechten) Ständern (Fig. 131 *c*), indem die Stäbe $\overline{0\,1'}$, $\overline{1\,2'}$, $\overline{2\,3'}$ usw. eine lotrechte Lage einnehmen, so wird $u_1' = o$, $u_1 = u_2'$, $u_2 = u_3'$ usw. und demnach die Stabkraft $U_1 = o$, $-O_1 = U_2 = u_1$, $-O_2 = U_3 = u_2$ usw. Die Ermittelungsmethode bleibt dieselbe, einerlei ob es sich um gleichmäßig verteilte Verkehrslast, oder um ein System von beweglichen Einzellasten handelt, nur kann es unter Umständen zweckmäßig sein, in letzterem Falle für die ständige Last und für die Verkehrslast je für sich ein Seileck zu zeichnen. Die Momentenabschnitte u beider sind dann einfach zu addieren.

2. Die Stabkräfte der Wandglieder.

Nach Gl. 7 S. 236 ist die Stabkraft eine Strebe

3) $$D = \frac{Q}{\sin \delta},$$ verhältnisgleich der Querkraft Q, und zwar für links ansteigende Streben ($\delta > 0$) im Vorzeichen gleichstimmig, für rechts ansteigende ($\delta < 0$) ungleichstimmig mit Q. Die Strebenkraft D nimmt also bei links ansteigenden Streben mit der Querkraft ihren gröfsten positiven und negativen Wert an, während bei rechts ansteigenden Streben die gröfste positive Strebenkraft mit der gröfsten negativen Querkraft und umgekehrt zusammenfällt. D_{max} und D_{min} können danach unmittelbar aus Q_{max} und Q_{min} durch Division mit $\sin \delta$ gewonnen und letztere Werte genau wie in Bd. I S. 163 für einen Träger auf zwei Stützen dargelegt, ermittelt werden.

In Fig. 132a ist ein Parallelträger mit wechselweise links und rechts ansteigenden Wandgliedern dargestellt, dessen Belastung im Untergurt angreift. Die Stufenlinie $1'2'3'4'5'$ drückt die Maximalquerkraft $Q_{p_{max}}$ in den einzelnen Fachen für eine von rechts nach links je bis zur Belastungsscheide N derselben vorgeschobene gleichmäfsige Verkehrslast p aus, während die Stufenlinie $1''2''3''4''5''$ die durch die ständige Last g f. d. m in den einzelnen Fachen erzeugte Querkraft Q_g darstellt. Letztere ist für die linke Trägerhälfte positiv, für die rechte negativ, und bei der zufällig gewählten ungeraden Zahl der Fache im mittleren gleich Null. Die schraffierte Fläche zeigt die aus dem Zusammenwirken von $Q_{p_{max}}$ und Q_g in den einzelnen Fachen überhaupt entstehende gröfste Querkraft Q_{max}. Sie ist für die gezeichnete Trägerform in den ersten drei Fachen von links positiv, im 4. und 5. negativ. Bei der in Fig. 132a gezeichneten Stellung der Verkehrslast entsteht im 2. Fach $Q_{max} = ec + cd = ed$ und gleichzeitig D_{2max} und D'_{2min}, und zwar ist $D_{2max} = \frac{ed}{\sin \delta}$ und $D'_{2min} = \frac{ed}{\sin \delta_1}$, wobei D'_{2min} wie δ_1 negativ, eine Druckkraft ist. Ebenso erhält man im ersten und dritten Felde die Stabkräfte D'_{1min} und D'_{3min} in den rechts ansteigenden Streben negativ. Im

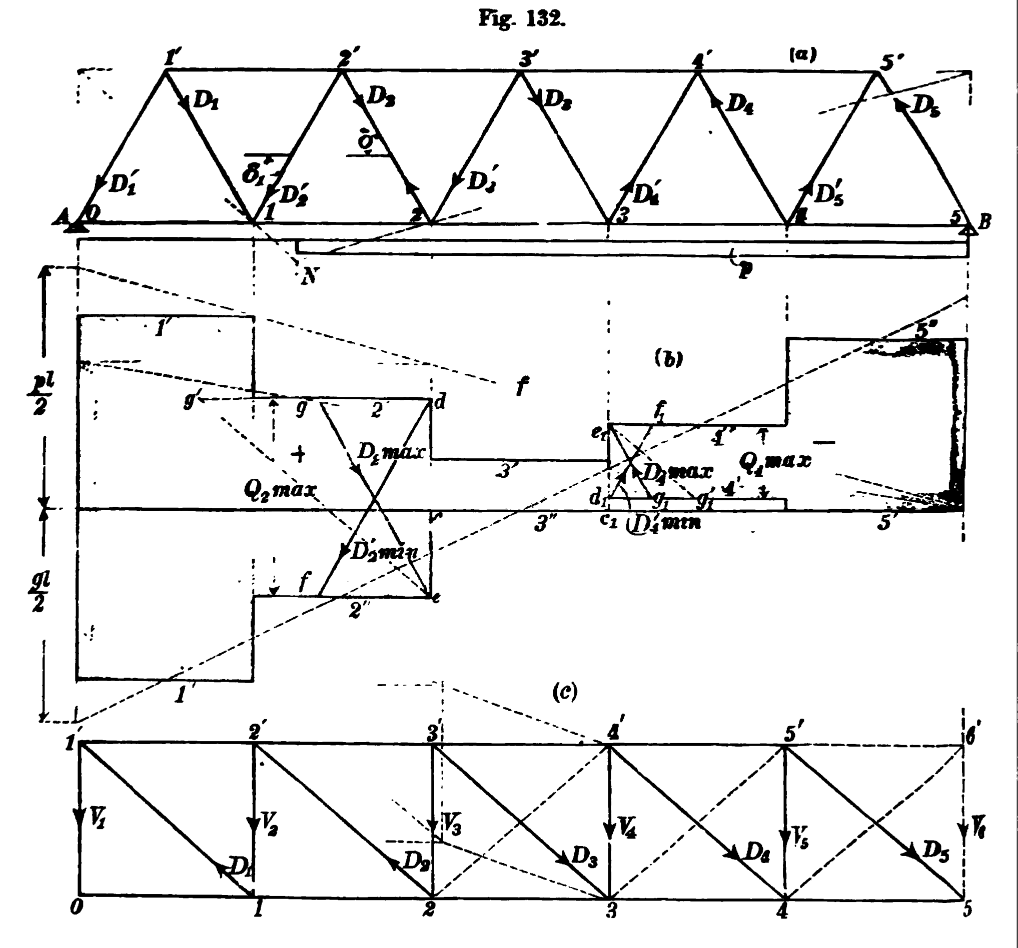
vierten Felde dagegen ist $Q_{max} = e_1 c_1 + c_1 d_1 = e_1 d_1 = -d_1 e_1$, d. h. abwärts gekehrt, negativ und daher

$$D_{4\,max} = -\frac{d_1 e_1}{\sin\delta} \text{ negativ (weil } \delta > 0\text{) und}$$

$$D'_{4\,min} = -\frac{d_1 e_1}{\sin\delta_1} \text{ positiv (weil } \delta_1 < 0\text{).}$$

Die entsprechenden Vorzeichen gelten auch für $D_{5\,max}$ und $D'_{5\,min}$.

Fig. 132.



Die Stabkräfte D_{max} und D'_{min} können nun leicht wie folgt durch Zeichnung bestimmt werden: Zieht man beispielsweise durch e (Fig. 132*b*) eine Parallele eg zu $\overline{22'}$ und durch d eine solche df

zu $\overline{2'1}$, so ist $D_{2\,max} = g\,e$ (Zugkraft) und $D'_{2\,min} = d\,f$ (Druckkraft). Ebenso wird $D_{4\,max} = -e_1 g_1 = g_1 e_1$ (Druckkraft) und $D'_{4\,min} = d_1 f_1$ (Zugkraft).

Rückt die Verkehrslast p von **links** je bis zu den Belastungsscheiden in den einzelnen Fachen heran, so entstehen in denselben die kleinsten Querkräfte und zwar wird Q_{min} in den beiden ersten Fachen positiv und in den drei letzten negativ.

Es wird

$$Q_{1\,min} = -Q_{5\,max}\ (>0),\quad Q_{2\,min} = -Q_{4\,max}\ (>0) \text{ und}$$
$$Q_{3\,min} = -Q_{3\,max}\ (<0) \text{ usw.}$$

Daraus ergeben sich die Strebenkräfte wie oben, und zwar wird

$$D'_{1\,max} = D_{5\,max} \text{ (Druck)},\quad D'_{1\,min} = D_{5\,min} \text{ (Druck)},$$
$$D_{1\,max} = D'_{5\,max} \text{ (Zug)},\quad D_{1\,min} = D'_{5\,min} \text{ (Zug)},$$
$$D'_{2\,max} = D_{4\,max} \text{ (Druck)},\quad D'_{2\,min} = D_{4\,min} \text{ (Druck)},$$
$$D'_{3\,max} = D_{3\,max} \text{ (Zug)},\quad D'_{3\,min} = D_{3\,min} \text{ (Druck)}.$$

In den Streben D'_1, D'_2, D_4 und D_5 sind also die größten und kleinsten und demnach auch alle möglichen Stabkräfte negativ, in den Streben D_1, D_2, D'_4 und D'_5 dagegen alle positiv, während in den Streben D'_3 und D_3 die Vorzeichen der Spannkräfte wie das der Querkraft im Fache 3 mit der Belastung wechseln. Besteht die Verkehrslast aus einer Gruppe von gegeneinander unverschieblichen Einzellasten, so kann die die Maximalquerkraft darstellende Stufenlinie durch die A-Linie ersetzt und können die größten und kleinsten Stabkräfte in den Streben wie oben dargelegt ermittelt werden. An Stelle des Abschnittes $c\,d$ tritt die betreffende Ordinate der A-Linie im Knotenlot rechts vom durchschnittenen Fach.

Ersetzen wir wieder die wechselweise nach links und rechts ansteigenden Streben (Fig. 132 a) durch ein Wandsystem mit links ansteigenden Diagonalen und (lotrechten) Ständern, indem wir die geneigten Streben $\overline{0\,1'}$, $\overline{1\,2'}$, $\overline{2\,3'}$, $\overline{3\,4'}$ und $\overline{4\,5'}$ in die lotrechte Stellung (Fig. 132 c) übergehen, $\delta_1 = -90^0$ werden lassen, so daſs das Fachwerk die Form $0\,1'\,5'\,5$ annimmt, so wird im zweiten Fach mit $\sin\delta_1 = -1$

$$D'_{2\,min} = V_{2\,min} = \frac{Q_{max}}{-1} = -e\,d$$

und ebenso für alle übrigen Felder die gröſste negative Stabkraft V der Ständer gleich der negativ genommenen gröſsten Querkraft Q_{max}. Behält man die in Fig. 132 a gewählte Fachteilung bei, so wird die

Neigung δ der Diagonalen in Fig. 132*c* entsprechend flacher, die Stabkräfte in denselben (vergl. $g'e$ Fig. 132*b*) entsprechend gröfser, die Vorzeichen der gröfsten und kleinsten Stabkräfte aber bleiben in allen Wandgliedern ungeändert. Die Strebenkräfte $D_{1\,max}$ und $D_{1\,min}$, $D_{2\,max}$ und $D_{2\,min}$, sowie $D_{3\,max}$ sind positiv, $D_{3\,min}$ aber, sowie $D_{4\,max}$ und $D_{4\,min}$, $D_{5\,max}$ und $D_{5\,min}$ sind negativ, während die Ständerkräfte $V_{1\,min}$ und $V_{1\,max}$, $V_{2\,min}$ und $V_{2\,max}$ und $V_{3\,min}$ negativ, $V_{3\,max}$, $V_{4\,min}$, $V_{4\,max}$, $V_{5\,min}$ und $V_{5\,max}$ aber positiv sind. Wollte man den Träger daher in der unsymmetrischen Form $0\,1'\,5'\,5$ wirklich ausführen, wogegen an sich nichts einzuwenden sein würde, so könnten die Streben D_1 und D_2 und die Ständer V_4 und V_5, welche nur Zugkräfte zu leisten haben würden, als sog. schlaffe (nicht knickfeste) Wandglieder ausgeführt werden, die Diagonalen D_4 und D_5 aber und die Ständer V_1 und V_2, welche nur Druckkräfte zu leisten, sowie die Diagonale D_3 und der Ständer V_3, welche je nach der Stellung der Verkehrslast Zug- und Druckkräfte aufzunehmen haben, müfsten knickfeste Formen erhalten. Verlangt man, dafs die Diagonalen nur Zugkräfte zu leisten haben, so läfst sich dieser Zweck erreichen, wenn man den Diagonalen D_4 und D_5 anstatt der Richtungen $\overline{4\,4'}$ und $\overline{5\,5'}$ die Richtungen $\overline{3\,5'}$ und $\overline{4\,6'}$ gibt und gleichzeitig die Stäbe $\overline{5'6'}$, $\overline{5\,6'}$ und im dritten Fach die Diagonale $\overline{2'4'}$ (Gegendiagonale) hinzufügt.

Die Diagonalen D_4' und D_5 erhalten damit statt der Neigung $+\delta$ eine solche $-\delta$ und gleichzeitig die Ständer statt der Neigung -90^0 die $+90^0$, was eine Umkehrung der Vorzeichen ihrer Stabkräfte im Gefolge hat. Im Mittelfach hat jetzt die Diagonale $\overline{3\,3'}$ die aufwärts gerichtete Querkraft $Q_{3\,max}$ aufzunehmen und dabei eine positive Stabkraft $D_{3\,max} = \frac{Q_{3\,max}}{\sin\delta}$ zu leisten, die Diagonale $\overline{2\,4'}$ aber hat die abwärts gekehrte negative Querkraft $Q_{3\,min}$ aufzunehmen und dabei die gleichfalls positive Stabkraft $D'_{3\,max} = \frac{Q_{3\,min}}{\sin\delta_1}$ $(\delta_1 < 0)$ zu leisten.

Eine aufwärts gekehrte Querkraft würde nämlich das Rechteck $2\,3'\,4'\,3$ des Mittelfaches in die punktiert angedeutete Form eines Parallelogramms zu verschieben streben. Die dabei angestrebte Vergröfserung der Entfernung der Punkte 3 und 3' voneinander kann die „schlaffe“ (nur zugfeste) Diagonale $\overline{3\,3'}$ verhindern, während die gleichfalls „schlaffe“ Diagonale $\overline{2\,4'}$ gegenüber der gleichzeitig angestrebten Näherung der Punkte 2 und 4' unwirksam bleibt.

Das Umgekehrte findet beim Auftreten einer abwärts gekehrten Querkraft im Mittelfelde statt. Von den beiden schlaffen Gegendiagonalen $\overline{3\,3'}$ und $\overline{2\,4'}$ ist also jeweils nur eine statisch wirksam, so daſs, wenngleich das Fachwerk mit beiden Gegendiagonalen einen Stab zuviel hat, um statisch bestimmt zu sein, die statische Bestimmtheit dennoch besteht, weil stets ein Stab unwirksam ist.

Das Erfordernis von Gegendiagonalen im Mittelfach ist also eine Folge des mit der Stellung der Verkehrslast wechselnden Richtungssinnes der Querkraft. Bei Parallelträgern mit einer gröſseren Zahl von Fachen oder verhältnismäſsig groſser Verkehrslast kann der Richtungswechsel der Querkraft sich auf mehrere Fache in der Trägermitte erstrecken, die dann bei Anwendung schlaffer Diagonalen alle Gegendiagonalen erhalten müssen.

b) Der parabolische Fachwerkträger.

Die Bedingung, daſs bei einem einfachen Fachwerkträger dessen Wandsystem aus Ständern und Diagonalen besteht, die Stabkräfte in letzteren für volle gleichmäſsig verteilte Belastung durchweg gleich Null werden, führt zu einer Trägerform, deren Höhen in den Ständerlotrechten gemessen, sich mit der Entfernung von den Auflagern nach parabolischem Gesetz ändern, deren Gurtungen also Sehnenvielecke in Parabeln sind. Aus Gl. 6 S. 236 folgt nämlich mit $D=0$

1) $$\frac{M_o}{h_o}=\frac{M_u}{h_u},$$

d. h. die Trägerhöhe muſs verhältnisgleich sein dem Moment an betreffender Stelle. Sind nun M_m und h_m das Moment und die Trägerhöhe in der Trägermitte, M_x und h_x desgl. in irgend einem Ständerlot im Abstande x von einer Endstütze, so ist $M_m=\frac{q\,l^2}{8}$, $M_x=\frac{q\,x\,(l-x)}{2}$ und demnach, wenn man in Gl. 1 M_o mit M_x, M_u mit M_m, h_o mit h_x und h_u mit h_m vertauscht und die entstehende Gleichung für h_x löst

2) $$h_x=\frac{4\,h_m\,x\,(l-x)}{l^2}.$$

Gl. 2 drückt die Form eines Parabelträgers von der Höhe h_m und der Stützweite l aus. (Vergl. Gl. 1 S. 211 für den Vollwandträger mit stetig gekrümmten Gurtungen, sowie Keck, Mech. I

3. Aufl. S. 209). Die größten **Gurtstabkräfte** für volle Belastung erhält man leicht aus der Erwägung, dafs die Gurtungen die Gleichgewichtsform einer Gelenkstangenverbindung für die gegebene Belastung darstellen und die wagerechte Seitenkraft aller Gurtkräfte daher $H = \frac{q\,l^2}{8\,h_m}$ ist. Für den Obergurt ist demnach die Stabkraft selbst in irgend einem Stabe

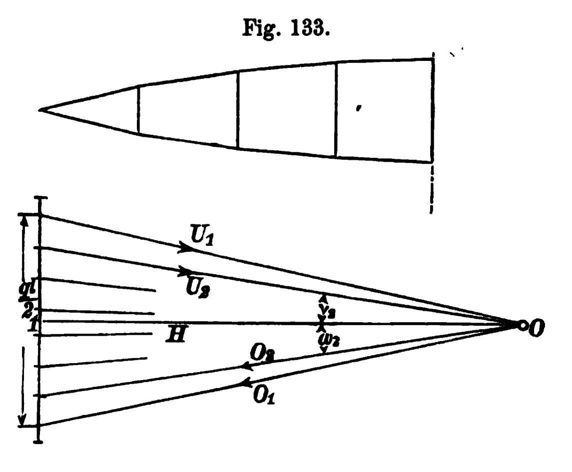
$$O_n = -\frac{H}{\cos\omega_n} \tag{3}$$

und für den Untergurt

$$U_n = \frac{H}{\cos\nu_n} \quad \text{(vergl. S. 212).} \tag{3a}$$

Im Übrigen findet bezüglich der Gurtstabkräfte das auf S. 212 für den Vollwandträger gesagte sinngemäße Anwendung. Geometrisch kann die Bestimmung derselben in der in Fig. 133 angedeuteten Weise geschehen, indem man durch den einen Endpunkt einer wagerechten Strecke $\overline{01} = H$ Parallelen zu den Gurtstäben zieht bis zum Schnitt mit der Lotrechten durch 1.

Fig. 133.



Der Punkt O ist dann zugleich Pol der Seilecke, welche die Gleichgewichtsform der Gurtungen ausdrücken.

Die Streben sind für einseitige Belastung zu berechnen. Da nun beim parabolischen Vollwandträger

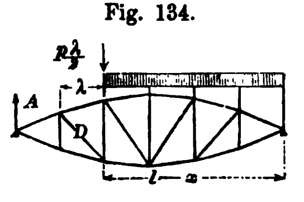
$$Y_{\substack{max \\ min}} = \pm\frac{p\,l}{8}\,\frac{h}{h_m} \quad \text{(s. S. 213),}$$

so werden (bei nur einer Strebe in jedem Fache) sämtliche Streben abwechselnd gleich stark auf Zug und auf Druck beansprucht.

Für die stärkste Strebenkraft läfst sich eine Formel von gleicher Einfachheit mit der Formel für Y ableiten, wenn die

einseitige Belastung in der auf S. 271 u. f. besprochenen Weise, d. h. so angenommen wird, daſs die Last p von B aus nur bis an das durchschnittene Fach vorgeschoben und am Vorderende der Last eine Einzellast $^1/_2\, p\lambda$ hinzugefügt wird (Fig. 134). Für diesen Belastungsfall erhalten wir nun D_{max} nach der Gl. 6 S. 236 zu

Fig. 134.



$$D_{max} \cos\delta = \frac{M_u}{h_u} - \frac{M_o}{h_o}.$$

Es ist nun $A = p\frac{(l-x)^2}{2l} + \frac{p\lambda}{2}\frac{l-x}{l} = p\frac{l-x}{2l}(l-x+\lambda)$.

$$\frac{M_u}{h_u} = \frac{Ax}{h_u} = \frac{Axl^2}{4h_m x(l-x)} = \frac{Al^2}{4h_m(l-x)}$$

und ebenso (indem man $l-x$ mit $l-x+\lambda$ vertauscht)

$$\frac{M_o}{h_o} = \frac{Al^2}{4h_m(l-x+\lambda)};$$

mithin $$D_{max} \cos\delta = \frac{Al^2}{4h_m}\left(\frac{1}{l-x} - \frac{1}{l-x+\lambda}\right).$$

Setzt man hierin den Wert für A ein, so folgt nach geeigneter Zusammenziehung:

$$D_{max} \cos\delta = \frac{pl}{8h_m}\lambda,$$

d. h. mit der Fachlänge λ verhältnisgleich. Nennt man aber die Länge der Strebe d, so ist $\cos\delta = \lambda : d$, und es wird

$$D_{max} = \frac{pl}{8}\frac{d}{h_m}, \quad \text{und}$$

4) $$D_{\substack{max\\min}} = \pm\frac{pl}{8}\frac{d}{h_m}.$$

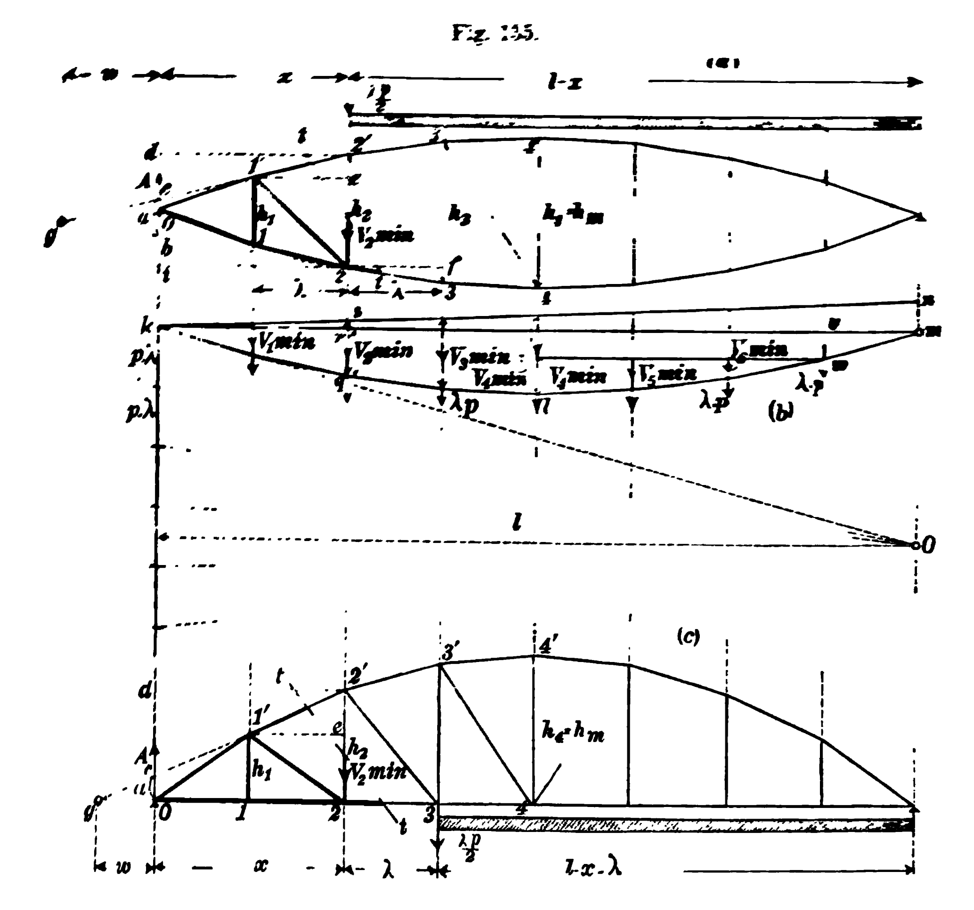
D. h. die gröſsten Strebenkräfte sind mit den Längen der Streben verhältnisgleich.

Will man nur Zugstreben haben, so müssen in allen Fachen gekreuzte Streben angebracht werden, deren stärkste Zugkräfte dann sämtlich nach Gl. 1 zu berechnen sind.

Die absolut genommen gröſsten Ständerkräfte, welche Druckkräfte und daher mit V_{min} zu bezeichnen sind, lassen sich nicht

in gleich einfacher Weise wie die größten Strebenkräfte ermitteln, doch gelangt man wie folgt zu einem bequemen graphischen Verfahren. Es werde zunächst ein parabolischer Linsenträger vorausgesetzt (Fig. 135a) und soll die größte Druckkraft $V_{2\,min}$ im zweiten

Fig. 135.



Ständer bestimmt werden (Schnitt tt). Die Verkehrslast p ist von rechts bis zum Knoten 2′ vorzuschieben. Die Stützkraft A ist dann

$$5)\qquad A = \frac{p(l-x)^2 + p\cdot(l-x)\lambda}{2l} = \frac{p}{2l}(l-x)(l-x+\lambda)$$

und aus der Momentengleichung für das Trägerstück links vom Schnitt in Bezug auf g als Drehpunkt erhält man bei den aus der

Figur ersichtlichen Bezeichnungen $V_{2\,min} = A \cdot \frac{w}{w+x}$. Nach der Figur ist ferner $\frac{w}{w+x} = \frac{a}{h_2}$, also unter Beachtung der Gl. 5 auch

6) $$V_{2\,min} = \frac{p}{2l}(l-x)(l-x+\lambda) \cdot \frac{a}{h_2}.$$

Für a erhält man aus der Figur

7) $$a = h_2 - cd - bi$$

und zufolge Ähnlichkeit der Dreiecke $cd2'$ und $1'e2'$, sowie $bi2$ und $2f3$ $cd = e2' \cdot \frac{x}{\lambda} = \frac{h_2 - h_1}{2} \cdot \frac{x}{\lambda}$ und $bi = 3f \cdot \frac{x}{\lambda} = \frac{h_3 - h_2}{2} \cdot \frac{x}{\lambda}$.

Mit Bezug auf Gl. 7 folgt daraus

8) $$\frac{a}{h_2} = 1 - \frac{x}{2\lambda}\left(\frac{h_3 - h_1}{h_2}\right).$$

Nach Gl. 2 ist nun, wenn man x mit $(x-\lambda)$ vertauscht,

$$h_1 = 4h_m \frac{(x-\lambda)(l-x+\lambda)}{l^2}, \text{ ferner } h_2 = \frac{4h_m x(l-x)}{l^2} \text{ und}$$

$$h_3 = 4h_m \frac{(x+\lambda)(l-x-\lambda)}{l^2}.$$

Damit wird nach Gl. 8 $\frac{a}{h_2} = \frac{x}{l-x}$ und nach Gl. 6

9) $$V_{2\,min} = \frac{px(l-x)}{2l} + \frac{p\lambda}{2} \cdot \frac{x}{l}.$$

Im ersten Gliede ist $\frac{px}{2}(l-x) = M_x$ gleich dem Biegungsmoment des in jedem Knoten mit $p\lambda$ belastet gedachten Trägers. Zeichnet man nun zu dieser Belastung mit der Polweite l ein Seileck klm (Fig. 134b), so wird $\frac{px(l-x)}{2} = M_x = l \cdot rq$ und $\frac{px}{2l}(l-x) = rq$.

Macht man ferner im rechtsseitigen Stützlot $mn = \frac{p\lambda}{2}$ und verbindet n mit k, so wird $rs = \frac{p\lambda}{2} \cdot \frac{x}{l}$ und somit

10) $$V_{2\,min} = rq + sr = \overline{sq}.$$

Ebenso schneiden die Gerade kn und das Seileck klm auf allen Ständerloten die größte Ständerdruckkraft V_{min} ab.

Hierzu kommt noch der Beitrag der ständigen Last g, der bei der hier vorausgesetzten Belastung des Obergurtes in einer Druckkraft $\frac{g\lambda}{2}$ besteht, welchen Lastanteil jeder Ständer auf den Untergurt zu übertragen hat.

Ist der Träger ein Bogensehnenträger (Fig. 135*c*) mit belastetem Untergurt, so ist, um $V_{2\,min}$ herbeizuführen, die Verkehrslast p bis zum Knoten 3 vorzuschieben. Es wird dann

$$A = \frac{p(l-x)}{2l}(l-x-\lambda) \quad \text{und}$$

$$11) \qquad V_{2\,min} = \frac{p}{2l}(l-x)(l-x-\lambda)\frac{w}{w+x} = \frac{p}{2l}(l-x)(l-x-\lambda)\frac{a}{h_2}.$$

Nach der Fig. 134*c* ist jetzt $a = h_2 - cd$ und, da wegen Ähnlichkeit der Dreiecke $cd2'$ und $1'e2'$ $cd = e2' \cdot \frac{x}{\lambda} = (h_2 - h_1)\frac{x}{\lambda}$

$$12) \qquad \frac{a}{h_2} = 1 - \frac{x}{\lambda}\left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right).$$

Mit den oben vermerkten Werten für h_1 und h_2 wird $\frac{a}{h_2} = \frac{x-\lambda}{l-x}$ und somit nach Gl. 11

$$13) \qquad V_{2\,min} = \frac{p\,x(l-x)}{2l} - \frac{p\,\lambda(l-\lambda)}{2l}.$$

Das erste Glied wird wieder durch die Seilecksordinate rq (Fig. 135*b*) ausgedrückt. Das zweite von x unabhängige Glied entsteht aus dem ersten mit $x = \lambda$, ist also gleich der Seilecksordinate vw im ersten, bezw. letzten Ständerlot. Zieht man daher durch w eine Wagerechte, so schneiden diese und das Seileck auf den Ständerloten die größten Ständerdruckkräfte V_{min} ab.

Die Beiträge der ständigen Last g bestehen hier für jeden Ständer in einer Zugkraft $g\lambda$, welchen Lastanteil jeder Ständer auf den Obergurt überträgt.

In der linken Hälfte der Fig. 135*b* sind die größten Ständerkräfte des symmetrischen Linsenträgers, in der rechten die des symmetrischen Bogensehnenträgers dargestellt.

Wird der Linsenträger im Untergurt belastet, so ergibt eine bezügliche Untersuchung, daß der Punkt n in Fig. 134*b* um $\frac{\lambda p}{2}$ unter m liegt, das zweite Glied in Gl. 9 negativ ausfällt.

Ist der Träger ein Fischbauchträger, dessen gerader Obergurt belastet ist, so wird das zweite Glied in Gl. 13 positiv, und in

Fig. 135 *b* schneiden eine Wagerechte im Abstande $vw = \frac{\lambda(l-\lambda)}{2l} \cdot p$ oberhalb der Geraden mk und die Seillinie mlk auf den Ständerloten die gröfsten Ständerkräfte ab.*)

Auf die Ermittelung der Stabkräfte V_{max}, welche, sofern sie Druckkräfte sind, kleiner ausfallen als die V_{min}, soll hier nicht eingegangen werden, weil sie für die Abmessungen der Ständer meist nicht in Frage kommen.

c) Der Schwedler'sche (hyperbolische) Träger.

Beim parabolischen Fachwerke sind die Strebenkräfte so klein wie möglich; zugleich sind, wenn Druckstreben ausgeschlossen werden, in allen Fachen gekreuzte Zugstreben erforderlich. Der jetzt zu behandelnde Balken erfüllt die Bedingung, dafs in allen Streben nur Zugkräfte entstehen und diese so klein wie möglich ausfallen. Diese Bedingung lautet offenbar, wenn man nur eine Strebe in jedem Fache sich denkt,

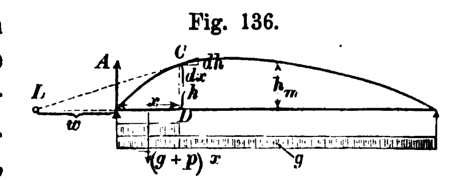
$$1) \qquad D_{min} = 0,$$

weil dadurch ein negatives D, welches eine Gegenstrebe veranlassen würde, gerade noch vermieden wird. Die interessanten Eigenschaften dieser vom weil. Wirkl. Geh. Oberbaurat Schwedler (Berlin) erdachten Balkenform sind am klarsten zu überblicken, wenn man sie nicht an dem unstetigen Fachwerke, sondern an einem stetigen Vollwandträger entwickelt; die entsprechende Bedingung heifst dann

$$2) \qquad Y_{min} = 0.$$

Man denke sich zunächst einen Vollwandträger beliebiger (noch unbestimmter) Gurtform, führe im Abstande x von A einen Schnitt, lege Tangenten an die Schnittstellen der Gurten, welche sich in L, in einem Abstande w von A, schneiden mögen. Die in Fig. 136 angedeutete einseitige Belatung ist nach S. 212 diejenige, welche Y_{min} entspricht. Soll nun dieses $Y_{min} = 0$ sein, so wird die Momentensumme der inneren Kräfte am linksseitigen Abschnitt in Bezug auf L

Fig. 136.



*) Vergl. Müller-Breslau, Graph. Statik 3. Aufl. S. 294.

gleich Null, so daſs die äuſseren Kräfte A und $(g+p)x$ ebenfalls die Momentensumme Null liefern müssen; oder die resultierende äuſsere Kraft R muſs durch den Drehpunkt L gehen. (Würde R rechts von L bleiben, so entstände ein positives Y_{min}, und umgekehrt.) Es ergibt sich hiernach die Gleichung

$$A w = (g+p)x\left(w+\frac{x}{2}\right).$$

Nun ist aber $$A = \frac{g l}{2} + p x - \frac{p x^2}{2 l};$$

führt man dies ein und setzt noch zur Abkürzung das Lastverhältnis

3) $$g : p = n,$$

so ergibt die Auflösung nach w:

4) $$w = \frac{(1+n) x^2 l}{n(l^2 - 2 l x) - x^2}.$$

Der Abstand des Drehpunktes L von der Schnittstelle wird dann

$$w + x = \frac{l x^2 - n l x^2 + n l^2 x - x^3}{n(l^2 - 2 l x) - x^2} = \frac{x(l-x)(x+n l)}{n(l^2 - 2 l x) - x^2}.$$

Um daraus die Trägerform zu finden, lasse man an der Schnittstelle x um dx wachsen, dann wächst die Trägerhöhe h daselbst um dh. Bei C entsteht ein kleines rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten dx und dh, welches ähnlich ist dem groſsen Dreiecke LCD. Daher wird

$$\frac{dh}{h} = \frac{dx}{w+x} = \frac{n(l^2 - 2 l x) - x^2}{x(l-x)(x+n l)} dx.$$

Behufs der Integration dieser Differentialfunktion des Schwedler-Trägers muſs die rechte Seite in Teilbrüche zerlegt werden, wonach man erhält

$$\frac{dh}{h} = \frac{dx}{x} - \frac{dx}{l-x} - \frac{dx}{x+n l}, \text{ mithin}$$

$$\mathfrak{l} h = \mathfrak{l} x + \mathfrak{l}(l-x) - \mathfrak{l}(x+n l) + \mathfrak{l} C \text{ oder}$$

$$h = \frac{x(l-x)}{x+n l} C.$$

Führt man zur Beseitigung der Integrationskonstanten die Trägerhöhe h_m in der Mitte ein ($x = {}^1\!/_2 l$; $h = h_m$), so erhält man leicht

5) $$h = \frac{4 h_m}{l^2} x(l-x) \frac{\frac{1}{2} + n}{\frac{x}{l} + n}.$$

Fehlte der letzte Bruch auf der rechten Seite, so wäre Gl. 5 die Gleichung des parabolischen Trägers (S. 283). Da nun

$$\frac{\frac{1}{2}+n}{\frac{x}{l}+n} \gtrless 1 \text{ für } \frac{x}{l} \lessgtr \frac{1}{2},$$

so ist die nach Gl. 5 berechnete Trägerhöhe links von der Mitte größer, rechts aber kleiner als die des entsprechenden parabolischen Trägers. Einem der Gurte kann man beliebige Form geben; den bisherigen Ausführungen entsprechend, möge der Untergurt gerade gewählt werden, so daß dann Gl. 5 ohne weiteres die Gleichung des Obergurtes ist.

Nach vorstehenden Bemerkungen ist die nach Gl. 5 bestimmte Trägerform unsymmetrisch zur Trägermitte. Die Höhe h_m in der Mitte ist daher nicht die größte, vielmehr liegt diese auf der linksseitigen Hälfte. Um ihre Lage zu finden, setze man $dh:dx=0$ oder

$$0=\left(\frac{x}{l}+n\right)(l-2x)-x(l-x)\frac{1}{l}.$$

Dieser Gl. entspricht ein Wert $x=x_o$, wo

$$x_o=nl\left(-1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)=\frac{g}{p}l\left(-1+\sqrt{1+\frac{p}{g}}\right). \tag{6}$$

Dieser Wert wurde schon Bd. I S. 162 für diejenige Stelle gefunden, an welcher $Q_{x\,min}=0$ ist, wo also beim Parallelträger die kleinste Wandscherkraft $Y_{min}=0$ sein würde. Auch durch einfache Überlegung findet man, daß an dieser Stelle die größte Höhe des Schwedler-Trägers liegen muß: Für $x=x_o$ trifft nämlich der Umstand ($Y_{min}=0$) beim Parallelträger zu, welcher beim Schwedler-Träger durchweg gilt; es muß daher an dieser Stelle der letztere Träger mit dem Parallelträger übereinstimmen, d. h. seine Gurten müssen hier ebenfalls parallel sein.

Setzt man den Wert $x=x_o$ nach Gl. 6 in Gl. 5 ein, so entsteht nach geeigneter Zusammenziehung

$$h_{max}=4h_m(^1/_2+n)(1+2n-2\sqrt{n+n^2}). \tag{7}$$

Ordnet man Gl. 5 nach Potenzen von x und h, so erhält man

$$(2+4n)h_m x^2+0\cdot h^2+lxh-(2+4n)h_m lx+nl^2h=0;$$

dies ist für endliche Werte von n die Gleichung einer Hyperbel, weil $\quad (2+4n)h_m\cdot 0-{}^1/_4 l^2<0.$

Die eine Asymptote derselben steht lotrecht und liegt um nl links von der Spannweite; die zweite Asymptote schneidet die Spannweite $AB = l$ in einem Abstande nl rechts von B und trifft die erste Asymptote in der Höhe $2h_m(1+2n)^2$.

In dem Gesetze des hyperbolischen Trägers sind der Parabel- und der Dreieckträger als Sonderfälle enthalten:

1) Für $n = g/p = \infty$, also $p/g = 0$ wird Gl. 5 zu

$$h = \frac{4h_m}{l^2} x(l-x),$$

d. h. zur Gleichung des parabolischen Trägers; die gröfste Höhe liegt nun in der Mitte, es wird $h_{max} = h_m$. (Der Ausdruck $(-n + \sqrt{n+n^2})$ in Gl. 6 wird nämlich für $n = \infty$ zu $1/2$.) Dieser Übergang zum parabolischen Träger folgt auch aus einfacher Überlegung ohne jede Rechnung. Wird nämlich $p/g = 0$, verschwindet also die bewegliche Last p gegen die ständige Belastung g, so ist einseitige Belastung mit p links vom Schnitt übereinstimmend mit nur ständiger Belastung der ganzen Spannweite, und der Bedingung $Y = 0$ für diesen Belastungsfall entspricht ja bekanntlich der parabolische Träger (S. 210). Je gröfser n wird, je mehr die ständige Belastung gegen die bewegliche überwiegt (bei grofser Spannweite), desto mehr nähert sich die Hyperbel der Gl. 5 einer Parabel, desto näher rückt die Stelle der gröfsten Trägerhöhe der Mitte der Spannweite.

2) Ist dagegen (bei sehr kleiner Spannweite) $n = g/p = 0$, so wird Gl. 5 zu

$$h = 2h_m \frac{l-x}{l},$$

dargestellt durch Fig. 137.

Fig. 137.

$2h_m$

l

Die **Gurten** haben bei ungünstigster (voller) Belastung mit $g + p = q$ das Moment $1/2\, q x(l-x)$ aufzunehmen. Für die gröfste wagerechte Seitenkraft der Gurten $H = U = O\cos\omega$ gilt daher

$$Hh \text{ oder } H\frac{4h_m}{l^2} x(l-x)\frac{1/2+n}{x\,l+n} = 1/2\, q x(l-x);$$

8) $$\text{das gibt } H = U = O\cos\omega = \frac{q l^2}{8h_m}\,\frac{x\,l+n}{1/2+n}.$$

H ist hiernach eine lineare Funktion von x. Für

$n = 0$ wird $H = \frac{q l^2}{8 h_m} \frac{2x}{l} = \frac{q l}{4 h_m} x$,

$n = 1/2$ wird $H = \frac{q l^2}{8 h_m} \left(\frac{x}{l} + \frac{1}{2} \right)$,

$n = \infty$ wird $H = \frac{q l^2}{8 h_m}$ (s. Fig. 138).

Fig. 138.

Die **Wandscherkraft** erreicht ihren gröfsten Wert Y_{max}, wenn, aufser ständiger Belastung der ganzen Spannweite, das Stück $l - x$ rechts vom Schnitte noch mit p belastet ist. Dieses Y_{max} könnte man unmittelbar berechnen mittels der Momentengleichung in Bezug auf den Drehpunkt L, dessen Lage ja mit Hülfe der Gl. 4 (S. 290) bekannt ist. Die Rechnung wird aber vereinfacht durch folgende Betrachtung:

Für jede Belastung gilt (nach Gl. 4 S. 208):

$$Y = h \frac{d\left(\frac{M}{h}\right)}{dx}.$$

Nun ist für Belastung der ganzen Spannweite mit p (nach Gl. 8 S. 292)

$$\frac{M}{h} = H = \frac{p l^2}{8 h_m} \frac{x/l + n}{1/2 + n},$$

also

$$\frac{d\left(\frac{M}{h}\right)}{dx} = \frac{p l}{8 h_m} \frac{1}{1/2 + n},$$

mithin die Wandscherkraft für diese Belastungsart

$$Y_p = \frac{p l}{4 h_m} \frac{h}{1 + 2n}. \tag{9}$$

Es setzt sich aber Y_{max} zusammen aus Y_g (entsprechend nur ständiger Belastung) und dem Einflusse der einseitigen Belastung rechts mit p, was wir schreiben wollen

$$Y_{max} = Y_g + Y_{rp}. \quad \text{Ebenso ist}$$

$$Y_{min} = 0 = Y_g + Y_{lp},$$

insofern die kleinste Wandscherkraft (deren Gröfse ja Null) aus Y_g und dem Einflusse einer einseitigen Belastung links mit p entsteht. Zählt man beide Gleichungen zusammen, so wird (weil

$Y_{rp} + Y_{lp}$ einer Belastung der ganzen Spannweite mit p entspricht, also gleich Y_p ist)

$$Y_{max} = 2\,Y_g + Y_p = Y_p\,(2\,g/p + 1) = Y_p\,(2\,n + 1)$$

oder mit Hülfe von Gl. 9:

$$10)\qquad Y_{max} = \frac{p\,l}{4\,h_m}\,\frac{h}{1+2\,n}\,(2\,n+1) = \frac{p\,l}{4}\,\frac{h}{h_m}.$$

Hiernach ist, wie beim parabolischen Träger (S. 213) die gröfste Wandscherkraft nur von p, nicht von g, abhängig und ebenfalls verhältnisgleich mit der Trägerhöhe h an der betreffenden Schnittstelle. Während die Wandscherkraft beim parabolischen Träger zwischen $-\frac{p\,l}{8}\,\frac{h}{h_m}$ und $+\frac{p\,l}{8}\,\frac{h}{h_m}$ schwankt, bewegt sie sich beim hyperbolischen Träger zwischen 0 und $\frac{p\,l}{4}\,\frac{h}{h_m}$.

Der Schwedler'sche Fachwerkbalken. Es ist nun aus dem hyperbolischen Vollwandträger der Bedingung $Y_{min} = 0$ der eigentliche, in Fachwerk ausgebildete Schwedler-Träger mit der Bedingung $D_{min} = 0$ abzuleiten. Geht man dabei von ständiger Last g und beweglicher Last p aus, welche durch Zwischenträger auf die Knotenpunkte eines Ständerfachwerks übertragen werden und schiebt man bei einseitiger Belastung wiederum, wie in Fig. 134 S. 285 dargestellt, die Last nur bis an das durchschnittene Fach vor, indem man aber gleichzeitig am Vorderende der Last eine Einzelkraft $\frac{1}{2}\,p\,\lambda$ hinzufügt, so zeigt sich, dafs die Gleichungen des hyperbolischen Trägers nicht nur annähernd, sondern genau auf das Fachwerk übertragen werden können.

In Fig. 139 ist diejenige Belastungsart gezeichnet, welche dem kleinsten Werte D_{min} der durchschnittenen Strebe in einem beliebigen Fache entsprechen würde. Es ist dann das Moment infolge der ständigen Belastung g

Fig. 139.

$$\text{bei } x: \qquad M_x = \tfrac{1}{2}\,g\,x\,(l - x)$$

$$\text{bei } x + \lambda: \qquad M_{x+\lambda} = \tfrac{1}{2}\,g\,(x + \lambda)\,(l - x - \lambda).$$

Durch die bewegliche Last allein entsteht der rechtsseitige Auflagerdruck

$$B_p = \frac{p\,x^2}{2\,l} + \frac{p\,\lambda}{2}\,\frac{x}{l} = \frac{p\,x\,(x+\lambda)}{2\,l}.$$

Infolge beider Belastungen wird nun für den unteren Endpunkt der Strebe

$$\left(\frac{M}{h}\right)_u = \frac{B(l-x-\lambda) + \frac{1}{2}g(x+\lambda)(l-x-\lambda)}{h_1}$$

und für ihren oberen Endpunkt

$$\left(\frac{M}{h}\right)_o = \frac{B(l-x) + \frac{1}{2}gx(l-x)}{h},$$

wenn h und h_1 die Trägerhöhen zu beiden Seiten des durchschnittenen Faches sind. Nach der Bedingung des Schwedler-Trägers soll nun $D_{min} = 0$ sein, also auch nach Gl. 6 S. 236

$$D_{min} \cos \delta = \left(\frac{M}{h}\right)_u - \left(\frac{M}{h}\right)_o = 0;$$

daraus folgt mit Hülfe der vorhergehenden Gleichungen

$$\frac{h_1}{h} = \frac{B(l-x-\lambda) + \frac{1}{2}g(x+\lambda)(l-x-\lambda)}{B(l-x) + \frac{1}{2}gx(l-x)},$$

oder nach Einführung des Wertes von B und nach Zusammenziehung

$$\frac{h_1}{h} = \frac{(x+\lambda)(l-x-\lambda)(n+x/l)}{x(l-x)\left(n+\frac{x+\lambda}{l}\right)}.$$

Dieser Bedingung mufs der Fachwerkbalken entsprechen, damit $D_{min} = 0$ sei. Berechnet man aber h und h_1 aus Gl. 5 (S. 290), so ergibt sich dasselbe. Daher kann Gl. 5 zur Berechnung der einzelnen Ständerhöhen des Trägers benutzt werden; der Obergurt wird dann ein Sehnenvieleck der Hyperbel.

Die **gröfste Kraft der Streben** D_{max} finden wir nach dem Vorgange der Berechnung von Y_{max} (Gl. 10). Für Belastung der ganzen Spannweite mit p ist nach Gl. 8 (S. 292)

$$\left(\frac{M}{h}\right)_o = H = \frac{pl^2}{8h_m}\,\frac{x+nl}{\frac{1}{2}l+nl},$$

$$\text{daraus} \quad \left(\frac{M}{h}\right)_u = \frac{pl^2}{8h_m}\,\frac{x+\lambda+nl}{\frac{1}{2}l+nl}, \quad \text{daher}$$

$$D_p \cos \delta = D_p \frac{\lambda}{d} = \left(\frac{M}{h}\right)_u - \left(\frac{M}{h}\right)_o = \frac{pl}{8h_m}\,\frac{\lambda}{\frac{1}{2}+n}, \quad \text{oder}$$

$$D_p = \frac{pl}{4(2n+1)}\,\frac{d}{h_m}, \text{ wenn } d \text{ die Länge der Strebe.}$$

Nun ist

$$\begin{array}{r} D_{max} = D_g + D_{rp} \\ D_{min} = 0 = D_g + D_{lp} \\ \hline D_{max} = 2\,D_g + D_p = D_p\,(2\,n + 1)\,, \end{array}$$ folglich

$$D_{max} = \frac{p\,l}{4}\,\frac{d}{h_m}\,, \tag{11}$$

d. h. die größten Strebenkräfte sind mit den Strebenlängen verhältnisgleich. (Für Lokomotiv-Belastung werden die Form- und Spannungsverhältnisse verwickelter.)

Fig. 140.

Fig. 141.

Fig. 142.

Symmetrische Anordnung des Balkens. Durch obige Herleitung haben wir einen zur Mitte unsymmetrischen Balken erhalten, dessen Zugstreben sämtlich nach rechts abfallen. Daraus lassen sich nun zwei verschiedene symmetrische Formen ableiten, indem man entweder die linksseitige oder die rechtsseitige Hälfte symmetrisch wiederholt. Bei Fig. 141 liegt der Obergurt ganz oberhalb einer Parabel der Pfeilhöhe h_m, weshalb die wagerechte Gurtkraft nach den Auflagern hin abnimmt und Zugstreben nach der Mitte abfallen müssen, während bei Fig. 140 das Gegenteil stattfindet. Letztere Anordnung wird nicht benutzt, weil die Gurten nach den Auflagern hin zu schwer werden. Aber auch die Anordnung nach Fig. 141 hat man ihrer unschönen Form wegen nicht ausgeführt, sondern hat in dem mittleren Teile, in welchem die Gurten nach der Mitte zu sich senken müßten, das Mittelstück eines Parallelträgers eingelegt. Dadurch sind nun für dieses eingeschobene Stück die kennzeichnenden Eigenschaften des hyperbolischen Trägers aufgegeben und in demselben gekreuzte Zugstreben oder knicksichere Streben erforderlich geworden (Fig. 142).

d) Der Halbparabelträger (abgestumpfter Parabelträger).

In den vorstehenden Kapiteln wurden die Eigenschaften einiger bemerkenswerten Trägerformen behandelt; jedoch sind derartige Untersuchungen für die Berechnung bestimmter Beispiele

keineswegs immer erforderlich, vielmehr kann diese leicht unmittelbar mit Hülfe der entwickelten Methoden erfolgen, wenn die Trägerform gegeben ist.

In folgendem soll beispielsweise ein Halbparabelträger berechnet werden, d. i. ein Träger mit parabolisch geknicktem Obergurt, der an den Enden nicht die Höhe Null, sondern eine bestimmte Höhe h_o aufweist. Die Spannweite sei durch Ständer in beispielsweise 8 Fache geteilt (Fig. 143), dann ist, wenn man die unteren Knotenpunkte mit 0 bis 8 numeriert, h_4 die gröfste Trägerhöhe, und in einem Abstande x vom linken Auflager gilt für die Trägerhöhe h_x nach der Parabel-Gleichung die Formel

Fig. 143.

$$h_x - h_o = \frac{4(h_4 - h_o)}{l^2} x (l - x). \tag{1}$$

Wir wählen nun die Fachlänge λ zur Einheit, so dafs $l = 8$ wird, und nehmen noch $h_4 = \lambda = 1$ und $h_o = {}^1/_2$ an, so dafs die Trägerform nun ganz bestimmt ist; dann wird nach Gl. 1

$$h_x = 0{,}5 + {}^1/_{32}\, x (8 - x), \tag{2}$$

worin x natürlich nur die Werte ganzer Zahlen 1, 2, 3 haben kann.

Da die Fachlänge = 1, so wird $\operatorname{tg} \delta_1 = h_o$, $\operatorname{tg} \delta_2 = h_1$ usf. Ebenso wird $\operatorname{tg} \omega_1 = h_1 - h_o$ usf., und alle zunächst wichtigen Gröfsenverhältnisse finden sich in folgender Tabelle:

$h_o = \operatorname{tg} \delta_1 = 0{,}5$		
	$h_1 - h_0 = \operatorname{tg} \omega_1 = \frac{7}{32} = 0{,}21875$	
$h_1 = \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{23}{32} = 0{,}71875$		$-\frac{2}{32} = -0{,}0625$
	$h_2 - h_1 = \operatorname{tg} \omega_2 = \frac{5}{32} = 0{,}15625$	
$h_2 = \operatorname{tg} \delta_3 = \frac{28}{32} = 0{,}875$		$-\frac{2}{32} = -0{,}0625$
	$h_3 - h_2 = \operatorname{tg} \omega_3 = \frac{3}{32} = 0{,}09375$	
$h_3 = \operatorname{tg} \delta_4 = \frac{31}{32} = 0{,}96875$		$-\frac{2}{32} = -0{,}0625$
	$h_4 - h_3 = \operatorname{tg} \omega_4 = \frac{1}{32} = 0{,}03125$	
$h_4 = \operatorname{tg} \delta_5 = 1{,}0$		

Dafs die zweiten Differenzen durchweg denselben Wert $-0{,}0625$ haben, rührt von der Parabelgestalt des Obergurts her.

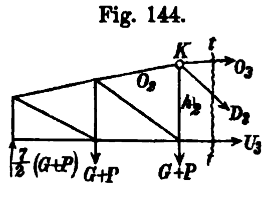
Jeder mittlere Knotenpunkt des Untergurts trage eine ständige Last G, eine bewegliche Last P, und zwar sei $G = {}^1/_5\, P$, also

$G = {}^1/_6 (G + P)$, $P = {}^5/_6 (G + P)$. (Belastungen der Knotenpunkte 0 und 8 werden unmittelbar von den Auflagern aufgenommen.)

Da der Halbparabelträger eine Mittelform zwischen Parallel- und Parabelbalken ist, so mufs für volle Belastung die wagerechte Kraft der Gurten nach den Enden hin abnehmen, nur nicht so stark wie beim Parallelträger. Es sollen nur Zugstreben angeordnet werden, diese müssen vorwiegend nach der Mitte abfallen, doch wird eine gewisse Zahl von Mittelfachen auch Gegenstreben erfordern. Damit aber diese letzteren die Übersicht nicht stören, nimmt man bei der Berechnung zunächst nur nach rechts fallende Streben an, untersucht, nach rechts fortschreitend, wie weit man für diese noch positive Spannkräfte bekommt, und läfst sie darüber hinaus fort; die so berechnete Strebenschar wird dann symmetrisch wiederholt.

Die **Gurtkräfte** werden für volle Belastung aller 7 Lastpunkte mit $G + P$ berechnet, wobei jeder Auflagerdruck ${}^7/_2\ (G + P)$ beträgt. Um beispielsweise U_3 im dritten Fache des Untergurts zu berechnen (Fig. 144), führt man einen Schnitt tt und wählt den Schnittpunkt K der beiden mitgetroffenen Stäbe O_3 und D_3 zum Drehpunkte, so dafs letztere keine Momente erhalten. Dann hat man die Momentengleichung

Fig. 144.



$$3)\qquad 0 = -U_3 h_2 + {}^7/_2 (G + P)\cdot 2 - (G + P)\cdot 1,$$

also, weil $h_2 = 0{,}875$,

$$4)\qquad U_3 = \frac{6}{0{,}875}(G + P) = 6{,}857\,(G + P).$$

Zur Berechnung desjenigen Stabes O_2 des Obergurts, welcher mit U_3 zwischen denselben Hauptstreben liegt, ist der untere Knotenpunkt 2 als Drehpunkt zu erwählen; in Bezug auf diesen ist aber das Biegungsmoment das gleiche, wie bezüglich des Punktes K, so dafs auch das Widerstandsmoment denselben Wert haben mufs. Der Hebelarm von O_2 ist aber $h_2 \cos \omega_2$, die Drehungsrichtung einer Zugkraft O_2 rechts herum, während U_3 links drehte, mithin wird $O_2 \cos \omega_2 h_2 = -U_2 h_2$ oder $O_2 = -U_2 \sec \omega_2$. Nun ist $\sec \omega_2$ das Verhältnis der Länge des Obergurtstückes zur Länge seiner wagerechten Projektion, daher aus einer sorgfältigen Zeichnung leicht abzu-

greifen; jedoch kann man auch $\sec\omega_2 = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\omega_2} = \sqrt{1+0{,}15625^2}$ $= 1{,}01154$ berechnen und erhält $O_2 = -6{,}936\,(G+P)$.

Für alle Gurtstücke bis zur Mitte erhält man in gleicher Weise:

$U_1 = 0$

$U_2 = 4{,}870\,(G+P)$	$O_1 = -4{,}983\,(G+P)$
$U_3 = 6{,}857\,(G+P)$	$O_2 = -6{,}936\,(G+P)$
$U_4 = 7{,}742\,(G+P)$	$O_3 = -7{,}776\,(G+P)$
	$O_4 = -8{,}004\,(G+P)$.

Die Streben werden für einseitige Belastung berechnet. Bei der Bestimmung von D_3 hat man den Schnittpunkt L_3 von O_3 und U_3 zum Drehpunkte zu wählen (Fig. 145). Zur Ermittelung

Fig. 145.

seines Abstandes w_3 vom linken Auflager führt leicht die Verhältnis-Gleichung $(w_3+2):h_2 = 1:(h_3-h_2)$; das gibt $w_3 = 7\,{}^1/_3$. Zerlegt man D_3 am Punkte 3, so wird $D_3 \sin\delta_3\,(w_3+3)$ das innere Moment bezüglich des Punktes L_3, und zwar findet man $\sin\delta_3$ am einfachsten, indem man das gegebene $\operatorname{tg}\delta_3 = 0{,}875$ in der Tangenten-Spalte einer trigonometrischen Tafel aufsucht und in derselben Reihe $\sin\delta_3 = 0{,}6585$ in der Sinus-Spalte abliest. Für $D_{3\,max}$ ist die in Fig. 145 *b* gezeichnete Belastung maßgebend, wobei $A = {}^7/_2\,G + {}^{15}/_8\,P$ wird. Dann erhält man die Momentengleichung

5) $$0 = D_3 \sin\delta_3 \cdot 10\,{}^1/_3 - A \cdot 7\,{}^1/_3 + 2\,G\,8\,{}^5/_6.$$

(Wir schreiben in diesen Gleichungen stets zuerst die gesuchte Spannkraft, dann den Auflagerdruck und endlich die Lasten links vom Schnitt an, welche letzteren wir sogleich mit ihrer Mittelkraft einführen.)

Daraus ergibt sich

6) $$D_{3\,max} = 1{,}175\,G + 2{,}020\,P.$$

$$= 1{,}8792\,(G+P)\left(\begin{matrix}\text{wegen } G = {}^1/_6\,(G+P)\\ \text{und } P = {}^5/_6\,(G+P)\end{matrix}\right).$$

$D_{3\,min}$ entsteht bei einseitiger Belastung links vom Schnitte, braucht aber nicht besonders berechnet zu werden, sondern folgt aus $D_{3\,max}$. Schreibt man nämlich

7) $$D_{3\,max} = \alpha G + \beta P,$$

8) $$D_{3\,min} = \alpha G + \gamma P$$

mit Rücksicht darauf, dafs ja die ständige Last in beiden Fällen dieselbe ist und deshalb auch gleichen Einflufs üben mufs, so stellt β den Beitrag von 5 rechtsseitigen, γ den Beitrag von 2 linksseitigen Lasten der Gröfse Eins dar; $\beta + \gamma$ ist daher der Einflufs aller 7 Lasten (von der Gröfse Eins) auf D, und weil α dasselbe bedeutet, so mufs $\beta + \gamma = \alpha$ oder

9) $$\gamma = \alpha - \beta \quad \text{sein.}$$

Hier wird $\gamma = 1{,}175 - 2{,}020 = -0{,}845$,

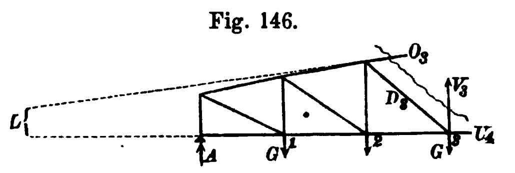
mithin $D_{3\,min} = 1{,}175\,G - 0{,}845\,P = -0{,}5083\,(G + P)$.

Die Strebe im dritten Fach hat also bei Belastung rechts vom Schnitt eine Zugkraft, bei linksseitiger Belastung aber eine Druckkraft zu leisten.

Berechnet man in gleicher Weise die übrigen Streben, von links beginnend, so erhält man für $D_{1\,min}$ und $D_{2\,min}$ noch positive Werte; in diesen Streben kommt also nur ein der Gröfse nach wechselnder Zug vor. D_4 hat ebenso wie D_3 wechselweise eine Zug- und Druckkraft zu leisten. Die Streben der 4 mittleren Fache müssen daher, sofern nicht Gegendiagonalen angewandt werden sollen, knickfest gestaltet werden.

Die Ständer sind gleichfalls für einseitige Belastung zu berechnen. Führen wir beispielsweise durch V_3 (Fig. 146) einen schrägen Schnitt, so ist der Schnittpunkt von O_3 und U_4 zum Drehpunkte L zu wählen; dies ist wiederum L_3 wie in Fig. 145 mit dem Abstande $w_3 = 7\,^1/_3$ von A. Für $V_{3\,min}$ haben wir einseitige Belastung der Knotenpunkte 4 bis 7 mit P anzunehmen (s. Fig. 145 *c*) und erhalten $A = {}^7/_2\,G + 4 \cdot {}^5/_{16}\,P$. Dann wird die Momentengleichung

Fig. 146.



10) $$0 = -V_3 \cdot 10^1/_3 - A \cdot 7^1/_3 + 3\,G \cdot 9^1/_3 \quad \text{und}$$

$$V_{3\,min} = 0{,}226\,G - 0{,}887\,P = -0{,}7023\,(G + P) \quad \text{(Druck).}$$

Setzt man wieder

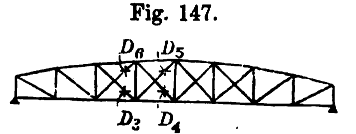
11) $$V_{3\,min} = \alpha G + \beta P, \qquad V_{3\,max} = \alpha G + \gamma P,$$

so mufs $\gamma = \alpha - \beta = 0{,}226 + 0{,}887 = 1{,}113$ sein, mithin

12) $$V_{3\,max} = 0{,}226\,G + 1{,}113\,P = 0{,}9652\,(G + P).$$

In gleicher Weise berechnet man die übrigen Ständer vom Auflager bis zur Mitte.

Fig. 147.



Der Mittelständer selbst, der zwischen links und rechts ansteigenden Streben liegt (vergl. Fig. 147), erfordert eine abweichende Art der Berechnung. Wir bestimmen denselben aus dem Gleichgewicht der im Knoten C in der Mitte des Obergurtes (Fig. 148) zusammentretenden Stabkräfte O_4, O_5 und V_4. Aus der Gleichung der lotrechten Kräfte folgt nämlich

Fig. 148.

$$O_4 \sin \omega_4 + O_5 \sin \omega_5 = V_4.$$

Wegen der bestehenden Symmetrie ist absolut genommen $\omega_4 = \omega_5$ und daher unter Beachtung der Bedingung der Nullgleichheit der Summe aller wagerechten Kräfte $O_4 = O_5$. Beide Stabkräfte sind gleich $\frac{M_4}{h_4 \cos \omega_4}$, wenn M_4 das Biegungsmoment für die Trägermitte bezeichnet. Daher mit $h_4 = 1$

$$V_4 = 2 \cdot O_4 \sin \omega_4 = 2 \cdot M_4 \operatorname{tg} \omega_4.$$

V_4 wird also wie M_4 bei voller Belastung am gröfsten und für nur ständige Belastung mit G am kleinsten, in beiden Fällen aber eine Zugkraft. Mit $\operatorname{tg} \omega_4 = 0{,}03125$ und $M_{4\,max} = 8\,(G + P)$ und $M_{4\,min} = 8\,G$ wird

13) $$V_{4\,max} = 2 \cdot 8 \cdot 0{,}03125 \cdot (G + P) = \text{rund}\ 0{,}5\,(P + G) \quad \text{und}$$

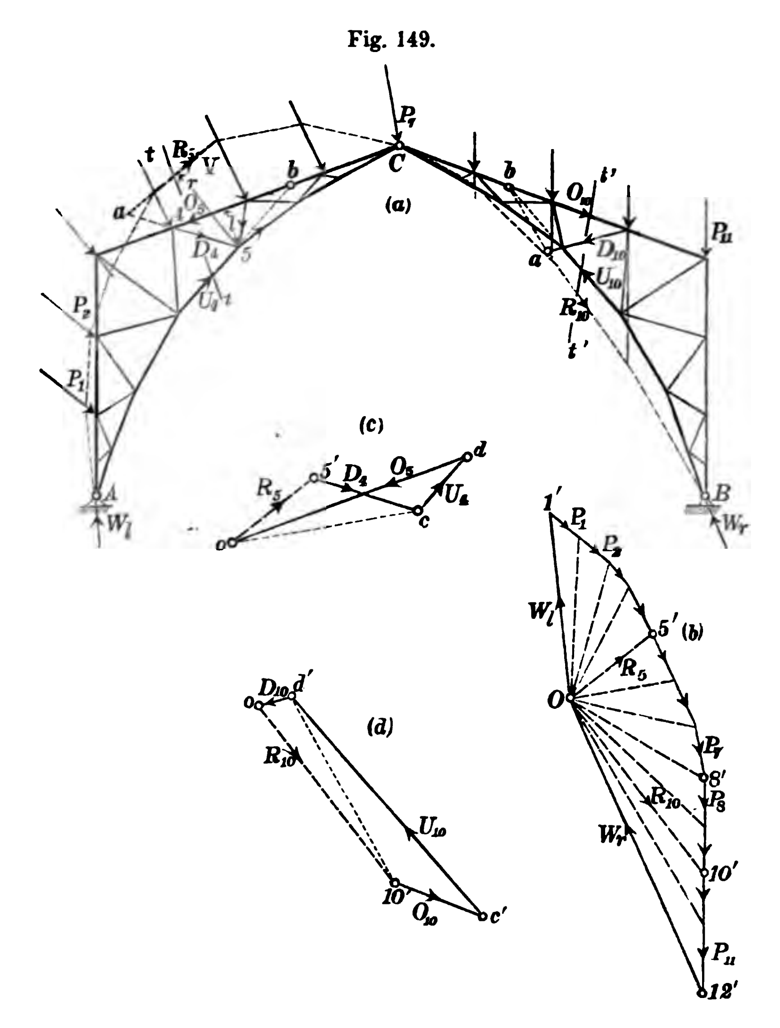
14) $$V_{4\,min} = 0{,}5 \cdot G.$$

e) Der Fachwerkbogenträger mit drei Gelenken.

Es werde zunächst ein beliebiger und beliebig belasteter Bogenfachwerkträger (Fig. 149 a) vorausgesetzt, der bei A und B in festen Stützgelenken ruhe und dessen beide Hälften durch das Scheitelgelenk C verbunden seien. Wir stellen das äufsere Gleichgewicht in bekannter Weise fest durch Zeichnung eines Kraftecks

(Fig. 149 *b*) und eines Seilecks (in Fig. 149 *a* punktiert) zu den gegebenen Lasten durch die drei Gelenkpunkte *A*, *B* und *C*. Durch letzteres als Mittelkraftlinie der äußeren Kräfte wird zugleich

Fig. 149.



die für einen beliebigen Schnitt *tt* zur Bestimmung der Stabkräfte nach Culmann oder Ritter zu benutzende Mittelkraft der das abgeschnittene Trägerstück links oder rechts vom Schnitt angreifenden äußeren Kräfte ihrer Lage nach bekannt, während ihre Größe als Polstrahl dem Krafteck entnommen werden kann.

Die z. B. für den Schnitt tt geltende Mittelkraft R_5 liegt in der Seilecksseite V und ist im Krafteck gleich dem Polstrahl $\overline{05'}$. Das nach Culmann gezeichnete Krafteck $05'cd0$ (Fig. 149 c), in dem $oc \parallel ab$, ergibt die durch den Schnitt getroffenen Stabkräfte D_4, U_4 und O_5. Ebenso das Krafteck (Fig. 149 d) die durch den Schnitt $t't'$ getroffenen Stabkräfte D_{10}, U_{10} und O_{10}.

Nach Ritter erhält man $O_5 = R_5 \cdot r : l$ und in gleicher Weise die übrigen Stabkräfte des Schnittes. Das Ergebnis vorstehender Formel kann leicht auch durch geometrische Konstruktion erhalten werden.

Im Krafteck $0\,1'\,8'\,12'\,0$ erscheinen alle äufseren Kräfte mit den Stützwiderständen W_l und W_r zusammengereiht. In Verbindung damit läfst sich leicht auch in der auf Seite 242 allgemein dargelegten Weise ein zusammenhängender Kräfteplan zeichnen, dem alle Stabkräfte entnommen werden können.

Wir wollen nun für die häufiger vorkommende Form des Dreigelenk-Fachwerk-Bogenträgers (Fig. 150 a) mit geradem wagerechten oder geneigten Obergurt, meist parabolisch gekrümmten Untergurt und einem Wandsystem, bestehend aus Streben und Ständern, die Einflufslinien der Stabkräfte ableiten. Beide Stützgelenke A und B sowohl als auch das Scheitelgelenk liege im Linienzuge des parabolischen Untergurtes, so dafs bei gleichmäfsiger voller Belastung des ganzen Trägers der Obergurt und die Streben spannungslos bleiben und die Ständer nur die direkte Übertragung der Knotenlasten $q\lambda$ auf den Untergurt zu bewirken haben.

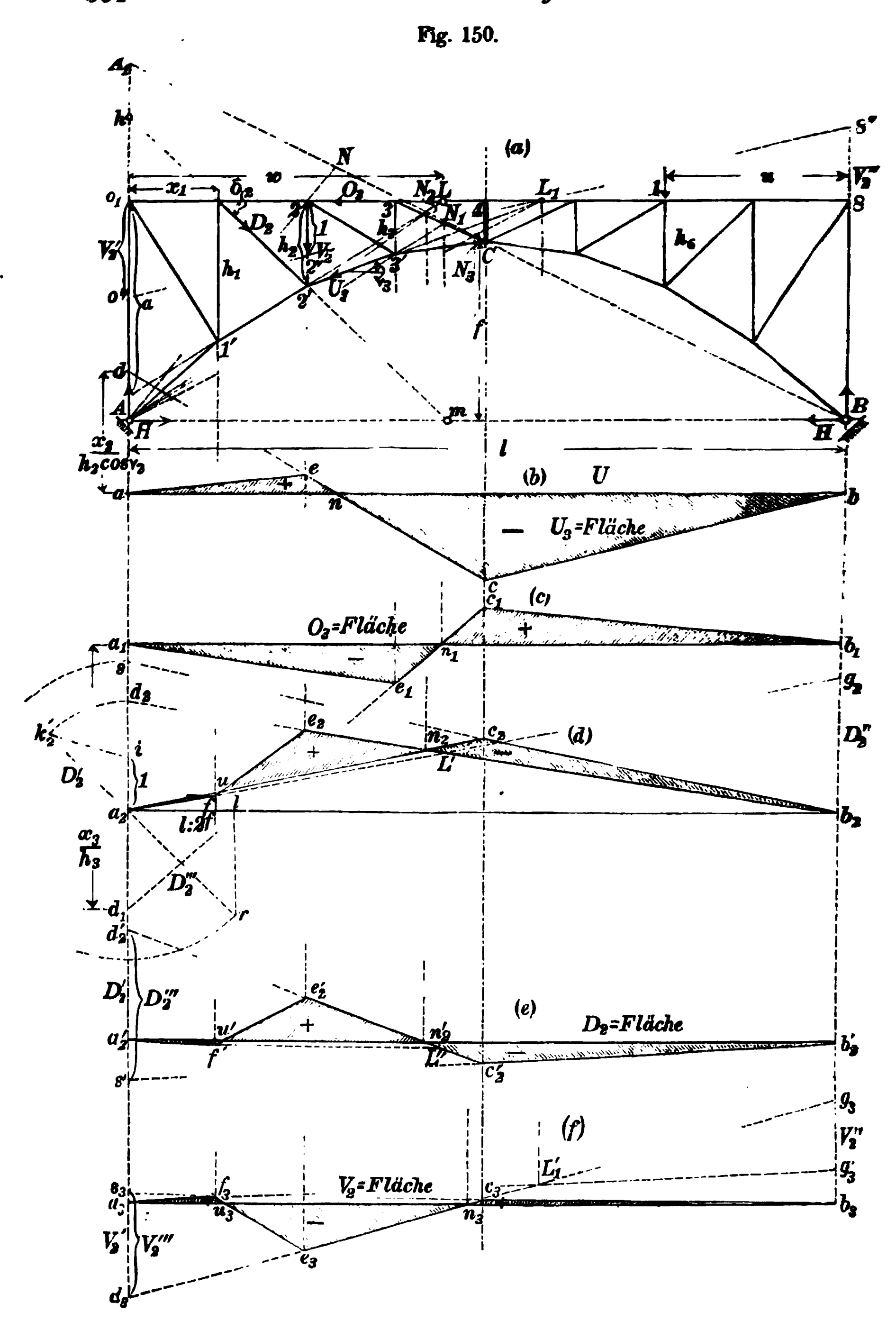
1. Einflufslinie der Stabkräfte des Untergurtes.

Die Stabkraft im dritten Felde ist

$$U_3 = - M_2 : h_2 \cdot \cos \nu_3, \tag{1}$$

worin M_2 das Moment der äufseren Kräfte in Bezug auf den Knoten 2 des Obergurtes bezeichnet. Die Einflufslinie von M_2 erhalten wir nach Seite 77 bis 79, indem wir vom Kämpfergelenk A aus durch den Momentenpunkt 2 eine Gerade ziehen bis zum Schnitt N mit der Kämpferdrucklinie BCA_1. Die Lotrechte durch N legt auf der Einflufsnulllinie ab (Fig. 150 b) die Belastungsscheide n fest; machen wir noch $ad = x_2$ (Abszisse des Knoten 2), ziehen von d aus über n bis zum Scheitellot die Gerade dc, verbinden c mit b und bestimmen e auf der Geraden dc lotrecht unter 2, so ist $aencb$ Einflufslinie von M_2.

Fig. 150.



Um die Einflußlinie von U_3 zu erhalten, machen wir ad nicht gleich x_2, sondern gleich $x_2 : h_2 \cos \nu_3$.

Für Stäbe des Untergurtes, bei denen der als maßgebender Momentendrehpunkt in Frage kommende Knotenpunkt des Obergurtes rechts der Kämpferdrucklinie BCA_1 liegt, fällt der Punkt e auf der Geraden dnc unter ab und n verliert die Bedeutung einer Belastungsscheide; überall herrscht negativer Einfluß; bei voller Belastung des ganzen Trägers entsteht in diesem Untergurtstabe die größte Druckkraft. Im übrigen können die Einflußlinien für alle anderen Stäbe des Untergurtes in gleicher Weise ermittelt werden. Herrscht Symmetrie, so ist das nur für eine Bogenhälfte notwendig.

2. Einflußlinie der Stabkräfte des Obergurtes.

Die Stabkraft im dritten Felde ist

2) . $$O_3 = -M_{3'} : h_3,$$

mit $M_{3'}$ als Moment der äußeren Kräfte in Bezug auf den Knoten 3'. Die Einflußlinie für $M_{3'}$ entwickelt sich in genau gleicher Weise wie oben für M_2 geschehen und wie in Fig. 40d S. 78 für $M_{x'}$ in Bezug auf den Punkt S der Bogenlinie, nur kehren sich wegen des Minuszeichens von O_3 in Gl. 2 die Vorzeichen um. In Fig. 150c ist $a_1 d_1 = x_3 : h_3$ und $a_1 e_1 n_1 c_1 b_1$ Einflußlinie von O_3.

3. Einflußlinie der Strebenkräfte.

Das allgemeine Verfahren zur Entwicklung der Einflußlinien für die Strebenkräfte soll hier an derjenigen für die Strebenkraft D_2 erläutert werden. Der maßgebende Momentendrehpunkt im Sinne der Ritter'schen Momentenmethode L liegt hier zwischen den Stützloten. Ohne die Wirkung des Horizontalschubes H würde man die Einflußlinie für D_2 in ähnlicher Weise erhalten, wie auf S. 210 Fig. 97 für die Wandscherkraft Y und auf S. 258 Fig. 123 für die Strebenkraft D.

Eine Last 1 im Abstande u von B erzeugt in A den Stützdruck $\frac{u}{l}$. Denken wir uns D_2 im Knoten 1 in eine lot- und eine wagerechte Seitenkraft zerlegt, deren erstere gleich $D_2 \sin \delta_2$ ist, so erhalten wir in Bezug auf L die Momentengleichung

$$\frac{u}{l} \cdot w - D_2 \sin \delta_2 (w - x_1) = 0 \text{ und daraus } D_2 = + \frac{u}{l} \cdot \frac{w}{\sin \delta_2 (w - x_1)}.$$

Das ist die Gleichung der Einflufslinie von D_2 für den einfachen Fachwerkbalken, gültig für die Strecke von B bis zum Knoten 2, in Fig. 150 d ausgedrückt durch die Gerade $b_2 e_2$. Sie schneidet in ihrer Richtung auf dem Stützlot durch A für $u = l$ die Strecke $a_2 d_2 = \frac{w}{\sin \delta_2 (w - x_1)} = \frac{a}{h_1 \sin \delta_2}$ ab, d. i., wie man leicht erkennt, die Kraft D_2', welche eine Stützkraft $A = 1$ für sich allein in der Strebe D_2 erzeugen würde. In gleicher Weise erhält man für die Strecke links vom Knoten 1 $a_2 f$ als Einflufslinie von D_2. Diese schneidet in ihrer Richtung ebenso auf dem Stützlot durch B die Kraft $D_2'' = b_2 g_2$ ab, welche eine Stützkraft $B = 1$ in der Strebe D_2 hervorbringen würde. Zwischen den Knoten 1 und 2 schliefst die Strecke $f e_2$ die Einflufslinie $a_2 f e_2 b_2$ der Strebenkraft D_2 für den einfachen Fachwerkbalken, wobei e_2 und f in den Knotenlotrechten durch 1 und 2 liegen. Die Geraden $a_2 g_2$ und $b_2 d_2$ schneiden sich wieder in einem Punkte L' lotrecht unter L, so dafs nur die Bestimmung des Punktes d_2 zur Ermittelung des Linienzuges $a_2 f e_2 b_2$ erforderlich ist, die Bestimmung der Strecke $b_2 g_2$ als Kontrolle dienen kann.

Die Strecke $a_2 d_2$ als Strebenkraft D_2' für $A = 1$ bestimmt sich nach Culmann leicht wie folgt: Wir bringen $\overline{1\,2'}$ (Fig. 150 a) in h zum Schnitt mit dem Stützlot in A, machen in Fig. 150 d $\overline{a_2 i}$ gleich der Krafteinheit, ziehen $a_2 k_2 \parallel \overline{1\,2'}$, $i k_2 \parallel L h$ und machen $a_2 d_2 = a_2 k_2$. Ebenso könnte zur Kontrolle g_2 festgelegt werden.

Es bleibt noch der ersichtlich negative Einflufs des Horizontalschubes H auf D_2 hinzuzufügen. Dieser kann aus der H-Linie, die genau wie für den vollwandigen Dreigelenkbogenträger S. 78 Fig. 40 b zu zeichnen ist, gewonnen werden, indem man den Abschnitt $l : 2f$ als in A angreifende Horizontalkraft ansieht und dafür die Stabkraft D_2''' bestimmt. Wir machen in Fig. 150 d $\overline{a_2 l} = l : 2f$, bringen in Fig. 150 a $\overline{1\,2'}$ in m zum Schnitt mit der Kämpferlinie $A B$, ziehen in der Fig. 150 d durch l eine Parallele zu $L m$ bis zum Schnitt r mit der Richtung $k_2 a_2 \parallel D_2$ und machen $a_2 s = a_2 r$. Verbindet man nun s mit b_2 und den Schnitt c_2 dieser Geraden mit dem Scheitellot mit a_2, so stellt das Dreieck $a_2 c_2 b_2$ den negativen Einflufs des Horizontalschubes und der Unterschied zwischen diesem und der positiven Einflufsfläche $a_2 f e_2 b_2$, d. h. die Fläche $a_2 f u e_2 n_2 b_2 c_2$ die wirkliche Einflufsfläche für die Strebenkraft

D_2 dar. Eine weitere Kontrolle derselben ergibt sich noch daraus, dafs der Einflufsnullpunkt (Belastungsscheide) n_2 (Fig. 150*d*) lotrecht unter N_2 (Fig. 150*a*) liegen mufs. Verbindet man nämlich den Kämpferpunkt A mit L, so ist der Schnittpunkt N_2 dieser Verbindungsgeraden mit der Kämpferdrucklinie BCA_1 für das Moment der äufseren Kräfte in Bezug auf L und somit auch für die Strebenkraft D_2 eine Belastungsscheide.

In Fig. 150*e* ist die Einflufsfläche für D_2 zur besseren Übersichtlichkeit an eine wagerechte Grundlinie $a_2'b_2'$ verschoben. Diese Einflufsfigur kann in sehr einfacher Weise lediglich mit Hülfe der zuvor ermittelten Strebenkraft D_2^1 gezeichnet werden, indem man $a_2'd_2' = D_2^1$ macht, n_2' lotrecht unter N_2 auf der Geraden $a_2'b_2'$ festlegt, von d_2' über n_2' die Gerade $d_2'n_2'c_2'$ zieht, c_2' mit b_2' verbindet, L'' lotrecht unter L auf der Geraden $d_2'c_2'$ festlegt, a_2' mit L'' verbindet und endlich e_2' und f' lotrecht unter 2 und 1 auf den Geraden $d_2'c_2$ und $a_2'L''$ bestimmt. Die vorbezeichneten Kontrollbestimmungen lassen sich auch bei dieser Form der Einflufsfläche leicht ausführen. Z. B. mufs $d_2's' = a_2r = a_2s$ gleich der Stabkraft D_2''' sein, welche eine in A angreifende Horizontalkraft $H = l : 2f$ in der Strebe D_2 erzeugt.

In genau gleicher Weise können für alle andern Strebenkräfte die Einflufsflächen bestimmt werden. Die Gröfsenverhältnisse der positiven und negativen Teile der Einflufsfläche sind verschieden für die einzelnen Streben, und bei gewissen Mafsverhältnissen des Trägers können Einflufsgebiete für die einzelnen Strebenkräfte ihr Vorzeichen wechseln. Rückt z. B. bei flach gespannten Bögen der Drehpunkt L für einzelne Streben soweit nach links, dafs die Gerade AL die Kämpferdrucklinie BCA_1 in einem Punkte N rechts von C schneidet, so rückt auch in Fig. 150*e* n_2' rechts vom Scheitellot und c_2' kommt über $a_2'b_2'$ zu liegen; an Stelle des negativen Dreiecks $n_2'b_2'c_2'$ tritt positiver Einflufs, n_2' verliert die Bedeutung eines Einflufsnullpunktes.

4. Einflufslinie der Ständerkräfte.

Es soll die Einflufslinie für die Ständerkraft V_2 bestimmt werden.

Das Verfahren ist grundsätzlich das gleiche, wie bei den Strebenkräften. Momenten-Drehpunkt für V_2 ist L_1; Belastungsscheide ist N_3. Die Stabkraft V_2', welche eine Stützkraft $A = 1$ im Ständer $\overline{2\,2'}$ erzeugt, erhält man leicht, wenn man $\overline{2\,2''}$ (Fig. 150*a*)

gleich der Krafteinheit macht und von L_1 aus über $2''$ eine Gerade bis zum Schnitt $0''$ mit dem Stützlot durch A zieht, in der Strecke $\overline{00''}$ als Druckkraft. Macht man in Fig. 150 *f* $a_3 d_3 = 00'' = V_2'$, bestimmt n_3 auf $a_3 b_3$ lotrecht unter N_3, zieht von d_3 über n_3 eine Gerade bis zum Schnitt c_3 mit dem Scheitellot, verbindet c_3 mit b_3, legt L_1' auf der Richtung $d_3 c_3$ lotrecht unter L_1 fest, verbindet L_1' mit a_3 und bestimmt endlich e_3 und f_3 auf den Geraden $\overline{d_3 n_3}$ und $\overline{a_3 L_1'}$ lotrecht unter den Knoten 2 und 1, so ist $a_3 f_3 e_3 n_3 c_3 b_3$ Einflußlinie von V_2.

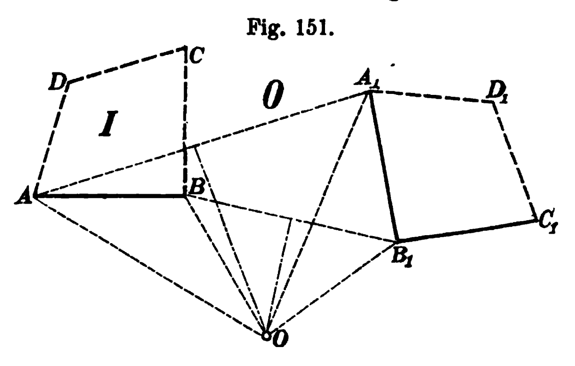
Nachdem die Einflußlinien für alle Stabkräfte gezeichnet sind, können letztere selbst, bezw. ihre Größtwerte in bekannter Weise für alle möglichen Belastungen ermittelt werden.

V. Grundzüge einer Kinematik des Fachwerks.

a) Einige Grundbegriffe der Kinematik.

Jede Bewegung einer beliebig umgrenzten oder unbegrenzten ebenen Scheibe I (Fig. 151) gegen eine mit ihrer Ebene zusammenfallende ruhende Ebene O kann in ihrem Endergebnis stets durch eine Drehbewegung um einen ruhenden Punkt ersetzt werden. Gelangt nämlich bei einer derart beliebigen Bewegung der Punkt A nach A_1, B nach B_1 und errichtet man auf den Mitten der beiden Verbindungsgeraden AA_1 und BB_1 je ein Lot, welche beiden Lote sich im Punkte O schneiden, so sind die durch Verbindung der Punkte A, A_1, B und B_1 mit dem Punkte O entstehenden Dreiecke AOB und A_1OB_1 wegen Gleichheit dreier Seiten gleichartig kongruent, also $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A_1OB_1$ und daher auch $\sphericalangle AOA_1 = \sphericalangle BOB_1$. Daraus erkennt man, daß sowohl das Dreieck AOB als die Scheibe I lediglich durch Drehung um den Punkt O aus ihrer Anfangslage in die Lage A_1OB_1, bezw.

Fig. 151.



$A_1 B_1 C_1 D_1$ gebracht werden können. Die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 usw. sind dabei Sehnen der Bahnlinien der Punkte A, B, C usw. Setzen wir eine unendlich kleine Bewegung voraus, so decken sich für jeden Punkt Sehne und Bahnelement und die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 usw. drücken daher in solchem Falle die Bewegungsrichtungen der Punkte A, B, C usw. im Augenblicke der unendlich kleinen Bewegung aus. Der Punkt O ist dann gemeinsamer Krümmungsmittelpunkt der Bahnlinien aller Punkte der Scheibe im gegebenen Augenblicke. Hieraus folgt: „Jede Bewegung einer Scheibe in ihrer Ebene kann in irgend einem Augenblicke und während eines unendlich kleinen Zeitteilchens als Drehbewegung um einen festen Punkt angesehen werden, den man den **„augenblicklichen Pol“** der Scheibe nennt.“ Dieser augenblickliche Drehpunkt ist der einzige momentan ruhende Punkt der Scheibe, der einzige Punkt, den ihre Ebene mit der ruhend gedachten Ebene O während eines Augenblickes gemeinsam hat. Die Lage des Poles ist bestimmt, wenn die augenblicklichen Bewegungsrichtungen zweier Punkte der Scheibe festliegen. Man findet ihn im Schnittpunkte der in jenen beiden Punkten zu ihren Bewegungsrichtungen errichteten Lote. (Fig. 152.)

Fig. 152.

Werden z. B. zwei Punkte (12) und (13) einer Scheibe I durch Gelenkscheiben II und III (Fig. 153) mit den Punkten 02 und 03 einer ruhenden Scheibe O so verbunden, dafs die Ebenen aller vier Scheiben zusammenfallen und nur gegeneinander verschieblich bleiben, so entsteht ein in sich bewegliches Gelenkstangen-Viereck (02)(12)(13)(03) und die allein mögliche Bewegung der Punkte 12 und 13 auf Kreisbögen um 02 und 03 sind senkrecht zu den Geraden

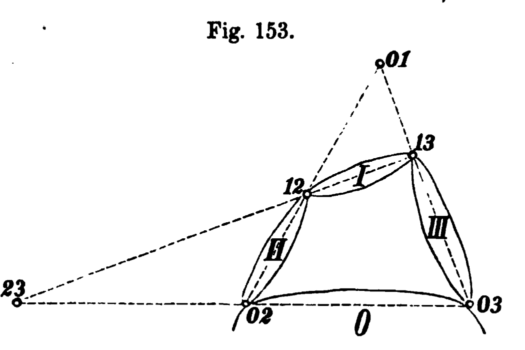


Fig. 153.

(02) (12), bezw. (03) (13) gerichtet; der Schnittpunkt 01 beider Geraden ist also augenblicklicher Pol der Scheibe *I*, momentan gemeinsamer Punkt der ruhend gedachten Scheibe *O* und der gegen sie verschieblichen Ebene der Scheibe *I*.

Bewegt sich die Scheibe *O* gleichfalls, d. h. kommt neben der Bewegung der Glieder *I*, *II* und *III* gegen *O* auch noch eine Bewegung des ganzen Vierecks in seiner Ebene in Betracht, so hört mit der Ruhe der Scheibe *O* auch die momentane Ruhe des augenblicklichen Drehpoles 01 der Scheibe *I* in absolutem Sinne auf, er bleibt aber momentan gemeinsamer Punkt der gegeneinander verschieblichen Ebenen beider Scheiben, d. h. Drehpunkt für ihre gegenseitige Bewegung.

In dem beweglich gedachten Gesamtgebilde (Fig. 153) kommt der Scheibe *O* keinerlei besondere Bedeutung mehr zu und in diesem Sinne wollen wir den Punkt 01 als augenblicklichen Drehpol der Scheiben *O* und *I* gegeneinander bezeichnen. Wie diese beiden Scheiben, so hat aber auch jedes andere Scheibenpaar des Gelenkstab-Vierecks einen gegenseitigen augenblicklichen Drehpol. Wir erkennen im Schnitt der Geraden (12) (13) und (02) (03) den augenblicklichen Drehpol der Scheiben *II* und *III* und in den Gelenkpunkten (02), (12), (13) und (03) die gegenseitigen Pole der Gliederpaare *O II*, *I II*, *I III* und *O III*, wobei zu bemerken ist, daſs letztere vier Punkte dauernde Pole der in ihnen wirklich drehbar verbundenen Scheibenpaare, die Punkte 01 und 23 aber nur als momentane Pole der Scheibenpaare *O I* und *II III* sind, die wir uns in den Punkten vorübergehend drehbar verbunden zu denken haben.

In dem hier beispielsweise besprochenen Gelenkstangen- oder Gelenkscheiben-Viereck können die einzelnen Scheiben nur ganz bestimmte, d. h. „zwangläufige“ Bewegungen gegeneinander ausführen. Ist allgemein die Bewegung mehrerer Scheiben gegeneinander in einer gemeinsamen Ebene so geregelt, daſs jeder Punkt der einen Scheibe gegen die anderen nur eine bestimmte Bahnlinie verfolgen kann, so nennt man die Bewegung der Scheiben gegeneinander „eine zwangläufige“ und das ganze Gebilde eine „zwangläufige kinematische Kette“ oder auch kurz „zwangläufige Kette“. Die einzelnen Scheiben heiſsen die Glieder der Kette. Auf die Form der Scheiben, die als Glieder zu einer zwangläufigen Kette verbunden sind, kommt es dabei nicht an; nur wird

eine solche Verbindung vorausgesetzt, daſs sowohl alle wirklichen Gelenkpunkte der Glieder, als die nur momentan gemeinsamen Punkte ihrer Ebenen, d. h. die gegenseitigen Pole aller Glieder, in einer Ebene liegen. Die Scheiben (Fig. 153) können wir also z. B. auch durch Gelenkstäbe ersetzen, mit deren jedem wir uns eine unbegrenzte Ebene, mit allen darin liegenden Punkten, Linien usw. („Ebenes System“) fest verbunden denken; derart, daſs zwar die Ebenen aller Glieder zusammenfallen, aber mit den Gliedern gegenseitig verschieblich bleiben.

Die augenblicklichen Pole der Glieder einer zwangläufigen Kette gegeneinander sind ersichtlich gleichzeitig auch Krümmungsmittelpunkte der Bahnlinien aller Punkte eines Gliedes in seiner Bewegung gegen ein mit ihm durch den betreffenden Pol momentan drehbar verbundenes anderes Glied. Liegt der augenblickliche Pol zweier Glieder einer Kette in unendlicher Ferne, so können die im Endlichen liegenden Punkte beider Scheiben nur Parallelbewegungen gegeneinander ausführen.

Die Anzahl der augenblicklichen Pole einer zwangläufigen Kette von n Gliedern ist $\frac{n(n-1)}{2}$, denn jedes Glied hat einen Pol gegen jedes der übrigen $n-1$ Glieder, wobei je ein Pol zwei Gliedern gemeinsam ist.

Die Gesamtheit aller Pole einer zwangläufigen Kette in ihrer jeweiligen Lage gegeneinander wollen wir als augenblickliche „Polfigur“ der Kette bezeichnen.

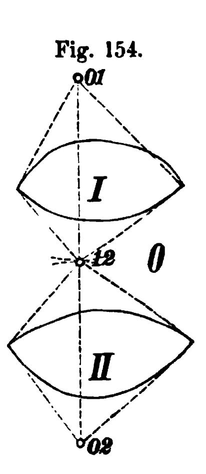
Nach vorstehendem haben die Pole aller Gliederpaare einer Kette eine völlig gleichartige Bedeutung. Für die Anwendung aber ist der besondere Fall wichtig, wo eines der Glieder festgehalten zur Ruhe gezwungen ist, die anderen dagegen beweglich bleiben. In diesem Falle werden die Pole aller Glieder gegen das ruhende zu momentan ruhenden Punkten, während alle übrigen Pole sich im allgemeinen mit bewegen und nur relativ zwischen den einzelnen Gliedern momentan ruhen. In solchem Falle wollen wir die ruhenden Pole als „Hauptpole“, alle übrigen aber als Zwischenpole benennen. Gegebenenfalls ruhende, nur ausnahmsweise bewegliche Glieder wollen wir mit O bezeichnen und den Polen der übrigen Glieder gegen das ruhende den Index O voransetzen. Es soll also z. B. bezeichnen 05 den augenblicklich ruhenden Pol (Hauptpol) des Gliedes V.

b) Beziehung der Pole einer zwangläufigen Kette in ihrer Lage gegeneinander; „Sätze der drei Pole".*)

Aus der Fig. 153 ersehen wir, daſs je drei Pole dreier Glieder des als zwangläufige Kette anzusehenden Gelenkstab-Vierecks gegeneinander auf einer Geraden liegen. Z. B. die Pole der Glieder *O*, *I* und *II* auf der Geraden (01)(12)(02), die der Glieder *I*, *II* und *III* auf der Geraden (13)(12)(23) usw. Diese hier im Sonderfalle festgestellte Beziehung zwischen den Polen einer Kette hat allgemeine Gültigkeit, wie folgende Betrachtung ergibt.

Wir verfolgen eine sehr kleine Bewegung (Differenzialbewegung) dreier beliebiger Glieder *O*, *I* und *II* irgend einer zwangläufigen Kette gegeneinander (Fig. 154). Die augenblicklichen Pole der Glieder *I* und *II* gegen die Scheibe *O* seien (01) und (02) und um diese Punkte mögen die Glieder *I* und *II* im gegebenen Augenblicke gegen *O* eine unendlich kleine Drehbewegung ausführen. Wir suchen den Punkt (12), um den sich *I* und *II* im gleichen Augenblicke gegenseitig drehen, ihren Pol. In diesem muſs ein Punktpaar beider Scheiben während ihrer kleinen Drehbewegung um (01) und (02) zusammenfallen, d. h. nach Richtung und Gröſse die gleiche Bewegung gegen *O* ausführen. Gleiche Bewegungsrichtung haben ersichtlich nur die momentan auf der Verbindungsgeraden (01)(02 beider Drehpole liegenden Punkte beider Scheiben. Auf dieser Geraden muſs also auch der Pol 12 der Glieder *I* und *II* liegen, und wir erhalten allgemein den Satz: „**Die drei gegenseitigen Pole dreier beliebiger Glieder irgend einer zwangläufigen Kette liegen auf einer Geraden.**" Diese Beziehung soll hinfort als „**erster Satz der drei Pole**" bezeichnet werden. Er führt, wenn die Lagen zweier Pole bekannt sind, zu einem geometrischen Orte für den dritten. Die Lage des

Fig. 154.

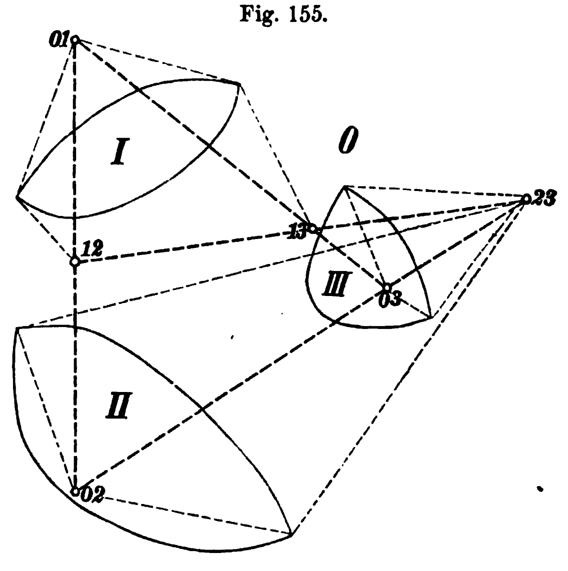


*) Vergl. Schütz: Beiträge zur Bewegungslehre der ebenen, statisch bestimmten Fachwerksträger. Zeitschr. für Architektur und Ingenieurwesen, 1906, S. 153.

letzteren auf jener Geraden hängt von der Art der Verbindung der Scheiben I und II ab und befindet sich da, wo ein Punktpaar beider im betrachteten Augenblicke neben gleicher Bewegungsrichtung auch gleiche Wegeslänge ds aufweist. Diese Eigenschaft kommt nur einem Punktpaar 12 der Geraden zu; in ihm rollen beide Scheiben gewissermaßen aufeinander.

Bringen wir noch eine Scheibe III mit den Gliedern O, I und II in Beziehung (Fig. 155), deren Pol gegen O in 03 liege, so muß sich nach obigem Satze der Pol 13 der Scheiben I und III auf der Geraden (01) (03) und der Pol (23) der Glieder II und III gleichzeitig auf den Geraden (01)(03) und (12)(13), also im Schnittpunkte beider befinden.

Fig. 155.



Zwischen den Abständen der Pole voneinander innerhalb der Polfigur besteht nun eine für die Polbestimmung unter Umständen nützliche analytische Beziehung, zu der man wie folgt gelangt:

In einem Zeitteilchen dt der zwangläufigen Bewegung führen die Scheiben I, II und III um ihre Pole 01, 02 und 03 gegen O Drehungen $d\varphi_I$, $d\varphi_{II}$ und $d\varphi_{III}$ aus. Der Weg des Punktes 12 berechnet sich dann aus seiner Drehung um 01 zu $ds = d\varphi_I \cdot (01)(12)$ und aus seiner Drehung um 02 zu $ds = d\varphi_{II} \cdot (02)(12)$. Aus der Gleichsetzung beider Werte folgt

$$1) \qquad \frac{d\varphi_I}{d\varphi_{II}} = \frac{(02)(12)}{(01)(12)}.$$

Ebenso erhält man für die Bewegung der Pole 2 3 und 3 1 gegen *O*

$$\text{2)} \qquad \frac{d\varphi_{II}}{d\varphi_{III}} = \frac{(0\,3)(2\,3)}{(0\,2)(2\,3)} \quad \text{und}$$

$$\text{3)} \qquad \frac{d\varphi_{III}}{d\varphi_{I}} = \frac{(0\,1)(1\,3)}{(0\,3)(1\,3)}.$$

Die Multiplikation der Gleichungen 1 bis 3 ergibt endlich

$$\text{4)} \qquad \frac{(0\,2)(1\,2)\cdot(0\,1)(1\,3)\cdot(0\,3)(2\,3)}{(0\,1)(1\,2)\cdot(0\,2)(2\,3)\cdot(0\,3)(1\,3)} = 1.^{*)}$$

Mit Hülfe der Gl. 4 kann, wenn 5 von den 6 Strecken im Zähler und Nenner bekannt sind, die sechste berechnet, also die Lage eines Poles auf der Verbindungsgeraden zweier anderer bestimmt, bezw. die etwa zeichnerisch schon bestimmte Lage durch Rechnung kontrolliert werden.

Gleichung 4 gilt für alle innerhalb der zwangläufigen Kette möglichen kleinen Bewegungen von vier Scheiben gegeneinander.

Sieht man die Scheibe *O* wieder als ruhend an, so sind die Pole 0 1, 0 2 und 0 3 Hauptpole und die Pole 1 2, 2 3 und 3 1 Zwischenpole.

Mit dieser Unterscheidung kann man den Quotienten der Gl. 4 der Polfigur ohne weiteres wie folgt entnehmen: Man bildet, indem man die Polfigur von links nach rechts umfährt, das Produkt der Strecken „Hauptpol bis Zwischenpol" und ebenso, indem man die Figur im entgegengesetzten Sinne umfährt und dividiert, beide Produkte durcheinander. Ähnliche Beziehungen lassen sich auch für die Polfigur einer gröfseren Anzahl von Gliedern einer Kette ableiten.

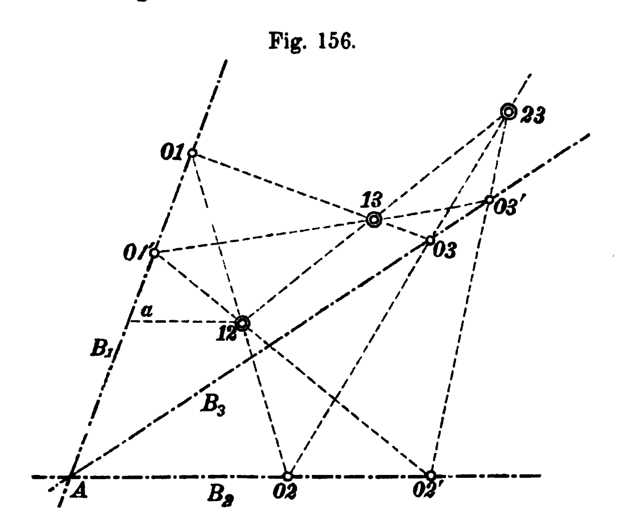
Wir wollen hier noch eine weitere wichtige Beziehung in der Lage der Pole einer zwangläufigen Kette gegeneinander nachweisen. Aus der Entstehung der in Fig. 155 dargestellten Polfigur für vier Glieder irgend einer zwangläufigen Kette erkennt man, dafs, wenn beliebige 5 von den 6 Polen der 4 Glieder ihrer Lage nach bestimmt sind, auch der sechste Pol festliegt. So kann man z. B., wenn die Pole 0 1, 1 2, 0 2, 1 3 und 2 3 festliegen, den Pol 0 3 im Schnitt der Richtungen (0 1)(1 3) und (0 2)(2 3) erhalten.

---

*) In der Geometrie ist diese Beziehung als Satz des Menelaus bekannt. Vergl. u. a. Ganter und Rudio, Elemente der analytischen Geometrie, I. Teil 3. Aufl. S. 62.

Denken wir uns nun in der Polfigur (0 1) (1 2) (0 2) (2 3) (0 3) (1 3) (Fig. 156) die Pole (1 2), (1 3) und (2 3) in der Ebene der Kette festgehalten und legen den Polen 0 1 und 0 2 verschiedene mögliche

Fig. 156.



Lagen bei, so nämlich, daſs die Richtung (0 1) (0 2) stets durch (1 2) geht, so entspricht jeder Lage der Pole (0 1) und (0 2) auch eine bestimmte Lage des Poles (0 3), diese steht also in funktionaler Abhängigkeit von der Lage der Pole 0 1 und 0 2. Es wird sich nun zeigen, daſs, wenn man die Punkte 0 1 und 0 2 je auf einer Geraden B_1 und B_2 sich bewegen läſst, welche beide sich in einem Punkte A schneiden, auch der Pol 0 3 sich auf einer Geraden bewegt, die durch A geht. Sieht man nämlich die Punkte (1 2), (2 3) und (0 2) der Polfigur (0 1) (1 2) (0 2) (0 3) (2 3) (1 3) als Hauptpole (mit dem Gliede *II* der Kette als momentan festliegend) an, so ist, wie oben nachgewiesen,

$$5) \qquad \frac{(0\,2)(0\,1)\cdot(1\,2)(1\,3)\cdot(2\,3)(0\,3)}{(0\,2)(0\,3)\cdot(2\,3)(1\,3)\cdot(1\,2)(0\,1)}=1\,.$$

Ersetzt man jetzt 0 1 durch 0 1′ und 0 2 durch 0 2′, so nimmt 0 3 die Lage 0 3′ ein, welche bestimmt ist durch die Richtungen (0 1′) (1 3) und (0 2′) (2 3), und in der Polfigur (0 1′) (1 2) (0 2′) (0 3′) (2 3) (1 3) ist nun

$$6) \qquad \frac{(0\,2')(0\,1')\cdot(1\,2)(1\,3)\cdot(2\,3)(0\,3')}{(0\,2')(0\,3')\cdot(2\,3)(1\,3)\cdot(1\,2)(0\,1')}=1\,.$$

Zieht man $a(1\,2) \parallel B_2$, so erhält man noch aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $a(0\,1)(1\,2)$ und $A(0\,1)(0\,2)$, sowie $a(0\,1')(1\,2)$ und $A(0\,1')(0\,2')$

$$7) \qquad \frac{(0\,1)(0\,2)}{(0\,1)(1\,2)} = \frac{(0\,2)A}{(1\,2)a} \quad \text{und}$$

$$8) \qquad \frac{(0\,1')(0\,2')}{(0\,1')(1\,2)} = \frac{(0\,2')A}{(1\,2)a}.$$

Aus den Gl. 5—8 folgt endlich

$$9) \qquad \frac{(0\,2')(A)\cdot(0\,2)(0\,3)\cdot(2\,3)(0\,3')}{(0\,2')(0\,3')\cdot(2\,3)(0\,3)\cdot(0\,2)A} = 1.$$

Nach Gl. 9 kann der Punkt A in seiner Lage gegen die Punkte $(0\,2)$, $(0\,2')$, $(0\,3)$, $(0\,3')$ und $(2\,3)$ als „Zwischenpol" in der Polfigur $A\ (0\,2)(0\,3)(2\,3)(0\,3')(0\,2')$ mit $(0\,2)$, $(0\,2')$ und $2\,3$ als Hauptpolen angesehen werden und die Punkte A, $(0\,3)$ und $(0\,3')$ müssen daher auf einer Geraden B_3 liegen. Die Pole $(0\,1)$, $(0\,2)$ und $(0\,3)$ erscheinen in ihrer Bewegung auf den Geraden B_1, B_2 und B_3 gewissermafsen zwangläufig verbunden. Wird einer der drei Punkte auf seiner Bahn („Polbahn") festgehalten, bezw. durch irgend eine Bedingung festgelegt, so müssen auch die beiden andern eine bestimmte Lage einnehmen. Der hier nachgewiesene „zweite Satz der drei Pole" kann wie folgt ausgesprochen werden: „Bewegen sich in der sonst momentan festliegenden Polfigur einer zwangläufigen Kette von den Polen dreier Glieder (*I*, *II* und *III*) gegen irgend ein viertes Glied (*O*) zwei je auf einer Geraden, so beschreibt auch der dritte Pol eine Gerade, welche sich mit den beiden erstgenannten in einem Punkte schneidet".*)

Mit Hülfe der hier nachgewiesenen Beziehungen zwischen den Polen der Glieder einer zwangläufigen Kette in ihrer Lage gegeneinander lassen sich vielfach die Pole selbst bestimmen.

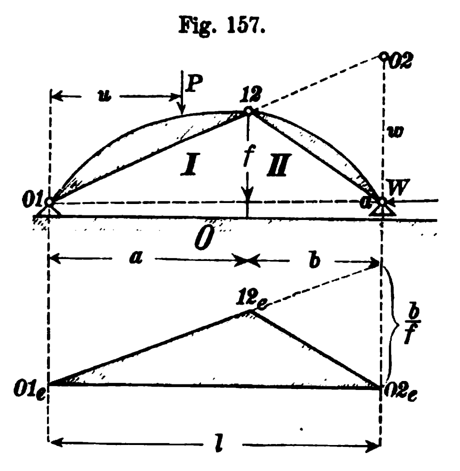
c) Bestimmung der Pole einiger zwangläufiger Ketten.

1. Es handle sich zunächst um eine dreigliedrige Kette *O I II* (Fig. 157). Die Gliederpaare *O I* und *I II* sind in den Punkten $(0\,1)$ und $(1\,2)$ gelenkartig verbunden, ihre Pole gegeneinander

*) Ein geometrischer Beweis dieses Satzes findet sich u. a. in Reye, Geometrie der Lage, I. 4. Aufl. S. 65.

liegen daher in diesen Gelenkpunkten. Das Glied *II* ist mit dem Glied *O* bei *a* in der Richtung *a* (0 1) verschieblich verbunden; der Pol (0 2) mufs daher im Schnitt der Geraden (0 1) (1 2) und eines in *a* gegen *a* (0 1) errichteten Lotes liegen.

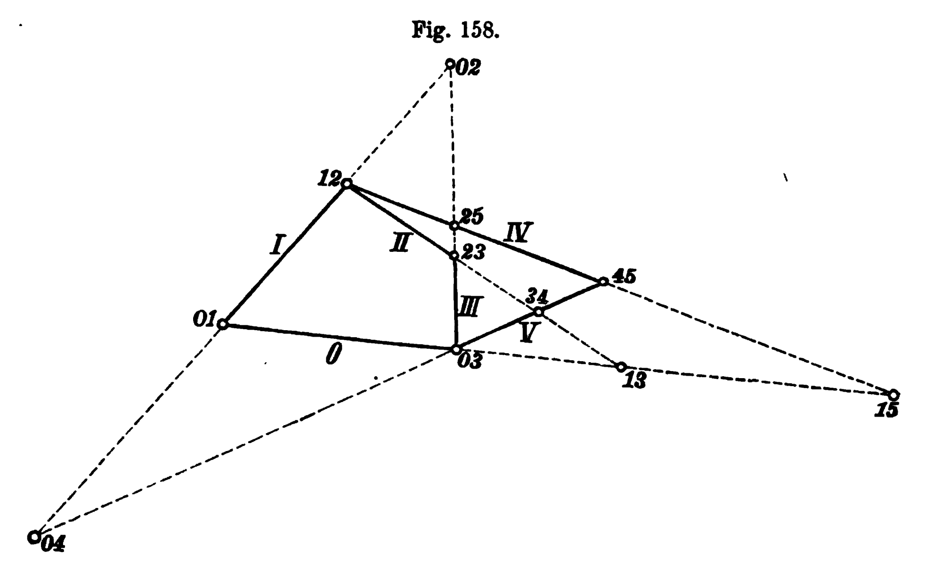
Fig. 157.



2. Die Bestimmung der 6 Pole eines als viergliedrige Kette anzusehenden Gelenkstangen-Vierecks ist aus Fig. 153 ersichtlich.

3. Die sechsgliedrige Kette *O I II III IV V* (Fig. 158) kann man als aus drei Gelenkvierecken (0 1) (1 2) (2 3) (0 3), (0 1) (1 2) (4 5) (0 3) und (1 2) (2 3) (0 3) (4 5) bestehend ansehen, welche je zwei Glieder gemeinsam haben. Die gegenseitigen drei Pole der Glieder

Fig. 158.

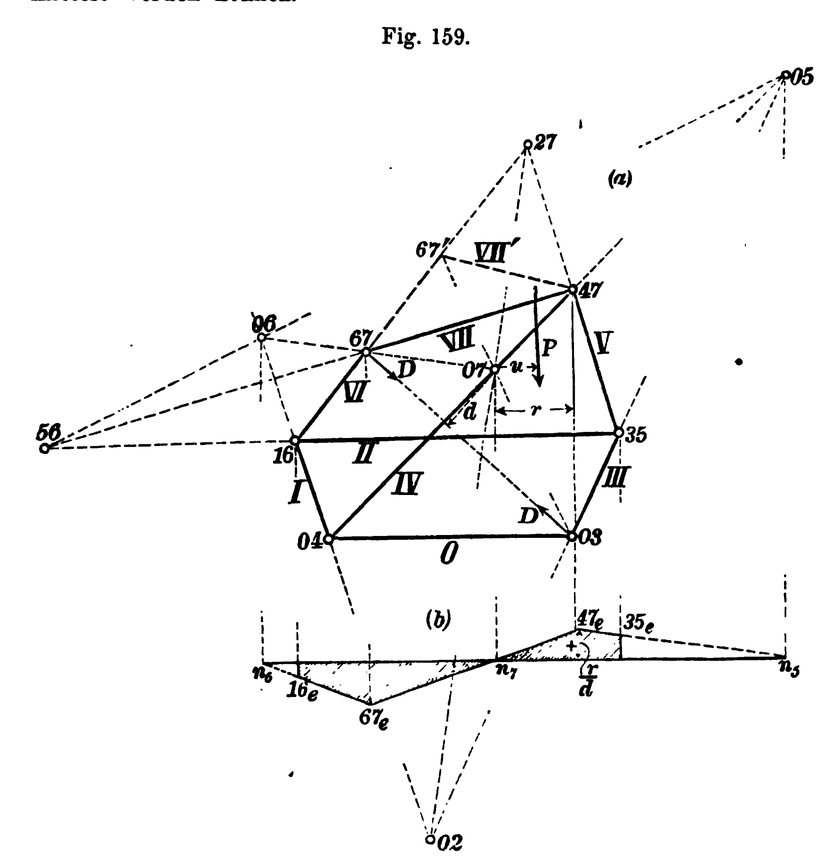


I, *II* und *IV* fallen in dem gemeinsamen Gelenkpunkte 1 2, die der Glieder *O*, *III* und *V* in 0 3 zusammen, während die Pole der Gliederpaare *II III* und *IV V* in den Gelenkpunkten 2 3 und 4 5

liegen und also im ganzen 9 Pole in den Gelenkpunkten der Glieder sich befinden. Die übrigen 6 von den $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ Polen finden sich in den Schnittpunkten 02, 13, 04, 15, 25 und 34 der gegenüberliegenden Seitenpaare der drei Vierecke.

4. In der achtgliedrigen Kette (Fig. 159) wollen wir nur die Pole der Glieder *O*, *VI* und *VII* gegeneinander bestimmen, weil im übrigen die Glieder alle paarweise in Gelenkvierecken vorkommen, ihre gegenseitigen Pole also in der bekannten einfachen Weise ermittelt werden können.

Fig. 159.



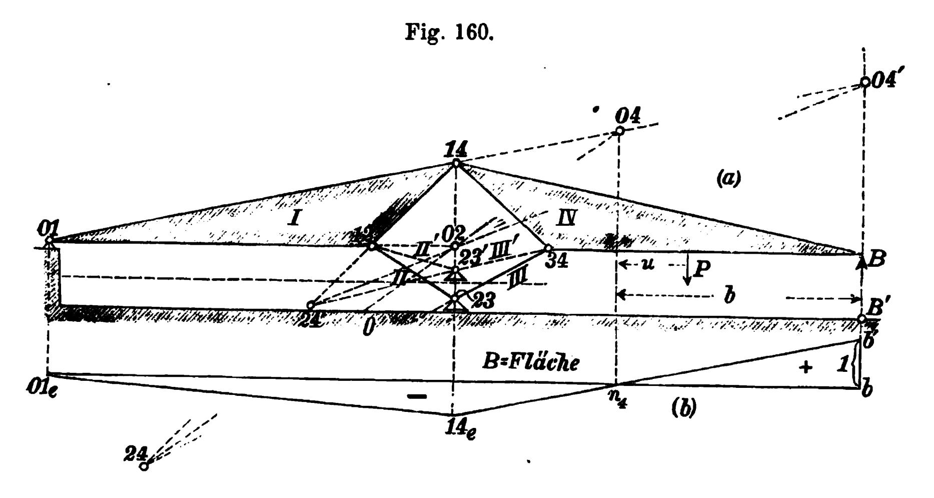
Die Pole der Gliederpaare *O II* und *II VII* finden sich bekanntermaßen in 0 2 und 2 7; der Pol 0 7 des Gliederpaares *O VII* muß somit nach dem ersten Satz der drei Pole auf der Verbindungs-

geraden (0 2)(2 7) liegen. Ferner liegen die Pole der Gliederpaare *O IV* und *IV VII* in den Gelenkpunkten 0 4 und 4 7, also der Pol des Gliederpaares *O VII* auch auf der Geraden (0 4)(4 7). Der Pol 0 7 findet sich also im Schnitt der Geraden (0 2)(2 7) und (0 4)(4 7). Zur Auffindung desselben wurde das Gliederpaar *O VII* einmal mit dem Gliede *II* und ein anderes mal mit *IV* zu einer Gruppe vereinigt. In gleicher Weise soll der Pol der Gliederpaares *O VI* bestimmt werden, indem das Paar einmal mit dem Gliede *I* und ein anderes mal mit *V* in Beziehung gebracht wird.

Der Pol von *O* gegen *I* liegt im Punkte 0 4 und der von *VI* gegen *I* im Punkte 1 6, auf der Richtung (0 4)(1 6) muß daher der Pol *O* gegen *VI* liegen. Ferner liegt der Pol *O* gegen *V* in 05, *VI* gegen *V* in 5 6; die Richtung (0 5)(6 5) ist daher gleichfalls geometrischer Ort des Poles *O* gegen *VI*, der somit im Schnitt 0 6 der Richtungen (0 4)(1 6) und (0 5)(5 6) gefunden wird. Da 0 7 Pol von *O* gegen *VII* und 6 7 Pol von *VI* gegen *VII* ist, so geht auch die Richtung (0 7)(6 7) durch den Pol 0 6.

5. In der fünfgliedrigen Kette (Fig. 160), in welcher der Pol 2 3 des Gliederpaares *II III* wagerecht verschieblich mit dem

Fig. 160.

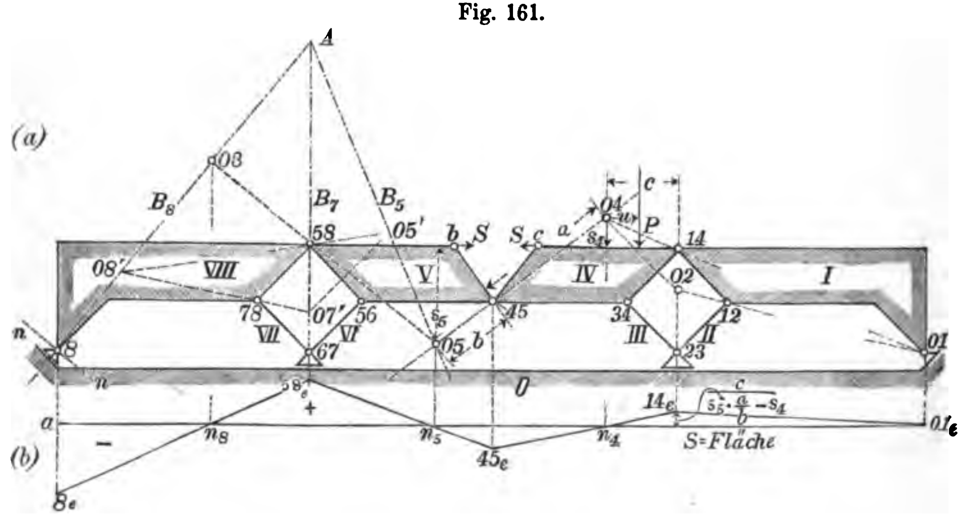


Gliede *O* verbunden und das Glied *I* in 0 1 durch ein festes Stützgelenk mit *O* verbunden ist, soll der Pol des Gliederpaares *O IV* bestimmt werden. Der Pol des Gliederpaares *O I* ist in 0 1 bekannt. Der Pol 0 2 des Gliederpaares *O II* hat einen geometrischen

Ort in der Richtung (0 1) (1 2), einen zweiten in der Lotrechten im Punkte 2 3 und liegt dadurch in 0 2 fest. Der Pol des Gliederpaares *II IV* liegt im Schnitt (2 4) der Richtungen (1 2) (1 4) und (2 3) (3 4). In der Gliedergruppe *O I IV* sind nun die Pole 0 1 und 1 4 und in der Gruppe *O II IV* die Pole 2 4 und 0 2 bekannt, im Schnitt der Richtungen (0 1) (1 4) und (0 2) (2 4) liegt daher der Pol 0 4 des Gliederpaares *O IV*. Erhält die Kette die in der Figur angedeutete veränderte Form, wobei das Gliederpaar *II III* die Lage *II' III'* annimmt und sein Pol von 2 3 nach 2 3′ rückt, so geht 2 4 in die Lage 2 4′ und 0 4 in die Lage 0 4′ über.

6. In der neungliedrigen Kette (Fig. 161) stützen sich die untereinander durch Gelenke verbundenen Glieder *I* bis *VIII* in

Fig. 161.



einem festen Stützgelenk 0 1, in zwei wagerecht verschieblichen Gelenken 2 3 und 6 7, sowie in einem der Richtung *n n* verschieblichen Gelenk 8 gegen die etwa ruhende Scheibe *O*. Die Pole der Glieder *I*, *IV*, *V* und *VIII* gegen *O* sollen bestimmt werden.

Der Pol von *I* gegen 0 ist in 0 1 gegeben.

In 0 1 und 1 2 sind daher 2 Pole der Gliedergruppe 0, *I* und *II* bekannt, der dritte 0 2 mufs daher auf der Richtung (0 1) (1 2) liegen. Da der Punkt 2 3 sich nur wagerecht bewegen kann, liegt der Pol 0 2 von *II* gegen 0 auch auf einer Lotrechten durch 2 3,

d. h. im Schnitt 0 2 der letzteren mit der Geraden (0 1)(1 2). In 0 2 und dem unendlich fernen Schnittpunkt (2 4) der parallelen Geraden (2 3)(3 4) und (1 2)(1 4) sind zwei Pole der Gliedergruppe *O*, *II* und *IV* bekannt, der dritte Pol 0 4 mufs daher auf einer zur Geraden (1 2) (1 4) Parallelen durch 0 2 liegen. Ferner sind in 0 1 und (1 4) zwei Pole der Gliedergruppe *O*, *I* und *IV* bekannt, der dritte 0 4 mufs somit auch auf der Richtung (0 1)(1 4), also im Schnitt 0 4 dieser mit der vorbezeichneten Parallelen sich befinden. Von der Gliedergruppe *O*, *IV* und *V* sind die Pole 0 4 und 4 5 bekannt; die durch beide festgelegte Richtung ist somit ein geometrischer Ort des dritten Poles 0 5. Die direkte Angabe eines zweiten geometrischen Ortes für den Pol 0 5 ist nicht ohne weiteres angängig. Wir gewinnen einen solchen indes leicht mit Hülfe des oben abgeleiteten zweiten Satzes der drei Pole, den wir auf die Pole 0 5, 0 7 und 0 8 der Glieder *V*, *VII* und *VIII* gegen 0 anwenden.

Der Pol 0 7 mufs nämlich auf einer Lotrechten B_7 durch 6 7 und der Pol 0 8 auf einer in 8 errichteten Senkrechten B_8 gegen nn liegen. Durch den Schnittpunkt A dieser beiden Polbahnen B_7 und B_8 mufs nun auch die geradlinige Bahn B_5 des Poles 0 5 gehen. Wir nehmen irgend eine Lage 0 8′ auf der Bahn B_8 an, finden dann im Schnitt der Richtung (0 8′)(7 8) mit der Bahn B_7 den zugehörigen Pol 0 7′. Der Pol (5 7) liegt in der Richtung (7 8)(5 8) ‖ (6 7)(5 6) in unendlicher Ferne, 0 5′ also auf einer Parallelen durch 0 7′ zu (7 8)(5 8), gleichzeitig liegt 0 5′ auch auf der Richtung (0 8′)(5 8), also im Schnitt 0 5′ seiner beiden geometrischen Orte. Die Gerade von A über 0 5′ ist die Polbahn B_5 und neben der vorher schon gefundenen Geraden (0 4)(4 5) der zweite geometrische Ort für den Pol 0 5. Der wirkliche Pol 0 8 liegt nun im Schnitte der Geraden (0 5)(5 8) mit B_8. Damit liegen die gesuchten 4 Pole 0 1, 0 4, 0 5 und 0 8 fest.

d) Kinematisches Merkmal für die Steifheit und statische Bestimmtheit eines Fachwerkes.

Unter Ziffer 3 der auf Seite 230 für das ebene Fachwerk gezogenen Schlüsse ist auf Grund der voraufgehenden Darlegungen ausgesprochen, dafs ein Fachwerk von $2n-3$ Stäben immer dann,

aber auch nur dann gleichzeitig statisch steif und statisch bestimmt ist, wenn jeder Stab für sich allein einen selbständigen statischen Zweck erfüllt, d. h. wenn je zwei durch einen Stab verbundene Knotenpunkte ohne diese Verbindung bei jeder etwa durch äufsere Kräfte herbeigeführten noch so kleinen gegenseitigen Bewegung auch eine solche in der Richtung des Stabes erfahren würden, durch deren Verhinderung der Stab für sich allein einen statischen Zweck erfüllt. Inwieweit jeder Stab eines Fachwerkes von $2n-3$ Stäben einen derart selbständigen Zweck erfüllt, alle Knotenpunkte desselben also bei völliger Starrheit der Stäbe gegeneinander unverschieblich festliegen, bezw. bei der tatsächlich vorhandenen Elastizität der Stäbe nur elastische Verschiebungen erfahren, das Fachwerk statisch steif ist, läfst sich mit Hülfe der oben entwickelten kinematischen Grundbegriffe und Regeln meistens sehr übersichtlich und erschöpfend beurteilen.

Nach Seite 230 geht ein „einfaches Fachwerk“ durch Beseitigung eines Stabes in ein zwangläufig bewegliches Stabgebilde über, d. h. es bildet eine zwangläufige Kette. Der augenblickliche Pol zweier Glieder der Kette gegeneinander ist nach S. 311 gleichzeitig Krümmungsmittelpunkt der Bahnlinien aller Punkte des einen Gliedes in seiner Bewegung gegen das andere. Alle im betrachteten Augenblicke auf einer durch den Pol gerichteten Geraden gelegenen Punkte beider Glieder haben daher augenblicklich gleiche Bewegungsrichtung gegeneinander und die Entfernung je zweier auf dieser Geraden liegenden Punkte beider Glieder ändert sich trotz einer kleinen Bewegung der Kette momentan nicht. Die zwangläufige Beweglichkeit beider Glieder sowie der Kette würde also auch durch eine Verbindung zweier solcher Punkte vermittelst eines Gelenkstabes momentan nicht gehindert, das durch Herstellung solcher Verbindung wieder entstehende Fachwerk von $2n-3$ Stäben würde trotz der Verbindung eine unendlich kleine Beweglichkeit behalten und daher statisch nicht steif sein.

Da ferner, wie erwähnt, die durch den Stab verbundenen Knotenpunkte auch ohne diese Verbindung momentan ihre Entfernung nicht ändern würden, vielmehr durch das übrige Stabwerk in der Richtung des Verbindungsstabes schon gegenseitig festgehalten sind, so würde die äufseren Kräften gegenüber vom Stabe zu leistende Spannkraft ersichtlich nur aus dem elastischen Ver-

halten des Stabes selbst und des ihn einschliefsenden Stabwerkes ermittelt werden können, das Fachwerk also auch statisch unbestimmt sein. Daraus ergibt sich der Satz: „Fällt in der durch Beseitigung irgend eines Stabes aus einem Fachwerke von $2n-3$ Stäben entstehenden zwangläufigen Kette der gegenseitige Pol der beiden Glieder oder starren Scheiben, denen die durch den Stab verbundenen Knotenpunkte angehören, auf die Stabachse, bezw. auf die Verbindungsgerade beider Knotenpunkte, so ist das Fachwerk weder statisch steif noch statisch bestimmt." Weiter unten wird noch allgemein nachgewiesen werden, dafs in einem solchen Fachwerk, wenn man von den Sonderfällen bedingten Angriffs der äufseren Kräfte absieht, stets auch unendlich grofse Stabkräfte auftreten. (Vergl. S. 229.)

Wir wollen mit Hülfe des hier nachgewiesenen Satzes die Steifheit und statische Bestimmtheit einiger Fachwerke untersuchen.

Zunächst stellen wir unter Bezugnahme auf Seite 226 und f. fest, dafs in der durch Verbindung der starren Scheiben *I* und *II* (Fig. 106) vermittelst der Gelenkstangen $\overline{6\,8}$ und $\overline{7\,9}$ entstehenden zwangläufigen Kette *p* der Pol beider Scheiben ist*) und ein durch diesen gerichteter Verbindungsstab eines Punktpaares beider Scheiben etwa 4 und 10 oder 3 und 15 zu einem steifen Fachwerk nicht führen kann, dafs ein solches aber durch jeden Verbindungsstab zwischen einem Punktpaar beider Scheiben entsteht, der nicht durch ihren Pol gerichtet ist, und zwar fällt die Verbindung um so steifer aus, je gröfser die lotrechte Entfernung *r* des Poles von der Achse des betr. Stabes ist.

Das Gelenkstabgebilde *O I II III IV V VI VII* (Fig. 159) hat bei 6 Knotenpunkten nur 8, d. i. $2n-4$ Stäbe und würde ersichtlich durch Einfügung noch eines Stabes zwischen den Knotenpunkten 0 3 und 1 6 oder 0 3 und 4 7 zu einem „einfachen", also steifen und statisch bestimmten Fachwerk werden, indem je ein Knoten durch zwei Stäbe unverschieblich gegen die übrigen festgelegt sein würde. Fügt man dagegen zwischen den Punkten 0 3 und 6 7 einen Stab ein, so ist das entstehende Fachwerk von

*) Wie in Fig 105 der Punkt 5 dauernd Drehpunkt der in ihm verbundenen Scheiben *I* und *II* ist, so ist in Fig. 106 *p* augenblicklich Drehpunkt der Scheiben *I* und *II*.

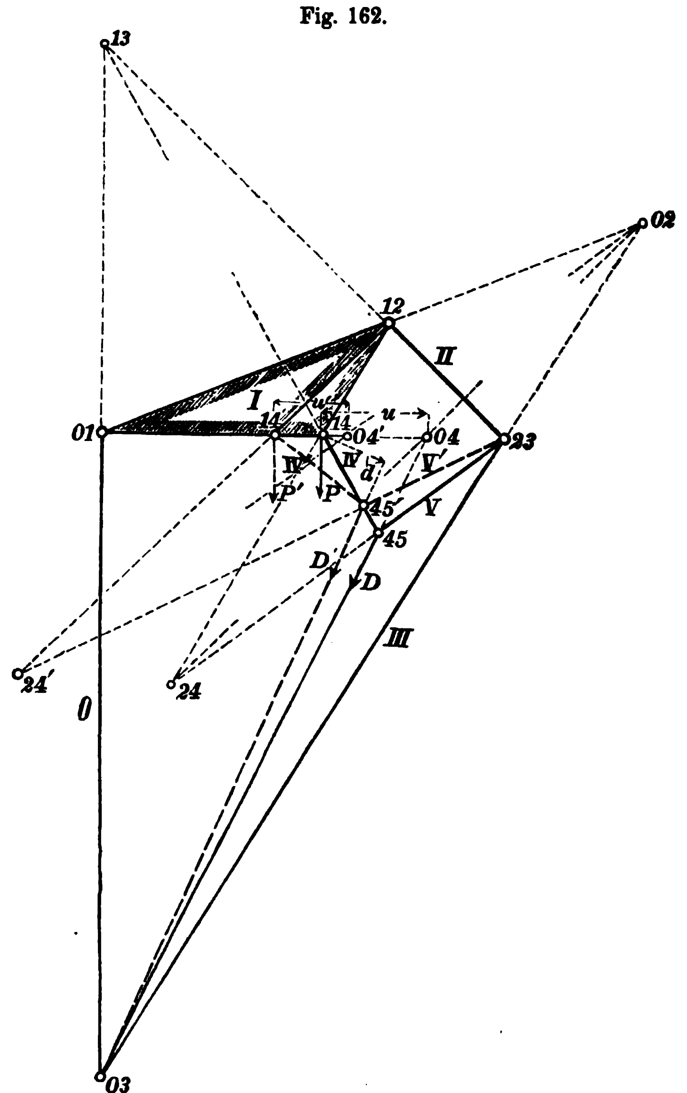
$2n-3$ Stäben kein „einfaches", sondern nach S. 231 ein „abgeleitetes". Seine Steifheit und statische Bestimmtheit erkennen wir aber leicht aus dem Umstande, dafs der Pol 0 7 zweier durch den Stab verbundener Glieder *O* und *VII* nicht auf seiner Achse liegt. Würde man dagegen eine Aenderung des Stabgebildes dahin vornehmen, dafs unter entsprechender Verlängerung des Gliedes *VI* das Glied *VII* in die Lage *VII'* überginge, wobei der Pol des Gliederpaares *O VII'* in 0 7 verbleiben würde, so erhielte der Verbindungsstab (0 3) (6 7') eine Richtung durch diesen Pol (Pascalsches Sechseck) und das entstehende Fachwerk würde nicht steif und nicht statisch bestimmt sein. Wie man leicht erkennt, würde danach auch ein regelmäfsiges oder auch nur symmetrisches Sechseck mit seinen drei Diagonalen als Fachwerk trotz der $2n-3$ Glieder statisch nicht steif sein.

Die Bahnlinie des Punktes 6 7 der zwangläufigen Kette *O I . . . . VI VII* hat in der augenblicklichen Lage des Punktes die Richtung senkrecht zu (0 7) (6 7), schneidet sich also mit einem durch 6 7 mit 0 3 als Mittelpunkt beschriebenen Kreisbogen unter einem Winkel von der Gröfse (0 3) (6 7) (0 7), so dafs der Punkt 6 7 durch beide Linien geometrisch sicher festliegt. Die Bahnlinie des Punktes 6 7' in der Kette *O I . . . . VII'* hat mit dem Kreisbogen durch 6 7' um 0 3 beschrieben im Punkte 6 7' die gleiche senkrechte Richtung gegen (0 7) (6 7'); der Punkt erscheint durch beide Linien also nicht sicher festgelegt.

Beseitigt man in dem „einfachen" Fachwerk (Fig. 103) den Stab 1 3, so erhält man in der entstehenden zwangläufigen Kette *O I II III IV V* (Fig. 162) den Pol der Glieder *O* und *IV* in bekannter Weise in 0 4. Fügt man nun statt des beseitigten Stabes den Ersatzstab (0 3) (4 5) ein, so ist dieser durch den Pol 0 4 der durch ihn verbundenen Glieder der Kette gerichtet, das entstehende Fachwerk ist also nicht steif und nicht statisch bestimmt, eine Eigenschaft, die man auch aus dem Umstande erkennt, dafs die die Scheiben (0 1) (1 4) (1 2) und (0 3) (4 5) (2 3) verbindenden drei Stäbe sich in einem Punkte (1 3) schneiden, bezw. der Stab *IV* durch den Pol 1 3 beider Scheiben geht. Bei der in der Figur angedeuteten veränderten Form rückt der Pol 0 4 nach 0 4', er liegt also nun nicht mehr auf der Richtung des Stabes (0 3) (4 5'), das Fachwerk ist daher steif und statisch bestimmt.

In Fig. 160a liegt der Pol des Gliederpaares $O\,IV$ in 04. Verbindet man beide Glieder durch einen lotrechten Gelenkstab BB', der nicht durch 04 gerichtet ist, so wird die Kette, in der wir

Fig. 162.



uns die Scheiben I und IV je als Fachwerk denken können, unverschieblich, starr. Betrachten wir die Gliedergruppe $I\,II\,III\,IV$

als Fachwerk mit 6 Knoten und $8 = 2 \cdot 6 - 4$ Stäben, so würde, wenn nur im Punkte 0 1 ein festes und in 2 3 ein verschiebliches Stützgelenk vorhanden wäre, ein Stab fehlen, das Fachwerk also nicht steif sein. Der hinzugefügte Stab BB' stellt noch ein verschiebliches Stützgelenk in B dar und ersetzt den fehlenden Stab. Die vier Stützwerte und acht Stäbe genügen zur unverschieblichen Festlegung von 6 Punkten. (Vergl. S. 230 unten.)

Würden die Glieder *II* und *III* der Kette Fig. 160*a* die Lage *II'* und *III'* erhalten, der Pol 0 4 nach 0 4' rücken, also in die Richtung des Stabes BB' fallen, so würde durch Anbringung des letzteren ein Fachwerk mit unendlich kleiner Verschieblichkeit, also kein steifes Fachwerk entstehen.

e) Bestimmung der Stabkräfte.

Wie mit Hülfe der weiter oben entwickelten kinematischen Sätze und Regeln die statischen Eigenschaften ebener Fachwerke übersichtlich beurteilt werden konnten, so können jene Regeln und Sätze unter Umständen auch mit Vorteil zur Ermittelung der Stabkräfte benutzt werden. Beispielsweise würden bei einem statisch bestimmten Fachwerke, wie das aus der zwangläufigen Kette (Fig. 159) durch Einfügung des Stabes (0 3) (6 7) entstehende, die bisher abgeleiteten Methoden zur Bestimmung der Stabkräfte versagen, weil jeder erste Schnitt um einen Knoten mehr als zwei, jeder andere erste Schnitt aber mehr als drei unbekannte Stabkräfte treffen würde (vergl. S. 234). Zwar lassen sich für das Gleichgewicht an den 6 Knoten 12 Gleichungen aufstellen, von denen nach Benutzung dreier für die Bestimmung des äufseren Gleichgewichtes noch die erforderlichen 9 zur Ermittelung der 9 Stabkräfte verfügbar bleiben würden; doch fällt die Lösung auf diesem Wege meist sehr umständlich aus.

Wir wollen das hier abzuleitende Verfahren stützen auf den Satz, dafs die Summe der Arbeiten aller an einer zwangläufigen Kette sich das Gleichgewicht haltenden äufseren Kräfte für jede unendlich kleine Bewegung gleich Null sein mufs. (Satz der „virtuellen" d. h. im Gleichgewicht der Kräfte und im Zusammenhange der Kette möglichen Arbeiten.) Die Richtigkeit dieses Satzes, für den wir hier einen umfassenden mathematischen Beweis nicht beibringen wollen, leuchtet ein aus der Überlegung, dafs das

Gleichgewicht einer zwangläufigen Kette dasjenige ihrer einzelnen starr gedachten Glieder zur Voraussetzung hat, dieses aber eine Änderung des Arbeitsvermögens im einzelnen Gliede und folglich auch in der ganzen Kette ausschliefst. — Jener Satz drückt sich aus durch die Gleichung

$$1)\qquad \Sigma P_n \cdot \Delta s_{P_n} = 0,$$

worin unter Δs_{P_n} die elementaren Arbeitswege der einzelnen Kräfte verstanden sind. Eine Scheibe I habe gegen eine etwa ruhende Scheibe O den augenblicklichen Pol 01 und werde von Kräften P und W in senkrechten Abständen u und w vom Pol 01 ergriffen (Fig. 163). Führt die Scheibe I eine Drehung $\Delta\varphi_I$ rechts um 01 aus, so ist der Arbeitsweg von P $\Delta s_P = \Delta\varphi_I \cdot u$ und von W $\Delta s_w = -\Delta\varphi_I \cdot w$. Das Gleichgewicht der Scheibe I verlangt daher nach Gl. 1 $P \cdot \Delta\varphi_I \cdot u - W \cdot \Delta\varphi_I \cdot w = 0$, daraus folgt

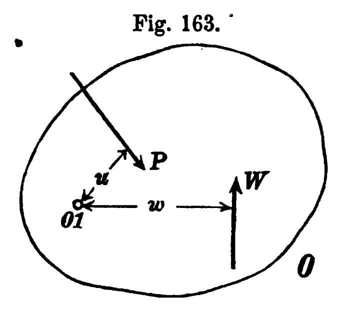


Fig. 163.

$$2)\qquad P \cdot u = W \cdot w,$$

d. h. 01 ist augenblicklicher Momentendrehpunkt der Scheibe I; $P \cdot u$ und $W \cdot w$ sind virtuelle Momente der Kräfte P und W.

Greifen P und W an verschiedenen Scheiben I und II an mit den augenblicklichen Polen 01 und 02 (Fig. 164) und sind $\Delta\varphi_I$ und $\Delta\varphi_{II}$ zusammengehörige kleine Drehungen beider Scheiben um ihre Pole, so ist $\Delta s_P = \Delta\varphi_I \cdot u$ und $\Delta s_w = -\Delta\varphi_{II} \cdot w$ und daher $P \cdot \Delta\varphi_I \cdot u - W \cdot \Delta\varphi_{II} \cdot w = 0$. Da aber $\Delta\varphi_I \cdot (01)(12) = \Delta\varphi_{II} \cdot (12)(02)$, so ist auch

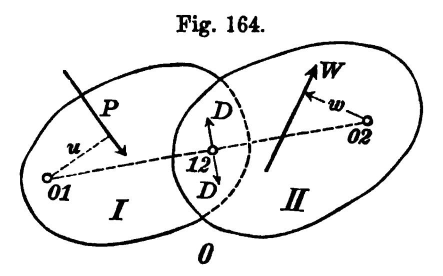


Fig. 164.

$$3)\qquad P \cdot \frac{u}{(01)(12)} = W \cdot \frac{w}{(12)(02)}.$$

Die beiden Seiten der Gl. 3 drücken die entgegengesetzt gleichen Kräfte D aus, mit denen die Scheiben in ihrem gegenseitigen Drehpunkt 12 aufeinander einwirken.

In dem Sonderfalle der Fig. 157, in dem die Scheiben I und II als Teile eines Dreigelenkbogens und W als Horizontalschub angesehen werden können, kann man die Strecken (0 1) (1 2) und (1 2) (0 2) durch die ihnen verhältnisgleichen wagerechten Abstände a und b ersetzen und erhält damit aus Gl. 3

$$4)\qquad W = P \cdot \frac{u}{w} \cdot \frac{b}{a},$$

oder, da $w = \frac{f}{a} \cdot l$ ist, auch

$$5)\qquad W = P \cdot \frac{u \cdot b}{l \cdot f}.$$

Mit $P = 1$ und veränderlichem u drücken Gl. 4 und 5 den linksseitigen Zweig $(0\,1_e)(1\,2_e)$ der Einflufslinie $(0\,1_e)(1\,2_e)(0\,2_e)$ für W aus. Tritt $P = 1$ rechts von 1 2, so ist für die jetzt allein von Kräften ergriffene Scheibe II in Bezug auf 0 2 als Momentendrehpunkt $W \cdot w = P \cdot (l - u)$; also

$$5a)\qquad W = \frac{P \cdot (l - u)}{w} = \frac{P \cdot (l - u) \cdot a}{l \cdot f},$$

die Gleichung des rechtsseitigen Zweiges der Einflufslinie für W.

Wie aus den hier berührten Sonderfällen des Gleichgewichts zwangläufig beweglicher Scheiben, so erkennt man aus den vorangehenden Darlegungen allgemein, dafs die Pole der Glieder einer zwangläufigen Kette gegen ein etwa ruhendes Glied O derselben gewissermafsen als feste Stützgelenke aller übrigen gegen dieses eine Glied angesehen werden können. Die Gleichung der virtuellen Arbeiten (Gl. 1) wird in ihrer Anwendung auf das Gleichgewicht einer Kette zu einer Momentengleichung in Bezug auf den momentan ruhenden Pol eines der Glieder derselben. Die virtuelle Arbeit irgend einer ein beliebiges Glied der Kette angreifenden Kraft während einer im Zusammenhange der Kette möglichen Differenzialbewegung des Gliedes, oder auch das virtuelle Moment der Kraft in Bezug auf den Pol desselben ist verhältnisgleich dem senkrechten Abstande der Kraft von diesem Pol. Beide werden gleich Null, wenn die Kraft durch den Pol des von ihr ergriffenen Gliedes gerichtet ist. In diesem Falle verschwindet also auch der Einflufs der Kraft auf den Gleichgewichtszustand sowohl des unmittelbar von ihr ergriffenen Gliedes, als auch auf den der ganzen Kette. Eine

durch den momentan ruhenden Pol eines Gliedes gerichtete Kraft von endlicher Gröfse vermag also das Gleichgewicht der Kette gegenüber irgend einem Angriff äufserer Kräfte nicht herzustellen (vergl. S. 323). Daraus lassen sich folgende beiden für die Beurteilung des Gleichgewichts von Fachwerken wichtigen Schlüsse ziehen, nämlich:

1. Jeder Stab eines Fachwerkes, dessen Mittellinie durch den Pol zweier durch ihn verbundener Glieder der zwangläufigen Kette gerichtet ist, in welche das Fachwerk bei Beseitigung des Stabes übergehen würde, hat im Gleichgewicht der äufseren und inneren Kräfte eine unendlich grofse Spannkraft zu leisten;

2. Der Einflufs einer ein Fachwerk angreifenden äufseren Kraft auf die Spannkraft in irgend einem Stabe desselben ist verhältnisgleich dem senkrechten Abstande jener Kraft von dem momentan ruhenden Pole (Hauptpole) des von ihr unmittelbar ergriffenen Gliedes der zwangläufigen Kette, welche bei Beseitigung des Stabes aus dem Fachwerk entstehen würde.

Wandert also eine etwa lotrechte Last $P = 1$ über einen statisch bestimmten Fachwerkbalken, so läfst sich ihr Einflufs auf die Spannkraft irgend eines Stabes durch eine gerade Linie ausdrücken, und unter den Hauptpolen der ohne den Stab aus dem Fachwerk entstehenden Kette befinden sich Nullpunkte dieser Einflufslinie (Belastungsscheiden). Unter den Zwischenpolen je zweier Glieder hat man aus gleicher Erwägung Knickpunkte der Einflufslinie zu suchen, und zwar wirkliche, wenn die Last hier von einem Gliede zum andern übertritt, ideelle, wenn der Übertritt an anderer Stelle erfolgt.

Auf Grund vorstehender allgemeiner Betrachtungen können die Einflufslinien der allgemeinen Stabkräfte und diese selbst in ihren positiven und negativen Gröfstwerten leicht gefunden werden. An einigen Beispielen möge das Verfahren gezeigt werden.

Die Kette (Fig. 160) sei durch Einfügung eines Stabes BB' in ein starres Gebilde verwandelt; die Einflufslinie der Stabkraft im Stabe BB' soll bestimmt werden. Der (momentan ruhende) Hauptpol des Gliedes IV ist weiter oben in 04 ermittelt. Einer

Last $P=1$ im Abstande u von 04 gegenüber mufs die Stabkraft, bezw. lotrechte Stützkraft B die Momentengleichung erfüllen $B \cdot b = P \cdot u$, also ist

$$B = P \cdot \frac{u}{b}; \tag{6}$$

das ist die Gleichung der Einflufslinie für die Bewegung der Last $P=1$ über das Glied IV. Für $u=0$ wird $B=0$, für $u=b$, $B=P=1$. Damit liegt die Einflufslinie $(01_e)(14_e)\,n_4 b'$ fest. Unter 04 und 01, den Hauptpolen der belasteten Glieder I und IV, liegen Einflufsnullpunkte, unter dem Zwischenpol 14 beider ein Knickpunkt der Einflufslinie und unter B ist die Einflufsordinate gleich 1. (Vergl. in Bd. I Fig. 133 S. 172 die Stützkraft A eines Gerberträgers.)

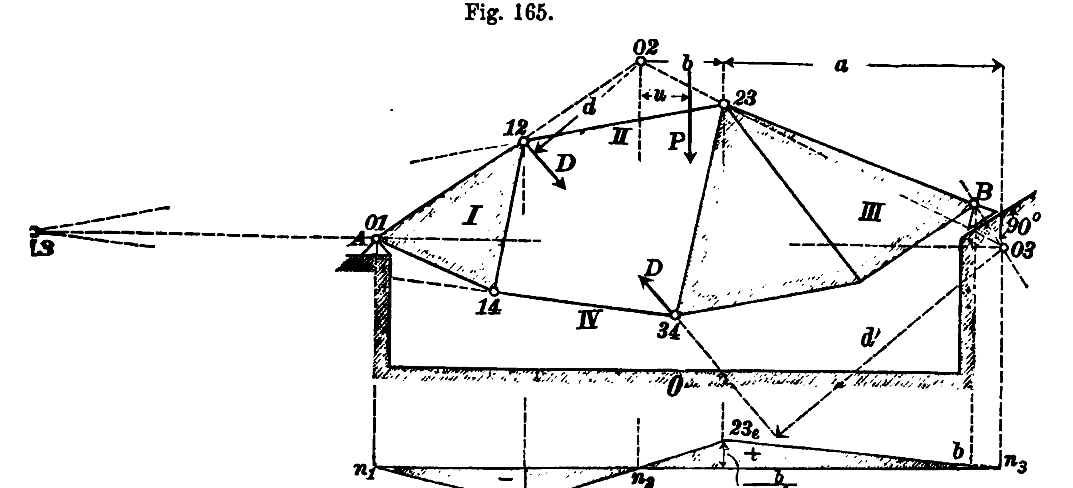
Würde die Kette (Fig. 160) statt der Form $O\,I\,II\,III\,IV$ die Form $O\,I\,II'\,III'\,IV'$ erhalten, der Pol 04 nach 04′ rücken, b also gleich Null werden, so würde nach Gl. 6 $B=\infty$, oder wenn auch P durch 04′ gerichtet, $u=0$ wäre $B=\frac{0}{0}$, d. i. statisch unbestimmt.

Wird das Fachwerk (Fig. 162) mit O als ruhendem Gliede im Knoten 14 von einer also nicht durch den Pol 04 des Gliederpaares $O\,IV$ gehenden Kraft P ergriffen, so hat der Stab (03)(45) im Drehungsgleichgewicht des Gliedes IV in Bezug auf den Hauptpol 04 die Spannkraft $D=\frac{P \cdot u}{0}=\infty$, oder wenn auch P durch 04 geht, $u=0$ ist, eine solche $D=\frac{0}{0}$, d. i. eine statisch unbestimmte Stabkraft, zu leisten. Wird die Form des Fachwerkes so geändert, dafs unter Festhaltung der Knoten 01, 12, 23 und 03 der Knoten 14 nach 14′ und 45 nach 45′ rückt, so erhält die Stabkraft im Stabe (03)(45′) den endlichen und bestimmten Wert $D'=+uP':d$ (Zugkraft).

Der in Fig. 165 dargestellte „einfache“ Fachwerkbalken ist in A durch ein festes, in B durch ein verschiebliches Stützgelenk gegen die ruhende Scheibe O (Pfeiler und Baugrund) gelagert. Es soll die Einflufslinie der Stabkraft D der Strebe (12)(34) ermittelt werden. In der durch Beseitigung der Strebe entstehenden Kette $O\,I\,II\,III\,IV$ ist 01 Hauptpol von I, 13 Zwischenpol von I und III. Der Hauptpol 03 von III liegt im Schnittpunkt der Geraden (13)(01) mit der zur Lagerfläche in B senkrechten Polbahn. Der Hauptpol 02

von *II* wird im Schnitt der Geraden (01)(12) und (03)(23) erhalten. Wir denken uns nun in den Punkten 12 und 34 die Stabkraft D als äufsere Kraft und außerdem eine Last $P=1$ im Abstande u von 02 auf das Glied *II* der Kette wirken. Es sind dann nur die Glieder *II* und *III* von Kräften ergriffen und wir erhalten bei

Fig. 165.



den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen für das Drehungsgleichgewicht des Gliedes *II* in Bezug auf seinen Hauptpol 02 die Momentengleichung $O=P\cdot u-D\cdot d-D\cdot\frac{d'}{a}\cdot b$, worin das letzte Glied das Moment ausdrückt, mit welcher D in 34 durch das Glied *III* im Punkte 23 auf *II* einwirkt. Die Lösung für D ergibt

$$7)\qquad D=P\cdot u:\left(d+d'\frac{b}{a}\right)\text{ (vergl. Gl. 2 und 3).}$$

Für $u=0$ ist $D=0$, für $u=b$ und $P=1$ ist $D=P\cdot b:\left(d+d'\frac{b}{a}\right)$ $=b:\left(d+d'\frac{b}{d}\right)$. Damit liegt die Einflufslinie $n_1\,(12_e)\,n_2\,(23_e)\,b$ fest. Die Einflufsnullpunkte n_1, n_2 und n_3 liegen in den Loten durch die Hauptpole 01, 02 und 03. Die Knickpunkte 12_e und 23_e finden sich lotrecht unter den Zwischenpolen. Da die Last $P=1$ nach rechts nicht über B hinausgelangen kann, so schliefst die

Einflufslinie in b ab, n_3 ist nur ein ideeller Einflufsnullpunkt, der die **Richtung** des Zweiges $(2\,3_e)\,b$ der Einflufslinie festlegt.

Die zwangläufige Kette (Fig. 159) kann, wie oben nachgewiesen, durch Einfügung eines Gelenkstabes zwischen den Punkten (0 3) und (6 7) in ein steifes und statisch bestimmtes Fachwerk übergeführt werden. Die Einflufslinie der Stabkraft D in dem Stabe (0 3) (6 7) für lotrechte Belastung des Stabzuges *VI VII V* soll bestimmt werden. Wir lassen die Wanderlast $P = 1$ zunächst am Gliede *VII* im senkrechten Abstande u von dessen Hauptpol 0 7 angreifen und betrachten das Drehungsgleichgewicht dieses Gliedes in Bezug auf seinen Hauptpol 0 7. Die als äufsere Kraft in 0 3 angreifend gedachte Stabkraft ist ohne Einflufs auf jenes Gleichgewicht, weil ihr Angriffspunkt 0 3 bei einer virtuellen Bewegung der Kette *OI... VI VII* ruht.

Am Gliede *VII* halten sich lediglich die Kräfte D in 6 7 und P das Gleichgewicht und die Momentengleichung lautet $D \cdot d = Pu$, woraus

$$D = P \cdot u : d \tag{8}$$

als Gleichung der Einflufslinie von D für die Bewegung der Last $P = 1$ zwischen 6 7 und 4 7 gewonnen wird. Für $u = r$ ist die Einflufsordinate gleich $r : d$ und für $u = 0$ gleich Null, womit die Punkte n_7 und $4\,7_e$ der Einflufslinie Fig. 159 b und diese selbst festliegen. Die nur ideellen Einflufsnullpunkte n_6 und n_5 legen wieder nur die Richtungen $(6\,7_e)(1\,6_e)$ und $(4\,7_e)(3\,5_e)$ fest.

Hätte das Fachwerk die Form *OI ... VI VII'*, oder irgend eine andere Form, bei der die Achse des Stabes (0 3) (6 7') durch den Pol 0 7 des Gliedes *VII* gegen *O* gerichtet, also $d = 0$ wäre, so würde $D = \frac{P \cdot u}{0} = \infty$ oder, wenn auch P durch 0 7 gerichtet wäre, $D = \frac{0}{0}$, unbestimmt.

Endlich soll hier noch die Einflufslinie der Spannkraft S des Stabes bO (Fig. 161) bestimmt werden, durch den die zwangläufige Kette in ein steifes Gebilde übergeht. Sowohl die in b als die in c als äufsere Kraft angreifend gedachte Stabkraft S hat bei einer virtuellen Bewegung der Kette einen von Null verschiedenen Arbeitsweg. Beide Kräfte S sind also von Einflufs auf das Gleichgewicht der Kette. Wir lassen die Last $P = 1$ zunächst an der Scheibe *IV*

angreifen und erhalten bei den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen für das Drehungsgleichgewicht dieser Scheibe in Bezug auf ihren Hauptpol 04 gegen O die Momentengleichung

$$P \cdot u + S \cdot s_4 - S \cdot s_5 \cdot a : b = 0 \quad \text{und daraus}$$

9) $$S = P \cdot u : \left(s_5 \frac{a}{b} - s_4\right)$$

als Gleichung der Einflußlinie für die Bewegung der Last $P = 1$ zwischen den Punkten 14 und 45. Für $u = 0$ ist $S = 0$ und für $u = c$, $S = c : \left(s_5 \cdot \frac{a}{b} - s_4\right)$. Damit liegen die Punkte n_4 und 14_e der Einflußlinie $8_e n_8 (58_e) n_5 45_e n_4 14_e 01_e$ (Fig. 161*b*) und diese selbst fest.

VI. Formänderung ebener statisch bestimmter Fachwerke.

a) Allgemeines; Formänderungsarbeit; Arbeitsgesetze.

Den Betrachtungen unter I bis V liegt die Voraussetzung zu Grunde, daß die zu einem Fachwerk vereinigten Stäbe an ihren Enden durch reibungslose Gelenke verbunden und die Fachwerke nur in den Knotenpunkten von äußeren Kräften ergriffen sind; die einzelnen Stäbe also Kräfte nur in der Richtung ihrer Achse aufzunehmen, bezw. Spannungswiderstände (Stabkräfte) nur in dieser Richtung zu leisten haben. Unter diesen Voraussetzungen können, wenn Knickvorgänge ausgeschlossen bleiben, die Formänderungen der Stäbe selbst infolge Angriffs äußerer Kräfte nur in elastischen Längenänderungen bestehen, deren Ermittelung, wenn die Stabkräfte bestimmt sind, in bekannter Weise mit Hülfe der Gleichung $\triangle s = \frac{s \cdot S}{EF}$ geschehen kann, worin s die Stablänge und S die Stabkraft bezeichnet. Die Bestimmung der veränderten Form des Fachwerkes aus den veränderten Stablängen ist dann im wesentlichen eine geometrische Aufgabe.

Vielfach kann man indes die Formänderung von Fachwerken wie diejenige gerader und gekrümmter Stäbe vorteilhaft mit Hülfe des Begriffes der Formänderungsarbeit verfolgen. Geht die Formänderung im steten Gleichgewicht zwischen den äußeren und inneren Kräften vor sich, so ist, wie man leicht erkennt, die Summe der Arbeiten beider in jedem kleinsten Zeitteilchen gleich Null, d. h. die

wirkliche äufsere und innere Formänderungsarbeit sind, wie bei einem beliebigem elastisch festen Körper innerhalb der Elastizitätsgrenze, absolut genommen, einander gleich; es ist

$$\mathfrak{A}_a = \mathfrak{A}_i \text{ (vergl. S. 11).}$$

Besteht zwischen den Dehnungen und Spannungen des Stoffes, aus dem die Stäbe bestehen, Verhältnisgleichheit, so ist die sogenannte „Verschiebungsarbeit" der äufseren und inneren Kräfte je doppelt so grofs als die wirkliche äufsere und innere Formänderungsarbeit. $\mathfrak{A}_a^v = 2 \cdot \mathfrak{A}_a$, $\mathfrak{A}_i^v = 2\,\mathfrak{A}_i$ und daher auch $\mathfrak{A}_a^v = \mathfrak{A}_i^v$.

Ist δ der Arbeitsweg irgend einer der äufseren Kräfte P, die wir uns im Gleichgewicht mit den (als innere Kräfte anzusehenden) Stabspannkräften von Null anwachsend denken, so ist die wirkliche äufsere Formänderungsarbeit

$$\mathfrak{A}_a = \Sigma \cdot \frac{P \cdot \delta}{2} \text{ und die Verschiebungsarbeit } \mathfrak{A}_a^v = \Sigma \cdot P \cdot \delta.$$

Ferner ist die wirkliche innere Formänderungsarbeit eines Stabes von überall gleichem Querschnitt F ohne Rücksicht auf das Vorzeichen gleich

$$\frac{F \cdot s \cdot \sigma^2}{2E} = \frac{F \cdot \sigma}{2} \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot s = \frac{S \cdot \Delta s}{2} \text{ (vergl. Gl. 4 S. 12)}$$

und für alle Stäbe

$$\mathfrak{A}_i = \Sigma \cdot \frac{S \cdot \Delta s}{2} \text{ oder } \mathfrak{A}_i^v = \Sigma \cdot S \cdot \Delta s.$$

Daraus ergibt sich die Arbeitsgleichung

1) $$\Sigma \cdot P \cdot \delta = \Sigma \cdot S \cdot \Delta s.$$

Gleichung 1 gilt für alle im Gleichgewicht der Kräfte möglichen „virtuellen", von den Kräften selbst etwa unabhängigen Verschiebungen δ und Δs der Knotenpunkte und stellt eine allgemeine Abhängigkeit zwischen den äufseren Kräften P_1, P_2 usw. und den Stabkräften S dar.

Legen wir allen Kräften P bis auf eine, P_n, bestimmte unveränderliche Werte bei, so erscheint lediglich P_n von den Stabkräften S und umgekehrt abhängig veränderlich, jede Änderung ∂P_n hat Änderungen ∂S aller Stabkräfte im Gefolge. Durch teilweise Differentiation der Gl. 1 nach P_n und Lösung für den Arbeitsweg dieser Kraft δ_n erhält man

2) $$\delta_n = \frac{\Sigma \cdot \partial S \cdot \Delta s}{\partial P_n} \text{ (vergl. Gl. 1 S. 21).}$$

Legt man jetzt den Verrückungen δ_n und Δs von allen im Gleichgewicht der Kräfte möglichen Werten die der wirklichen elastischen Formänderung entsprechenden bei, setzt also $\Delta s = \frac{s \cdot \sigma}{E} = \frac{s \cdot S}{F \cdot E}$, so geht Gl. 2 über in

3) $$\delta_n = \frac{\Sigma \cdot S \cdot \partial S \cdot s}{\partial P_n \cdot EF} = \frac{\Sigma \cdot \partial S^2 \cdot s}{\partial P_n \cdot 2\,EF} = \partial \Sigma \cdot \frac{S^2 \cdot s}{2\,EF} : \partial P_n .$$

In $\Sigma \cdot \frac{S^2 \cdot s}{2\,EF}$ erkennen wir die wirkliche Formänderungsarbeit $\mathfrak{A}_i$ des Fachwerkes und Gl. 3 kann man daher auch schreiben

4) $$\delta_n = \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial P_n},$$ d. h. in Worten:

„Wird ein in statisch bestimmter Weise spannungslos festgehaltenes Fachwerk von beliebigen äufseren Kräften ergriffen, so ist die elastische Verschiebung irgend eines Knotenpunktes in der Richtung einer in ihm angreifenden äufseren Kraft unter der Voraussetzung unveränderlicher Temperatur gleich der ersten Abgeleiteten der Formänderungsarbeit nach jener Kraft."

Findet während der elastischen Formänderung gleichzeitig noch eine solche infolge Änderung der Temperatur statt, so hat man in Gl. 2 zu setzen $\Delta s = \frac{s \cdot S}{FE} + s \cdot \varepsilon t$ mit ε als Wärmeausdehnungsziffer. Gl. 3 geht dann über in

3a) $$\delta_n = \partial \cdot \left[\Sigma \frac{S^2 \cdot s}{2\,FE} + \Sigma\, S \cdot s \cdot \varepsilon t \right] : \partial P_n .$$

Der Klammerwert drückt jetzt die Summe der Formänderungsarbeiten infolge der elastischen Änderung der Stablängen und derjenigen durch Wärmeänderung aus. Bezeichnen wir ersteren Anteil mit $\mathfrak{A}_i$, letzteren mit $\mathfrak{A}_i^t$, so erhalten wir

4a) $$\delta_n = \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial P_n} + \frac{\partial \mathfrak{A}_i^t}{\partial P_n},$$

worin der erste Summand die elastische Verschiebung des Knotens n in der Richtung der Kraft P_n und der zweite diejenige infolge der Wärmeänderung ausdrückt. Bezeichnen wir letztere, die meist einfach zu ermitteln ist, mit δ_n^t, so wird

4b) $$\delta_n = \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial P_n} + \delta_n^t .$$

Handelt es sich um die elastische Drehung $\varDelta\alpha$ einer Geraden in der Ebene des Fachwerks, so erhält man, wie auf S. 22 für den ungegliederten stabförmigen Körper,

4c) $$\varDelta\alpha_n = \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial M_n},$$

worin M_n ein auf jene Gerade drehend einwirkendes, veränderlich gedachtes äufseres Kraftmoment ist. Eine etwaige Drehung $\varDelta\alpha_n^t$ jener Geraden infolge Temperaturänderung kann wieder durch Addition berücksichtigt werden.

Wird ein bereits statisch bestimmt gestütztes Fachwerk noch weiter festgehalten, so wird sein äufserer Gleichgewichtszustand statisch unbestimmt und die an den weiter festgehaltenen Stellen auftretenden Stützwiderstände oder Stützmomente X sind als statisch unbestimmte Gröfsen anzusehen. Sie haben aber wie alle äufseren Kräfte die Gleichungen 4 zu erfüllen. Ruht ihr Angriffspunkt oder ihre Angriffsgerade während der Formänderung, d. h. ist die Stützung in ihnen eine starre, so ist für sie $\delta_n = 0$ bezw. $\varDelta\alpha = 0$ und man erhält bei gleichbleibender Temperatur

5) $$\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial X} = 0, \text{ d. h. in Worten:}$$

Die erste Abgeleitete der Formänderungsarbeit nach einem statisch unbestimmten Stützwiderstande ist gleich Null, oder der statisch unbestimmte Stützwiderstand nimmt denjenigen Wert an, für den die Formänderungsarbeit ein Minimum wird.

Findet während der Formänderung etwa noch eine Temperaturänderung statt, so erhält man aus Gl. 4b mit $\delta_n = 0$

5a) $$\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial X} = -\delta_n^t.$$

Ist ferner die Stützung an der Angriffsstelle von X nicht starr, sondern etwa verhältnisgleich dieser Stützkraft in ihrer Richtung nachgiebig oder verschieblich, so geht Gl. 5 über in

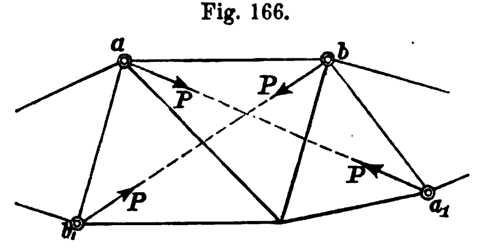
5b) $$\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial X} = k \cdot X \text{ oder Gl. 5a in 5c) } \ldots \frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial X} = k \cdot X - \delta_n^t,$$

worin k eine von der Nachgiebigkeit der Stütze abhängige Konstante ist. Kommen bei der Stützung des Fachwerkes mehr als eine statisch unbestimmte Stützkraft X vor, so kann man für jede den Ausdruck

$\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial X}$ und eine Gleichung 5, 5a oder 5b bilden und so stets die zur Bestimmung aller Stützkräfte erforderliche Zahl von Gleichungen gewinnen.

Wie die in vorstehendem entwickelten Sätze von Castigliano, so läfst sich der auf S. 32—34 abgeleitete Maxwell'sche Satz von der Gegenseitigkeit der elastischen Verrückungen in gleicher Weise wie für einen ungegliederten stabförmigen Körper auch für ein ebenes Fachwerk nachweisen. Wir wollen ihn indes hier noch wie folgt verallgemeinern: Eine in irgend einem Knoten a eines beliebigen Fachwerks (Fig. 166) angreifende Kraft P, bezeichnet als P_a, werde durch eine entgegengesetzte gleiche Kraft P_{a_1} in a_1 im Gleichgewicht gehalten und dasselbe gelte von zwei in zwei andern Knoten b und b_1 angreifenden Kräften P, bezeichnet mit P_b und P_{b_1}. Unter der Wirkung der vier Kräfte findet eine bestimmte, von der Reihenfolge ihres Angriffs unabhängige Formänderung und Formänderungsarbeit statt.

Fig. 166.



Wir wollen uns dabei je einen Punkt beider Punktpaare $a a_1$ und $b b_1$, etwa a_1 und b_1, ruhend denken und mit δ_{aa} die elastische Verschiebung des Punktes a in der Richtung $a a_1$ bezeichnen, die von der Kraft P_a hervorgerufen wird; ebenso sei δ_{ba} die durch P_a bewirkte Verschiebung des Punktes b in der Richtung $b b_1$, während δ_{bb} und δ_{ab} die von der Kraft P_b erzeugten Verschiebungen der Punkte b und a in den Richtungen $b b_1$ und $a a_1$ ausdrücken. Greifen nun die Kräfte P in a und a_1 zuerst an und erst, nachdem die dadurch bedingte Formänderung eingetreten ist, auch die Kräfte P in b und b_1, so entsteht in a die Arbeit $\frac{P \cdot \delta_{aa}}{2} + P \cdot \delta_{ab}$ und in b die Arbeit $\frac{P \cdot \delta_{bb}}{2}$. Greifen die Kräfte P in b und b_1 zuerst an, so entsteht in a die Arbeit $\frac{P \cdot \delta_{aa}}{2}$ und in b nun $\frac{P \cdot \delta_{bb}}{2} + P \cdot \delta_{ba}$. Da die Gesamtarbeit in beiden Fällen die gleiche ist, so erhält man wie auf Seite 34

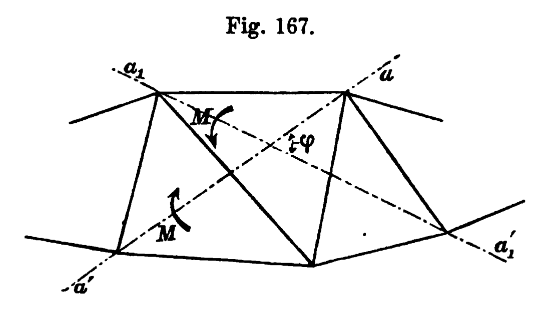
6) $$\delta_{ab} = \delta_{ba}.$$

Nennen wir nach **Mohr** die in a und a_1 angreifenden Kräfte P die „**Belastung des Punktpaares**" $a a_1$ und die in b und b_1 angreifenden gleichen Kräfte P die Belastung des Punktpaares $b b_1$, so kann die Beziehung Gl. 6 wie folgt ausgesprochen werden:

„**Die gegenseitige Verschiebung δ_{ba} eines Punktpaares bb_1 infolge der Belastung P eines anderen Punktpaares aa_1 ist ebenso grofs, wie die gegenseitige Verschiebung δ_{ab} des Punktpaares aa_1 infolge der gleichen Belastung P des Punktpaares bb_1.**"

Wir wollen uns nun in den Knoten a und a' des Fachwerkes (Fig. 167) ein Kräftepaar vom Momente M und in den Punkten a_1 und a_1' ein Kräftepaar von entgegengesetzt gleichem Moment M wirkend, d. h. das Geradenpaar $a a'$ $a_1 a_1'$ durch das Moment M belastet denken. In der gleichen Weise möge irgend ein anderes in der Figur nicht dargestelltes Geradenpaar $b b'$ $b_1 b_1'$ durch ein gleiches Moment M belastet werden. Unter der Wirkung dieser Momente entsteht eine von der Reihenfolge ihres Angriffs unabhängige bestimmte Formänderung. Durch die Belastung des Geradenpaares $a a'$ und $a_1 a_1'$ erfahre der Neigungswinkel φ desselben eine Änderung $\Delta \varphi_{aa}$ und derjenigen des Geradenpaares $b b'$ $b_1 b_1'$ eine solche $\Delta \varphi_{ba}$. Ebenso bringe die Belastung M des Geradenpaares $b b'$ $b_1 b_1'$ eine Änderung $\Delta \varphi_{bb}$ seines Neigungswinkels und eine solche $\Delta \varphi_{ab}$ des Geradenpaares $a a'$ $a_1 a_1'$ hervor. Je nachdem nun das eine oder das andere Geradenpaar zuerst belastet wird, entsteht die Formänderungsarbeit $\frac{M \cdot \Delta \varphi_{aa}}{2} + M \cdot \Delta \varphi_{ab} + \frac{M \cdot \Delta \varphi_{bb}}{2}$ oder $\frac{M \cdot \Delta \varphi_{bb}}{2} + M \cdot \Delta \varphi_{ba} + \frac{M \cdot \Delta \varphi_{aa}}{2}$, und aus der Gleichsetzung beider folgt

Fig. 167.



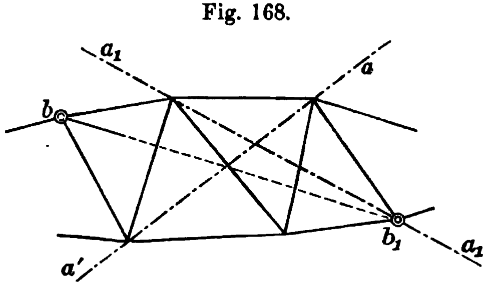
$$\Delta \varphi_{ba} = \Delta \varphi_{ba}, \tag{6a}$$

d. h. „**Die gegenseitige Drehung $\Delta \varphi_{ba}$ eines Geradenpaares bb' $b_1 b_1'$ infolge der Belastung M eines Geraden-**

paares $a a'$ $a_1 a_1'$ ist ebenso grofs als die gegenseitige Drehung $\Delta \varphi_{ab}$ des Geradenpaares $a a'$ $a_1 a_1'$ infolge der gleichen Belastung M des Geradenpaares $b b'$ $b_1 b_1'$."

Es soll noch die gegenseitige Bewegung eines Punktpaares $b b_1$ und eines Geradenpaares $a a'$ $a_1 a_1'$ (Fig. 168) in Beziehung gebracht und dabei die Belastung P des Punktpaares gleich derjenigen M des Geradenpaares gelten, wenn $M = P \cdot 1$ ist. Die unter der gleichzeitigen Belastung P des Punktpaares $b b_1$ und der Belastung $M = P \cdot 1$ des Geradenpaares $a a'$ $a_1 a_1'$ entstehende Formänderungsarbeit berechnet sich dann, je nachdem die eine oder die andere Belastung zuerst angreift, zu $M \cdot \frac{\Delta \varphi_{aa}}{2} + M \cdot \Delta \varphi_{ab} + \frac{P \cdot \delta_{bb}}{2}$ oder $\frac{P \cdot \delta_{bb}}{2} + P \cdot \delta_{ba} + \frac{M \cdot \Delta \varphi_{aa}}{2}$. Die Gleichsetzung beider Ausdrücke für denselben Wert ergibt $P \cdot \delta_{ab} = M \cdot \Delta \varphi_{ba}$, woraus mit $M = P \cdot 1$ wieder

Fig. 168.



6b) $$\delta_{ba} = \Delta \varphi_{ab}$$ entsteht,

d. i. in Worten: „Die gegenseitige Verschiebung eines Punktpaares $b b_1$ infolge der Belastung $M = P \cdot 1$ eines Geradenpaares $a a'$ $a_1 a_1'$ ist ebenso grofs, wie die gegenseitige Drehung des Geradenpaares $a a'$ $a_1 a_1'$ infolge gleicher Belastung P eines Punktpaares $b b_1$."

Aus vorstehendem erkennt man leicht auch, dafs, wenn zwei Punktpaare, zwei Geradenpaare, oder ein Punkt- und ein Geradenpaar ungleich belastet werden, die gegenseitigen Verschiebungen, bezw. Drehungen sich umgekehrt verhalten müssen wie die Belastungen. Gleiche gegenseitige Bewegungen entstehen selbstverständlich auch bei der „Belastungseinheit" beider aufeinander bezogener Paare.

Zu einer weiteren Verallgemeinerung des Maxwell'schen Satzes gelangt man noch durch folgende Betrachtung:

Wir denken uns auf ein Fachwerk gleichzeitig zwei Lastengruppen wirken, die wir hier mit P_m und P_n bezeichnen wollen, in dem Sinne, dafs unter P_m irgend eine zur Lastengruppe P_m und unter P_n irgend eine zur Gruppe P_n gehörige Last verstanden sein

soll. Ferner sei unter δ_{mm} die Gruppe der Verschiebungen verstanden, welche die Knotenpunkte allein unter der Wirkung der Lastengruppe P_m je in der Richtung der an dem betreffenden Knoten angreifenden Last dieser Gruppe erfahren, und die gleiche Bedeutung habe δ_{nn} bezüglich der Lastengruppe P_n. Endlich seien δ_{nm} und δ_{mn} die Gruppen der Verschiebungen, welche die Lastengruppe P_m in den Knoten des Fachwerks in der Richtung der dort angreifenden Lasten der P_n-Gruppe und umgekehrt hervorbringen.

Unter dem Zusammenwirken beider Lastgruppen entsteht eine von der Reihenfolge des Angriffs der einzelnen Lasten unabhängige Formänderung und eine bestimmte innere Formänderungsarbeit. Setzen wir voraus, daſs die Formänderung im ungestörten Gleichgewicht der inneren und äuſseren Kräfte vor sich geht, so ist auch die äuſsere Formänderungsarbeit, die Arbeit der Lasten in ihrer Gesamtheit während der Formänderung, unabhängig von der Reihenfolge des Angriffs der einzelnen Lasten.

Wir lassen nun einmal die Lastengruppe P_m und ein zweites Mal die Lastengruppe P_n zuerst angreifen und zwar möge der Angriff jedesmal so erfolgen, daſs alle Lasten jeder Gruppe je von Null aus allmählich und verhältnisgleich anwachsen mit der Verschiebung der Knoten, an denen die Einzellasten angreifen in deren Richtung. Dann ist die wirkliche Formänderungsarbeit jeder Lastengruppe für sich allein gleich $\Sigma \cdot \frac{P_m \cdot \delta_{mm}}{2}$ bezw. $\Sigma \cdot \frac{P_n \cdot \delta_{nn}}{2}$. Daneben leistet nur die zuerst angreifende Lastengruppe während der Formänderung durch die zweite Gruppe noch Verschiebungsarbeit. Diese ist, wenn die Lastengruppe P_m zuerst angreift, gleich $\Sigma \cdot P_m \cdot \delta_{mn}$, und wenn die Lastengruppe P_n zuerst angreift, gleich $\Sigma \cdot P_n \cdot \delta_{nm}$. Aus der Gleichheit der Summe aller Arbeiten in beiden Fällen folgt

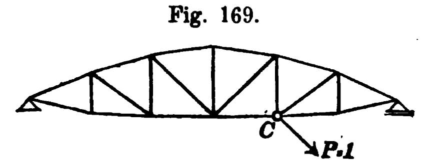
$$7) \qquad \Sigma \cdot P_m \, \delta_{mn} = \Sigma \cdot P_n \cdot \delta_{nm}.$$

Diese Beziehung ist von Betti zuerst nachgewiesen und heiſst nach ihm das Betti'sche Gesetz, von dem der Maxwell'sche Satz nur einen Spezialfall umfaſst. Bestehen beide Lastengruppen nämlich je aus einer Einzellast P, so geht Gl. 7 über in $\delta_{nm} = \delta_{mn}$, übereinstimmend mit Gl. 6.

Es soll hier noch die unter der Wirkung einer beliebigen Kräftegruppe P_m entstehende Verschiebung δ_c irgend eines Fachwerkknotens C (Fig. 169) in einer gegebenen Richtung verfolgt werden. Die

der Kräftegruppe P_m entsprechende Gruppe von Stabkräften sei S_m und die zugehörige Gruppe der Längenänderungen der Stäbe sei $\Delta s_m = \frac{S_m \cdot s_m}{FE}$ mit s_m als Stablängen. δ_c und Δs_m sind also die im Gleichgewicht der Kräftegruppen P_m und S_m entstehenden virtuellen Verschiebungen.

Fig. 169.



Wir lassen jetzt am Knoten C in der gegebenen Verschiebungsrichtung eine Kraft $P = 1$ angreifen und bezeichnen die von ihr erzeugte und mit ihr im Gleichgewicht stehende Gruppe von Stabkräften mit S'. Nun wenden wir auf die virtuellen Arbeiten der Kraft $P = 1$ und der Stabkräfte S' die Gl. 1 an, indem wir überlegen, daſs während der durch die Kräftegruppe P_m erzeugten Formänderung die Kraft $P = 1$ am Knoten C die Arbeit $1 \cdot \delta_c$ und die Stabkräfte S' die Arbeit $\Sigma \cdot S' \cdot \Delta s_m = \Sigma \cdot \frac{S' \cdot S_m s}{FE}$ leisten und daſs daher, wenn wir in Gl. 1 unter der Gruppe P der äuſseren Kräfte die Kraft $P = 1$ am Knoten C, unter der Gruppe S der Stabkräfte die Kräfte S' verstehen, die Verschiebungsgruppe δ durch die Einzelverschiebung δ_c und Δs durch Δs_m ersetzen, die Gleichung bestehen muſs

$$8) \qquad 1 \cdot \delta_c = \Sigma \cdot \frac{S' \cdot S_m \cdot s}{EF},$$

worin F allgemein die Gruppe der Querschnitte der prismatisch vorausgesetzten Stäbe bezeichnet.

Hat man danach die Stabkräfte S' und S_m für die einzelnen Stäbe in bekannter Weise ermittelt und sind die Längen s und die Querschnitte F der einzelnen Stäbe gegeben, so bietet die Berechnung von δ_c nach Gl. 8 keine Schwierigkeiten.

Der Quotient $S_m : F$ drückt die Spannung σ in den einzelnen Stäben aus. Ist diese konstant und gegeben, so kann Gl. 8 auch geschrieben werden:

$$8\text{a}) \qquad \delta_c = \frac{\sigma}{E} \cdot \Sigma \cdot S' \cdot s.$$

Diese Gleichung ist u. a. mit Vorteil in allen den Fällen anwendbar, wo zunächst nur das Liniennetz und die Spannung σ gegeben ist, um die Verschiebung irgend eines Knotens in einer bestimmten Richtung, etwa die Durchbiegung eines lotrecht belasteten Fachwerkbalkens in seiner Mitte zu berechnen.

Gl. 8 und 8a ermöglichen in einmaliger Anwendung nur die Berechnung der Verschiebung irgend eines Fachwerkknotens in einer bestimmten Richtung. Um die wirkliche Verschiebung desselben zu erhalten, ist seine Verschiebung noch in einer zweiten Richtung in gleicher Weise zu ermitteln. Die wirkliche Verschiebung wird dann als Diagonale des aus beiden Seitenverschiebungen gebildeten Parallelogramms erhalten. So könnte man die elastische Verschiebung aller Knotenpunkte eines Fachwerks und damit dessen ganze Formänderung ermitteln. Ein solches Verfahren würde sich indes sehr umständlich gestalten. In folgendem soll deshalb noch gezeigt werden, wie man die ganze Formänderung eines Fachwerks bequemer, wenn auch nicht mit gleicher, so doch oft hinreichender Genauigkeit auf dem Wege der Zeichnung verfolgen kann, wenn die Längenänderungen Δs aller Stäbe desselben, sowohl die elastischen als die etwa infolge Temperaturänderung eingetretenen, bekannt, etwa aus der Gleichung

$$\Delta s = \frac{S \cdot s}{E \cdot F} + \varepsilon \cdot t \cdot s \quad \text{berechnet sind.}$$

b) Verschiebungspläne.

Ein Knotenpunkt c (Fig. 170a) irgend eines Fachwerkes sei mit den Knoten a und b durch Stäbe 1 und 2 verbunden, deren Längen die Änderungen $\Delta 1$ und $\Delta 2$ erfahren (wovon etwa $\Delta 1$ positiv, $\Delta 2$ negativ), während gleichzeitig die Knoten a und b von a nach a_1, bezw. von b nach b_1 rücken.

Fig. 170.

Die dadurch bedingte neue Lage von c kann nun wie folgt durch Zeichnung gefunden werden: Wir denken uns die Stäbe 1 und 2 zunächst in c voneinander gelöst, parallel und in unveränderter Länge an die Punkte a_1 und b_1 verschoben, wobei c nach c_a bezw. c_b gelangt. Zufolge der Längenänderungen

$\Delta 1$ und $\Delta 2$ bewegt sich c_a nach c_a' und c_b nach c_b'. Beschreibt man jetzt mit den Strecken $a_1 c_a'$ und $b_1 c_b'$ je einen Kreisbogen um a_1 und b_1, so erhält man im Schnitt beider die neue Lage von c_1. Bei den hier in Frage kommenden verhältnismäfsig sehr geringen Verschiebungen kann man mit völlig hinreichender Genauigkeit die Kreisbögen $c_a' c_1$ und $c_b' c_1$ je durch eine Gerade senkrecht zu $a_1 c_a'$, bezw. zu $b_1 c_b'$ ersetzen.

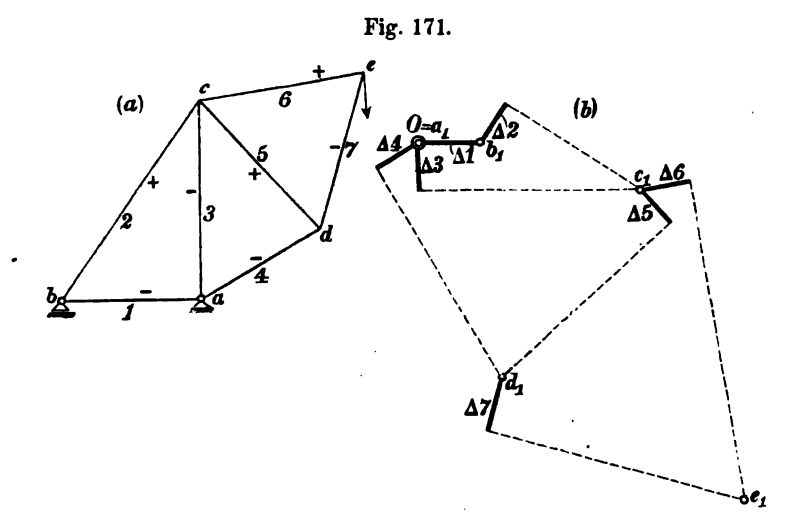
Es ist nun zweckmäfsig, die Verschiebung $c c_1$ des Punktes c nicht im Zusammenhange mit dem Liniennetz abc, sondern in angemessener Vergröfserung für sich allein darzustellen, indem man von irgend einem Punkt O (Fig. 170*b*) ausgehend, zunächst nach Richtung und Gröfse die Verschiebungsstrecken $a a_1 = c c_a = O a_1$ und $b b_1 = c c_b = O b_1$ der Punkte a und b anträgt, sodann in a_1 und b_1 die Längenänderung $\Delta 1$ und $\Delta 2$ nach Richtung und Gröfse hinzufügt und in den Endpunkten der letzteren Lote errichtet, die sich in c_1 schneiden. Die dadurch entstehende Figur nennt man den „Verschiebungsplan“ der Knoten a, b und c und O den Pol desselben. Die Polstrahlen $O a_1$, $O b_1$ und $O c_1$ stellen ersichtlich nach Richtung und Gröfse die Verschiebungen der Punkte a, b und c dar, und zwar erscheint die Richtung vom Pol O abweisend. Bei Antragung der Längenänderungen ist besonders auf das Vorzeichen derselben und den daraus sich ergebenden, übrigens leicht zu erkennenden Richtungssinn der entsprechenden Strecken im Verschiebungsplane zu achten.

Fig. 171 stellt ein einfaches Dreiecksfachwerk dar, das in a durch ein festes und in b durch ein bewegliches Stützgelenk gehalten und etwa in e von einer Einzellast ergriffen ist.

Die unter der Wirkung dieser Last in dem Fachwerk entstehenden Stabkräfte, wie die danach entstehenden Längenänderungen der einzelnen Stäbe sind ihrem Sinne nach an den einzelnen Stäben durch ihre Vorzeichen + und — kenntlich gemacht. Der Verschiebungsplan (Fig. 171*b*) des Fachwerkes entwickelt sich von dem beliebig gewählten Pol O ausgehend wie folgt: Der Knoten a liegt fest, a_1 fällt in den Pol; b verschiebt sich um $\Delta 1$ nach rechts, $O b_1 = \Delta 1$; c verschiebt sich gegen b in der Richtung bc um $\Delta 2$, in gleicher Richtung ist $\Delta 2$ von b_1 aus anzutragen; c verschiebt sich ferner in der Richtung ca um $\Delta 3$ gegen a, in gleicher Richtung ist $\Delta 3$ von O aus anzutragen. Durch die Senkrechten in

den Endpunkten der Strecken $\Delta 2$ und $\Delta 3$ gegen diese Strecken ist c_1 bestimmt. Der Knoten d verschiebt sich in der Richtung da gegen a um $\Delta 4$ und in der Richtung cd um $\Delta 5$ gegen c; in

Fig. 171.

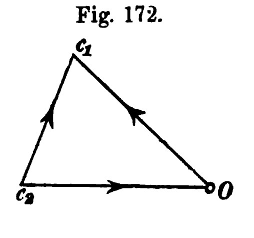


gleichen Richtungen sind $\Delta 4$ und $\Delta 5$ von O und c_1 aus anzutragen; durch die in den Endpunkten beider Strecken $\Delta 4$ und $\Delta 5$ gegen sie errichteten Senkrechten wird der Punkt d_1 festgelegt. In gleicher Weise erhält man die Lage des Punktes e_1 und würden die Verschiebungen etwa weiterer Knotenpunkte ermittelt werden können. Letztere selbst werden durch die in Fig. 171 *b* nicht gezeichneten Polstrahle Ob_1, Oc_1, Od_1 usw. ausgedrückt. Will man die Verschiebung eines Punktes in bestimmter Richtung haben, so hat man den betreffenden Polstrahl senkrecht gegen diese Richtung zu projizieren.

Mit Hülfe des Verschiebungsplans (Fig. 171 *b*) ist sowohl die Lage eines jeden Knotenpunktes im Fachwerk (Fig. 171 *a*) nach eingetretener Formänderung als auch diese selbst völlig bekannt geworden. Diese beiden Zwecke können vielfach nicht durch Zeichnung eines einzigen Verschiebungsplanes allein erreicht werden; insbesondere dann nicht, wenn das Fachwerk nicht so gestützt ist, dafs von einem der Stäbe die Lage eines Punktes seiner Mittellinie und die Richtung derselben bei eintretender Formänderung des Fachwerks unverändert bleiben, wie dies z. B. beim Stabe 1

Fig. 171 zutrifft. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so kann man mit Hülfe eines Verschiebungsplanes nur die Formänderung des Fachwerks an sich bestimmen, hat aber die Lage desselben nach eingetretener Formänderung noch besonders zu ermitteln. Es ist dann wie folgt zu verfahren: Man nimmt zunächst die Richtung irgend eines Stabes und irgend einen Punkt seiner Mittellinie in seiner Lage unveränderlich an und zeichnet, wie zuvor dargelegt, einen Verschiebungsplan, der jetzt nur die gegenseitige, nicht aber die absolute, wirkliche Verschiebung aller Knotenpunkte ergibt, nur die Formänderung des Fachwerkes an sich, nicht aber seine richtige Lage nach eingetretener Formänderung erkennen läfst. Um diese zu finden, ist das Fachwerk in seiner veränderten Form noch so zu verrücken, dafs die Auflagerungsbedingungen erfüllt werden, d. h. dafs die zuvor gemachte willkürliche Annahme, wonach die Richtung eines Stabes und die Lage eines Punktes seiner Mittellinie unverändert bleiben, was u. a. zu einer teilweisen Trennung des Fachwerkes von seinen Stützen führen müfste, ausgeglichen wird, das Fachwerk auch nach eingetretener Formänderung in richtiger Berührung mit seinen Stützen bleibt. Bei der zu diesem Zwecke erforderlichen nachträglichen Ausgleichsbewegung kann das Fachwerk als starre Scheibe und die zumeist sehr kleine Bewegung selbst als Drehbewegung um einen Punkt O' angesehen werden. Zu der durch den Verschiebungsplan ermittelten elastischen Bewegung aller Knotenpunkte, die wir als von dem Pole des Verschiebungsplanes abweisend erhalten haben, tritt also für jeden Knoten noch eine zweite unelastische Verrückung, die wir so in den Verschiebungsplan eintragen wollen, dafs sie nach dem Pol O hinzeigt. Ist beispielsweise $O c_1$ (Fig. 172) die elastische Verschiebung irgend eines Knotens c, so soll die nachträgliche Ausgleichsbewegung in der Richtung $c_2 O$ angetragen werden. Die wirkliche Verschiebung von c ist dann $c_2 c_1$.

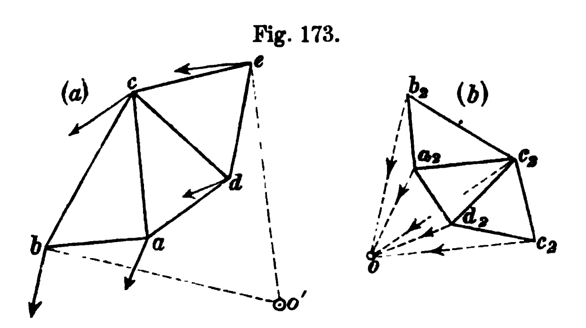
Fig. 172.



Ist die Bewegungsrichtung zweier Knoten eines Fachwerkes (Fig. 173 *a*), etwa b und e, während der Ausgleichsbewegung bekannt, so findet man den Drehpunkt O' der Bewegung im Schnittpunkt zweier Senkrechten jener Bewegungsrichtungen in b und e.

Die ganze Bewegung ist nun bekannt, wenn noch für einen Punkt der Weg nach Gröfse und Richtungssinn gegeben ist.

Fig. 173.

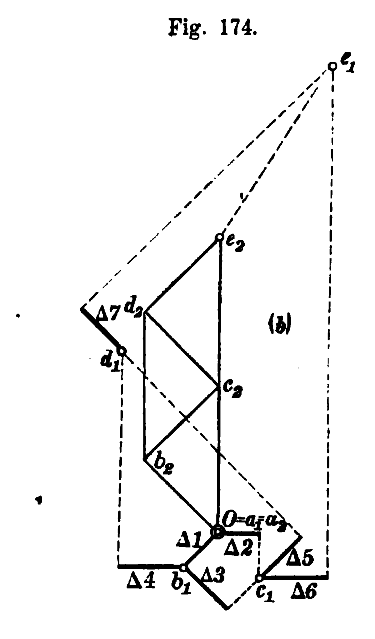


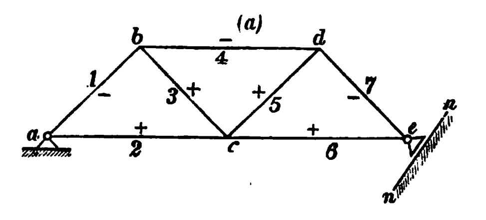
Denkt man sich nun die Wege der einzelnen Knoten während der Drehbewegung um O' nach Richtung und Gröfse so an den Pol O (Fig. 173*b*) des Verschiebungsplanes angetragen, dafs die Richtung nach dem Pole hinzeigt, und verbindet die Endpunkte a_2, b_2, c_2, d_2 und e_2 der Bewegungsstrecken, so entsteht eine dem Liniennetz $a\,b\,c\,d\,e$ des Fachwerks ähnliche Figur $a_2\,b_2\,c_2\,d_2\,e_2$. Denn die Polstrahlen $O'a$, $O'b$ usw. sind verhältnisgleich den Polstrahlen Oa_2, Ob_2 usw. als Wegestrecken der Punkte a, b, c usw.; auch sind die einander entsprechenden Polstrahlen senkrecht zu einander, und daher die einander entsprechenden Winkel beider Figuren einander gleich; $\measuredangle\, a\,O'\,b = \measuredangle\, a_2\,O\,b_2$, $\measuredangle\, b\,O'\,c = \measuredangle\, b_2\,O\,c_2$ usw.

Das System der Polstrahlen Oa_2, Ob_2 usw. wollen wir hier im Gegensatz zu dem Verschiebungsplan den „Verdrehungsplan" nennen. Aus beiden ergibt sich in den in Fig. 173*b* nicht gezeichneten Strecken $a_2\,a_1$, $b_2\,b_1$ usw. die wirkliche Verschiebung der einzelnen Knotenpunkte wie in Fig. 172 angegeben, und die nach vorstehendem zu entwickelnde Gesamtfigur verdient danach die Bezeichnung als „wirklicher Verschiebungsplan". Die Zeichnung des Verdrehungsplanes wird durch die nachgewiesene Ähnlichkeit der Figuren $a\,b\,c\,d\,e\ldots.$ und $a_2\,b_2\,c_2\,d_2\,e_2\ldots.$ sehr erleichtert. Hat man nämlich zwei der Punkte a_2, b_2, c_2 usw. ermittelt, so erhält man die übrigen, indem man zwischen beiden Punkten eine dem Liniennetz des Fachwerks ähnliche Figur zeichnet. Die einzelnen Linien beider Netze stehen senkrecht aufeinander.

Als Beispiel möge jetzt der wirkliche Verschiebungsplan zu dem einfachen Dreiecksfachwerk *abcde* (Fig. 174*a*) entwickelt werden. Der Balken ist in *a* durch ein festes, in *e* durch ein in der Richtung *nn* verschiebliches Stützgelenk gehalten und so belastet, dafs in den Stäben 1, 4 und 7 Druck- und in den übrigen Zugspannungen entstehen. Die Längenänderungen $\varDelta$ 1, $\varDelta$ 2, $\varDelta$ 3 usw. seien danach bereits berechnet. Ersichtlich behält keiner der Stäbe während der Formänderung seine Richtung bei. Wir wollen daher zunächst die Richtung des Stabes 1 und den Endpunkt *a* seiner Mittellinie in seiner Lage als unveränderlich annehmen und von dem beliebigen Pole O ausgehend, in oben dargelegter Weise den Verschiebungsplan $O\,b_1\,c_1\,d_1\,e_1$ (Fig. 174*b*), in welchem a_1 mit O zusammenfällt, zeichnen. Der Plan läfst erkennen, dafs bei der gemachten Voraussetzung gleichbleibender Richtung des Stabes 1 der Punkt *e* sich in der Richtung $O\,e_1$ bewegen, also von seiner Stütze trennen würde. Es bleibt also die entsprechende Ausgleichsbewegung hinzuzufügen, der Verdrehungsplan zu zeichnen. Da der Punkt *a* sich nicht verschiebt, so fällt a_1 und a_2 mit O zusammen. Die wirkliche Verschiebungsrichtung von *e* mufs sein $\parallel nn$, e_2 also auf einer durch e_1 gezogenen Parallelen zu *nn* liegen. Ferner mufs e_2 auch auf einer durch O senkrecht zu *ae* gezogenen Geraden liegen, weil die einander entsprechenden Geraden der ähnlichen Liniennetze *abcde* und $O\,b_2 c_2 d_2 e_2$ aufeinander senkrecht

Fig. 174.





stehen. Damit sind die Punkte a_2 (in O) und e_2 der wirklichen Verschiebungsfigur bekannt und durch Zeichnung des Liniennetzes $O\,b_2 c_2 d_2 e_2$ ist der Verschiebungsplan selber gefunden. Die Strecken $a_2 a_1$, $b_2 b_1$, $c_2 c_1$ usw. stellen die wirklichen Verschiebungen der einzelnen Fachwerksknoten und damit die Formänderung des Fachwerks in vollem Umfange dar.

Aus Fig. 174 *b* ist ersichtlich und durch freie Überlegung erkennt man, dafs, wenn ein Stab nahe dem einen Trägerende in einem seiner Punkte und in seiner Richtung zunächst unverschieblich vorausgesetzt wird, die Verschiebungen der Knoten nahe am anderen Ende verhältnismäfsig grofs ausfallen, was zu unbequemer Gestaltung des Verschiebungsplanes führen kann. Um das zu vermeiden, ist es vielfach zweckmäfsig, einen Stab nahe der Trägermitte in der bezeichneten Weise zunächst unverschieblich anzunehmen.

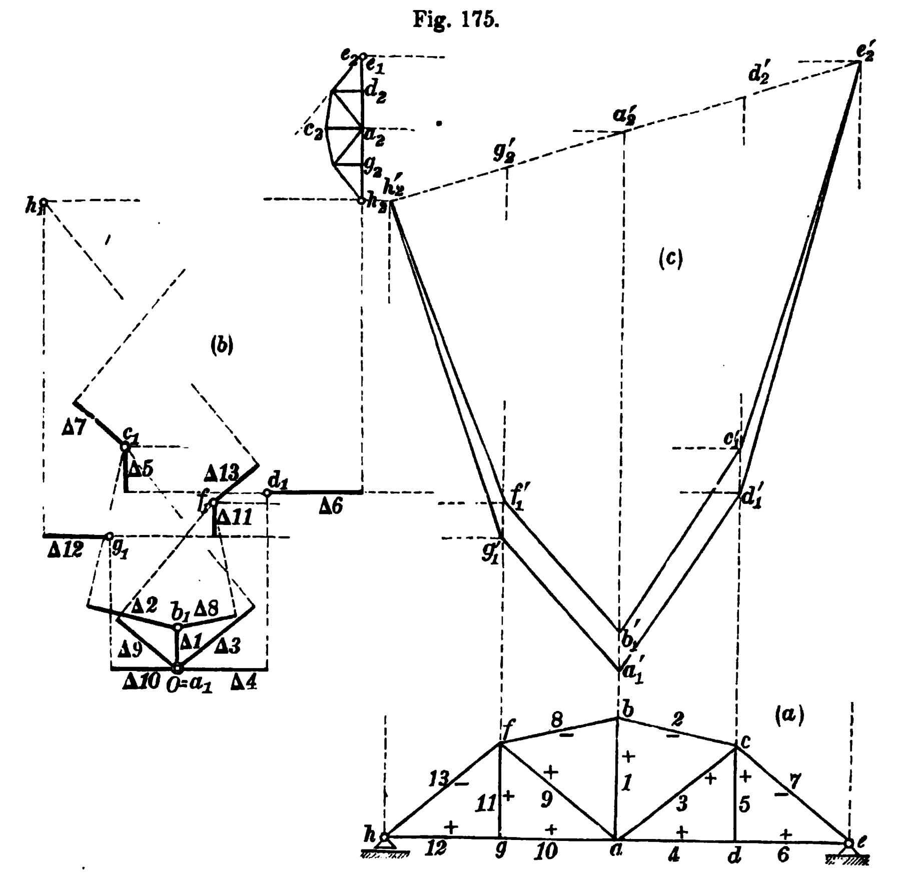
In dem in einem Endknoten e durch ein festes und im anderen h durch ein wagerecht verschiebliches Stützgelenk festgehaltenen Fachwerkträger (Fig. 175 *a*) werde der Ständer 1 in seinem unteren Endpunkte a und in lotrechter Richtung vorläufig unverschieblich angenommen und danach in bekannter, aus der Fig. 175 *b* ersichtlichen Weise die Punkte $b_1, c_1, d_1, e_1 \dots h_1$ des vorläufigen Verschiebungsplanes ermittelt.

Die Lagen der Punkte e_2 und h_2 im wirklichen Verschiebungsplan ergeben sich nun aus der Überlegung, dafs der Knotenpunkt e sich überhaupt nicht verschiebt, e_2 also mit e_1 zusammenfallen, $e_2 e_1 = 0$ sein mufs, dafs der Knoten h sich auf wagerechter Bahn bewegt, h_2 also auf einer Wagerechten durch h_1 liegen und endlich $h_2 e_2 \perp h e$ sein mufs. Die Zeichnung des dem Trägernetz ähnlichen Liniennetzes $a_2 b_2 c_2 \dots h_2$ zwischen den Punkten h_2 und e_2 führt zur Bestimmung der Punkte b_2, $c_2 \dots f_2$ und g_2 des wirklichen Verschiebungsplanes.

Vielfach kommt es hauptsächlich darauf an, die lotrechten Verschiebungen der Knotenpunkte einer der beiden Gurtungen in übersichtlicher Form zu erhalten. Diese Verschiebungen sind in den lotrechten Abständen der Punkte a_1 und a_2, b_1 und b_2 usw. im Verschiebungsplane bereits bekannt. Projiziert man beide Punktgruppen gegen die betreffenden Knotenlote (Fig. 175 *c*), so kommen die Punkte a_2', b_2', c_2' usw. in eine Gerade $e_2' h_2'$ zu liegen, während die Punktgruppen e_2', c_1', b_1', f_1' und h_1', sowie e_1', d_1', a_1', g_1' und h_1', in denen h_1' mit h_2' und e_1' mit e_2' zusammenfallen, je einen gebrochenen Linienzug,

das sogenannte „Biegungsvieleck", oder die „Biegungslinie" der oberen bezw. unteren Gurtung bilden. Die Gerade $h_2' e_2'$ ist die gemeinsame Schlufslinie derselben, die Grundlinie, gegen welche die Durchbiegung in den einzelnen Knotenpunkten des Trägers zu messen ist.

Fig. 175.



In gleicher Weise kann man auch die wagerechte Verschiebung der einzelnen Knotenpunkte durch ein Biegungsvieleck darstellen.

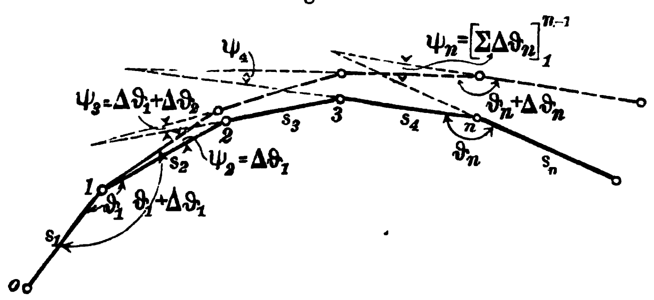
Würde die Verschiebung der Knoten h und e (Fig. 175a) in der Richtung des Stabes 1 gegen a gleich ausfallen, h_1 und e_1 also im Verschiebungsplane (Fig. 175b) in gleiche Höhe zu liegen kommen, so würde e_2 mit h_2 und folglich auch alle Punkte a_2, b_2, c_2 usw. in einen Punkt zusammenfallen und die Schlufslinie der Biegungsvielecke beider Gurtungen wagerecht liegen.

c) Die Biegungslinie als Seileck.

Die Formänderung eines sogenannten Stabzuges, d. h. eines Stabgebildes, bei dem jeder Stab mit dem vorhergehenden und dem nachfolgenden gelenkartig verbunden ist, wie beispielsweise bei den Gurtungen eines Fachwerkträgers, kann man lediglich aus der Längenänderung der Stäbe und den Änderungen der Winkel ϑ, welche die Mittellinien zweier aufeinander folgender Stäbe miteinander einschließen, bestimmen. In folgendem mögen die Knotenpunkte eines Stabzuges (Fig. 176) von einem Ende beginnend mit 0, 1, 2 . . . n, die Stablängen mit $s_1, s_2 \ldots s_n$, die von zwei benachbarten Stäben eingeschlossenen Winkel mit $\vartheta_1, \vartheta_2 \ldots \vartheta_n$ und die die Formänderung des Stabzuges bedingenden Änderungen dieser Werte mit $\Delta s_1, \Delta s_2 \ldots \Delta s_n$, bezw. $\Delta\vartheta_1, \Delta\vartheta_2 \ldots \Delta\vartheta_n$ bezeichnet werden. Die Änderungen $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n$, welche die Richtungen der einzelnen Stäbe erfahren, berechnen sich dann, wenn man sich einen der Stäbe, etwa den ersten, in seiner Richtung festgehalten denkt, zu $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = \Delta\vartheta_1$, $\psi_3 = \psi_2 + \Delta\vartheta_2 = \Delta\vartheta_1 + \Delta\vartheta_2$ $\psi_n = [\Sigma\Delta\vartheta]_1^{n-1}$, wobei selbstverständlich die Vorzeichen der einzelnen $\Delta\vartheta$-Werte zu berücksichtigen sind. (Vergl. Fig. 176.)



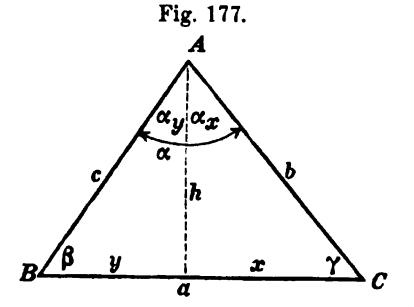
Fig. 176.



Ist der Stabzug Gurtung eines Fachwerkträgers, so hängen die einzelnen Winkeländerungen $\Delta\vartheta$ und also auch die summarischen Änderungen ψ der Richtungen der einzelnen Gurtstäbe nicht nur von den Längenänderungen dieser selbst, sondern auch von derjenigen der Wandglieder ab. In folgendem sollen diese Winkeländerungen unter der Voraussetzung eines einfachen Dreieckfachwerkes bestimmt werden. Wir führen sie zurück auf die Winkeländerungen in den einzelnen Dreiecken, aus denen das Fachwerk besteht. Das Dreieck

ABC (Fig. 177) gehöre einem solchen Fachwerk an, und seine Seiten a, b und c erfahren die Längenänderungen Δa, Δb und Δc. Ein Lot h von A auf die Gegenseite a gefällt, teile diese in die Abschnitte x und y. Sind ferner α_x und α_y die entsprechenden Teile des Winkels α, so ist

Fig. 177.



1) $\sin \alpha_x = \frac{x}{b}$ und

2) $\sin \alpha_y = \frac{y}{c}$.

Da die Längen- und Winkeländerungen sehr klein ausfallen, so kann man die Abhängigkeit beider voneinander mit hinreichender Genauigkeit durch Differentiation aus den Gl. 1 und 2 ableiten. Wir erhalten

3) $\cos \alpha_x \cdot \Delta \alpha_x = \frac{b \cdot \Delta x - x \cdot \Delta b}{b^2}$ und 4) $\cos \alpha_y \cdot \Delta \alpha_y = \frac{c \cdot \Delta y - y \cdot \Delta c}{c^2}$

und daraus

$$5) \qquad \Delta \alpha = \Delta \alpha_x + \Delta \alpha_y = \frac{\Delta x - x \frac{\Delta b}{b}}{b \cdot \cos \alpha_x} + \frac{\Delta y - y \cdot \frac{\Delta c}{c}}{c \cdot \cos \alpha_y},$$

oder auch, da $b \cos \alpha_x = c \cdot \cos \alpha_y = h$ ist,

$$6) \qquad \Delta \alpha = \frac{x}{h}\left(\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta b}{b}\right) + \frac{y}{h}\left(\frac{\Delta y}{y} - \frac{\Delta c}{c}\right).$$

Nun drücken die Quotienten in den Klammern die Dehnungen in den Dreiecksseiten aus. Bezeichnen wir die Spannungen in denselben mit σ_a, σ_b und σ_c, so ist $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\sigma_a}{E}$, $\frac{\Delta b}{b} = \frac{\sigma_b}{E}$ und $\frac{\Delta c}{c} = \frac{\sigma_c}{E}$, worin E die für alle Stäbe gleiche Elastizitätszahl bezeichnet. Beachten wir noch, dafs $\frac{x}{h} = \operatorname{cotg} \gamma$ und $\frac{y}{h} = \operatorname{cotg} \beta$, so schreibt sich Gl. 6

$$7) \qquad \ldots E \Delta \alpha = (\sigma_a - \sigma_b) \operatorname{cotg} \gamma + (\sigma_a - \sigma_c) \operatorname{cotg} \beta.$$

In gleicher Weise erhält man für die anderen Dreieckswinkel die Änderungen

$$8) \qquad \begin{cases} E \cdot \Delta \beta = + (\sigma_b - \sigma_c) \operatorname{cotg} \alpha + (\sigma_b - \sigma_a) \operatorname{cotg} \gamma \\ E \cdot \Delta \gamma = + (\sigma_c - \sigma_a) \operatorname{cotg} \beta + (\sigma_c - \sigma_b) \operatorname{cotg} \alpha \end{cases}.$$

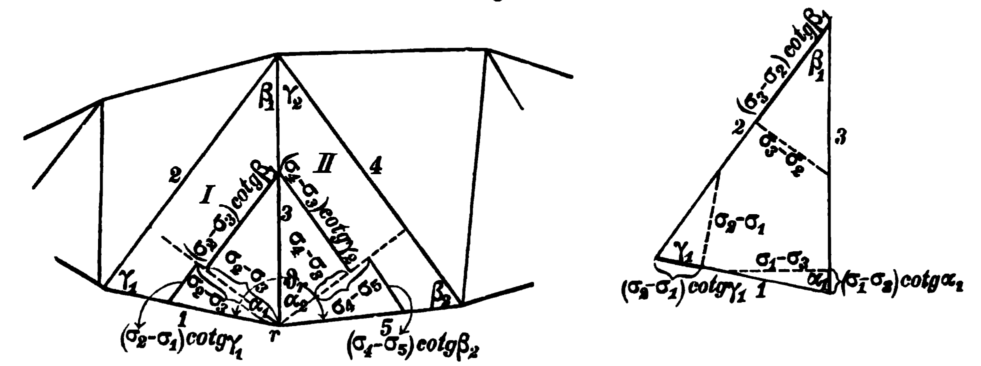
Dabei ist zu bemerken, daß die einzelnen Summanden rechtsseits der Gl. 7 je einmal positiv und einmal negativ vorkommen, so daß die Summe der drei Winkeländerungen sich gleich Null herausstellt, ein Ergebnis, das erklärlich wird, wenn man bedenkt, daß die Summe der drei Winkel eines Dreiecks sich nicht ändert. Sind also die Änderungen zweier Winkel bestimmt, so ergibt sich die Änderung des dritten aus der Gleichung $\varDelta\alpha + \varDelta\beta + \varDelta\gamma = 0$.

Kommen neben den elastischen Dehnungen noch Ausdehnungen der Stäbe durch Temperaturschwankungen vor, so kann man diese durch entsprechende Spannungszuschläge $\varepsilon \cdot t \cdot E$ berücksichtigen, wo einer Temperaturabnahme eine Druck-, einer Zunahme eine Zugspannung entspricht.

Handelt es sich um die Änderung des Winkels ϑ_r an dem Knotenpunkte r eines Fachwerks (Fig. 178), in welchem die Dreiecke I und II mit den Winkeln α_1 und α_2 zusammentreten, so ist $\vartheta_r = \alpha_1 + \alpha_2$ und daher

$$\varDelta\vartheta_r = \varDelta\alpha_1 + \varDelta\alpha_2 . \tag{9}$$

Fig. 178.



Sind nun σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 und σ_5 die Spannungen in den die Dreiecke I und II einschließenden Stäben 1, 2, 3, 4 und 5, so ist nach Gl. 7

$$E \cdot \varDelta\alpha_1 = (\sigma_2 - \sigma_1)\,\mathrm{cotg}\,\gamma_1 + (\sigma_2 - \sigma_3)\,\mathrm{cotg}\,\beta_1 \quad \text{und}$$

$$E \cdot \varDelta\alpha_2 = (\sigma_4 - \sigma_3)\,\mathrm{cotg}\,\gamma_2 + (\sigma_4 - \sigma_5)\,\mathrm{cotg}\,\beta_2$$

und daher

$$\left\{ \begin{aligned} E \cdot \varDelta\vartheta_r = (\sigma_2 - \sigma_1)\,\mathrm{cotg}\,\gamma_1 + (\sigma_2 - \sigma_3)\,\mathrm{cotg}\,\beta_1 + (\sigma_4 - \sigma_3)\,\mathrm{cotg}\,\gamma_2 \\ + (\sigma_4 - \sigma_5)\,\mathrm{cotg}\,\beta_2 . \end{aligned} \right. \tag{10}$$

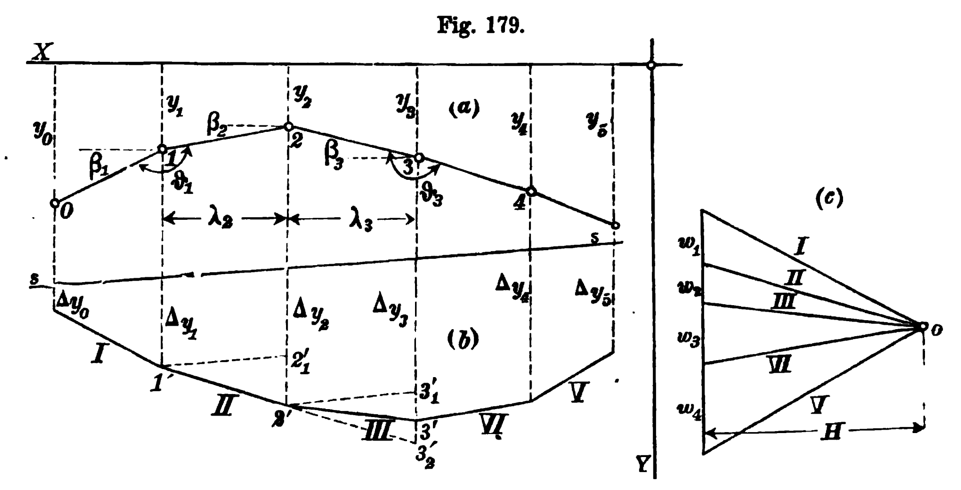
Mit Hülfe der Gl. 10 kann man die Änderungen aller Winkel ϑ, welche die Gurtstäbe miteinander einschließen, durch Rechnung finden. Die Anzahl der Glieder der rechten Seite ist dabei stets doppelt so groß, als die Zahl der Dreiecke, welche je mit einem Winkel in dem betreffenden Knoten zusammentreten.

Die einzelnen Summanden im Ausdrucke für $\Delta \vartheta_r$ können, wenn die Spannungen bekannt sind, leicht wie folgt auch durch Zeichnung gefunden werden: Auf den vom Knoten r auf die gegenüberliegenden Seiten 2 und 4 der Dreiecke I und II gefällten Loten trägt man von r aus die Spannungsunterschiede, wie aus der Figur ersichtlich, nach einem geeigneten Maßstabe auf und zieht durch die Endpunkte der betreffenden Strecken Parallelen zu den Dreiecksseiten 2 und 4. Die Abschnitte dieser Parallelen, welche von den Höhen der Dreiecke und deren in r zusammentretenden Seiten begrenzt werden, drücken jene Summanden aus. Eine weitere vielfach vorteilhafte zeichnerische Ermittelung der Summanden ist in Fig. 178a angedeutet und aus derselben ohne weiteres ersichtlich. Die Vorzeichen der die Summanden ausdrückenden Abschnitte werden durch diejenigen der betreffenden Spannungsunterschiede und der Cotangenten der zugehörigen Winkel bestimmt und sind leicht zu beurteilen.

Wir bedenken nun, daſs die Biegungslinie der Gurtung eines Fachwerkes oder irgend eines anderen Stabzuges wie jedes Vieleck als Seileck beliebiger endlicher, insbesondere auch paralleler Kräfte angesehen werden kann. Es handle sich um die Biegungslinie eines Stabzuges 01234 ... n ... (Fig. 179a). Die Verschiebungen Δy_0, Δy_1, Δy_2 ... Δy_n, welche die Knoten des beliebig belasteten Stabgebildes in einer bestimmten Richtung erfahren, seien in dieser Richtung von einer zunächst beliebig angenommenen Geraden ss aus aufgetragen und durch Verbindung der so erhaltenen Punkte die Biegungslinie für die Verschiebungen in jener Richtung hergestellt (Fig. 179b). Es soll nun untersucht werden, für welche in der Verschiebungsrichtung wirkend gedachten, durch die Knickpunkte der Biegungslinie gehenden Parallelkräfte diese sich als Seileck ergibt. Die von dem beliebig angenommenen Pol O ausgehenden Polstrahlen I, II, III usw. (Fig. 179c) müssen den entsprechenden Seiten des Biegungsvielecks parallel sein und liegen dadurch fest. Legen wir jetzt durch den so erhaltenen Büschel der Polstrahlen eine zur Verschiebungsrichtung parallele Gerade, so

schneiden die Strahlen auf dieser Geraden w_1, w_2 usw. ab, die, als Kräfte gedacht, in ihrem Größenverhältnis zueinander die Biegungslinie als Seileck ergeben. Ziehen wir nun durch irgend zwei

Fig. 179.



benachbarte Knickpunkte der Biegungslinie, etwa durch 1′ und 2′ zur Geraden ss Parallelen $\overline{1'2'_1}$ und $\overline{2'3'_1}$ je bis zur nächsten Kraftlinie und verlängeren die Seite II bis zum Schnitt $3'_2$ mit der Kraftlinie durch 3′, so erhalten wir aus der Figur leicht

$$\overline{3'_2 3'_1} = (\varDelta y_2 - \varDelta y_1)\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \text{ und } \overline{3' 3'_1} = \varDelta y_3 - \varDelta y_2,$$

und indem wir beide Gleichungen voneinander abziehen

$$\overline{3'_2 3'} = (\varDelta y_2 - \varDelta y_1)\frac{\lambda_3}{\lambda_2} - (\varDelta y_3 - \varDelta y_2), \tag{10}$$

worin λ_1, λ_2 usw. die Abstände der durch die Knoten des Stabzuges in der Verschiebungsrichtung gezogenen Parallelen voneinander bezeichnen.

Ist nun H die vorläufig beliebig angenommene Polweite, so ist ferner wegen des Parallelismus der Polstrahlen *II* und *III* mit den Seilecksseiten *II* und *III* $\overline{3'_2 3'} = w_2 \cdot \lambda_3 : H$ und daher nach Gl. 10

$$w_2 = H\left[\frac{\varDelta y_2 - \varDelta y_1}{\lambda_2} + \frac{\varDelta y_2 - \varDelta y_3}{\lambda_3}\right], \text{ oder allgemein}$$

$$w_n = H\left[\frac{\varDelta y_n - \varDelta y_{n-1}}{\lambda_n} + \frac{\varDelta y_n - \varDelta y_{n+1}}{\lambda_{n+1}}\right]. \tag{11}$$

Sind jetzt y_0, y_1, y_2 . . . y_n die Ordinaten der Knotenpunkte des Stabzuges in irgend einem rechtwinkligen Koordinatenkreuz XY,

dessen Y-Achse in der Verschiebungsrichtung liegt, und $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ die Neigungswinkel der Stabachsen gegen die X-Achse, so ist

$$y_n - y_{n-1} = s_n \cdot \sin \beta_n. \tag{12}$$

Für die mit der Formänderung des Stabzuges eintretenden kleinen Änderungen Δy_n, Δy_{n-1}, Δs_n und $\Delta \beta_n$ erhält man mit hinreichender Genauigkeit durch Differenziation der Gl. 12 die Beziehung

$$\Delta y_n - \Delta y_{n-1} = \Delta s_n \cdot \sin \beta_n + s_n \cdot \cos \beta_n \cdot \Delta \beta_n.$$

Ferner ist nach der Figur

$$\lambda_n = s_n \cdot \cos \beta_n, \text{ und daher auch}$$

$$\frac{\Delta y_n - \Delta y_{n-1}}{\lambda_n} = \frac{\Delta s_n}{s_n} \cdot \operatorname{tg} \beta_n + \Delta \beta_n \text{ und ebenso}$$

$$\frac{\Delta y_{n+1} - \Delta y_n}{\lambda_{n+1}} = \frac{\Delta s_{n+1}}{s_{n+1}} \cdot \operatorname{tg} \beta_{n+1} + \Delta \beta_{n+1}.$$

Mit diesen Beziehungen zwischen den Änderungen der Ordinaten, Winkel und Stablängen und wenn man $H = 1$, gleich der Einheit der w-Werte setzt, nimmt Gl. 11 die Form an

$$w_n = \Delta \beta_n - \Delta \beta_{n+1} + \frac{\Delta s_n}{s_n} \operatorname{tg} \beta_n - \frac{\Delta s_{n+1}}{s_{n+1}} \operatorname{tg} \beta_{n+1}. \tag{13}$$

Da weiterhin $180^0 - \beta_n + \beta_{n+1} = \vartheta_n$ und demnach

$$-\Delta \beta_n + \Delta \beta_{n+1} = \Delta \vartheta_n, \text{ ferner}$$

$$\frac{\Delta s_n}{s_n} = \frac{\sigma_n}{E} \text{ und } \frac{\Delta s_{n+1}}{s_{n+1}} = \frac{\sigma_{n+1}}{E}, \text{ so wird auch}$$

$$E w_n = -\Delta \vartheta_n E + \sigma_n \cdot \operatorname{tg} \beta_n - \sigma_{n+1} \cdot \operatorname{tg} \beta_{n+1}. \tag{14}$$

Ändert in Gl. 14 einer der Winkel β_n oder β_{n+1} sein Vorzeichen, oder tritt bei beiden eine solche Änderung ein, so kehren auch die zugehörigen Tangentenwerte ihr Vorzeichen um, und ebenso sind bei Berechnung der Hülfskräfte w_n die Vorzeichen der Stabspannungen σ_n und σ_{n+1} zu berücksichtigen.

Es bleibt noch festzustellen, wie die zur Ermittelung der Biegungslinie als Seileck zu benutzenden Hülfskräfte w, nach Müller-Breslau „w-Gewichte" genannt, bewertet werden sollen. In Gl. 13 hat w_n ersichtlich die Bedeutung einer reinen Verhältniszahl, die wir als Kraft ansehen können. Gleichung 14 dagegen drückt die Gleichheit zweier Spannungswerte aus. Setzen wir darin die Einheit der w-Werte gleich E, so nimmt die Gleichung die Form an

$$w_n = \left\{ \frac{\sigma_n \operatorname{tg} \beta_n}{E} - \frac{\sigma_{n+1} \operatorname{tg} \beta_{n+1}}{E} - \Delta \vartheta_n \right\} E. \tag{15}$$

Darin ist der Klammerwert rechtsseits eine reine Zahl und daher w_n wie E eine Spannung, also wirklich eine Kraft. Zeichnen wir zu den nach Gl. 15 ermittelten w-Gewichten mit der Polweite $H = 1 = E$ ein Seileck, so erhalten wir damit die wirkliche Biegungslinie des Stabzuges, deren Ordinaten Δy im Längenmaſsstabe der Figur zu messen sein würden. Dabei würden diese indes meist so klein ausfallen, daſs der erreichte Genauigkeitsgrad den zu stellenden Anforderungen nicht genügen würde. Dieser Mangel läſst sich indes leicht beheben, wenn man die Polweite nicht $H = 1 = E$, sondern m-fach kleiner wählt, also $H = \frac{E}{m}$ setzt. Die Δy erscheinen dann in m-fach gröſserem Maſsstabe.

Bei Aufzeichnung des Seilecks bleibt die Frage noch offen, wie die Schluſslinie ss, die Grundlinie für die Verschiebungsordinaten Δy festzulegen ist, da das Seileck zunächst nur in dem Linienzuge I, II, $III \ldots$ erscheint. Wir bedenken nun, daſs wenn die Verschiebungen Δy für irgend zwei Knoten bekannt sind, etwa für die beiden gestützten Knoten den Wert Null haben, damit auch die Schluſslinie des Seilecks festliegt.

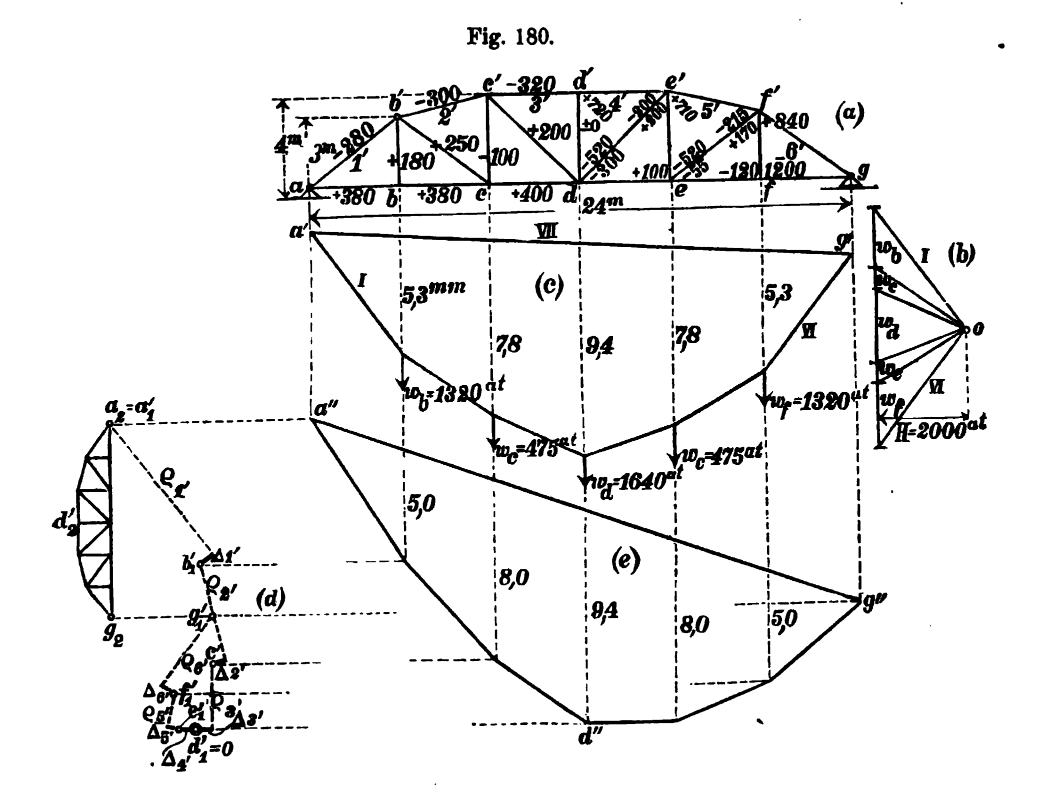
Handelt es sich nur um die Ermittelung der Verschiebungen Δy der Knoten in einer Richtung, etwa um die Durchbiegung der Gurtung eines Fachwerkbalkens, so ist die Aufgabe mit der Zeichnung des Seilecks zu den w-Gewichten in jener Richtung gelöst. Ist dagegen die Verschiebung der Knoten in der Ebene des Stabzuges ganz allgemein zu bestimmen, so würden noch für eine zweite etwa zur ersten senkrechte Richtung die Verschiebungen Δx zu ermitteln sein. Das könnte wiederum durch Zeichnung eines Seilecks zu den in der x-Richtung nach Gl. 15 zu berechnenden w-Gewichten geschehen, wobei $\operatorname{tg}\beta$ durch $-\operatorname{cotg}\beta$ zu ersetzen sein würde. In solchem Falle kommt man indes meist schneller durch Zeichnung eines Verschiebungsplanes zum Ziele, dessen vorteilhafte Zeichnung für diesen Zweck mit Hülfe der $\Delta\vartheta_n$- und Δs_n-Werte sogleich noch dargelegt werden soll. Von dieser Methode kann man zweckmäſsig auch dann Gebrauch machen, wenn die Verschiebungen in einer Richtung ermittelt werden sollen, die mit der Richtung eines der Glieder des Stabzuges zusammenfällt, in welchem Falle nämlich mit dem Richtungswinkel des Stabes $\beta = \frac{\pi}{2}$ sich für jeden der beiden benachbarten Knoten ein unendlich

großes w-Gewicht ergeben und die Zeichnung der Biegungslinie als Seileck daher Schwierigkeiten begegnen würde.

Wir wollen nun die Biegungslinie der unteren Gurtung des Bogensehnenträgers (Fig. 180 a) als Seileck ermitteln.

Der symmetrische Träger sei so belastet und seine Stäbe haben solche Stärkenabmessungen, daſs in ihnen die in die linke

Fig. 180.



Hälfte der Figur in at eingetragenen Spannungen entstehen. Die danach sich ergebenden Winkeländerungen $\Delta\alpha$, multipliziert mit E, sind nach Gl. 7 in der in Fig. 178 a dargelegten Weise zeichnerisch ermittelt und in die rechte Hälfte der Fig. 180 a in at in die betreffenden Winkel eingetragen. Da die untere Gurtung wagerecht ist und daher alle Winkel β (Fig. 179) gleich Null sind, so erhält man für die w-Gewichte einfach $w_n = E\Delta\vartheta_n$ und zwar werden

mit Bezug auf Fig. 180a und Gl. 15 für die Knotenpunkte b, c, d, e und f die lotrecht gedachten w-Gewichte der Reihe nach

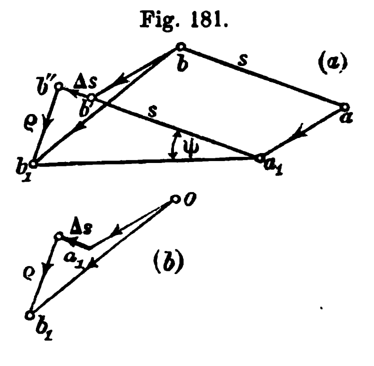
$$w_b = w_f = -(-1200 - 120) = 1320^{at},$$
$$w_c = w_e = -(100 - 520 - 55) = 475^{at} \quad \text{und}$$
$$w_d = -(-2\cdot 300 - 2\cdot 520) = 1640^{at}.$$

Diese w-Gewichte sind in Fig. 180b zu einem Krafteck lotrecht untereinander getragen und sodann ist mit der Polweite $H = \frac{E}{m} = \frac{2000000}{1000} = 2000^{at}$ das Seileck Fig. 180c gezeichnet. Da die Stützpunkte a und g lotrechte Verschiebungen nicht erfahren, so geht die Schlufslinie VII durch die Schnittpunkte a' und g' der Stützlote mit den Seilecksseiten I und VI. Die Verschiebungen Δy erscheinen bei der gewählten Polweite im Verhältnis zu dem Längenmafsstabe der Figur in 1000facher Vergröfserung.

Die Biegungslinie der oberen Gurtung wollen wir nun mit Hülfe eines Verschiebungsplanes aus den Richtungsänderungen ψ_1, $\psi_2 \ldots$ und den Längenänderungen $\Delta 1$, $\Delta 2$ usw. der Stäbe ableiten. Die anzuwendende Methode soll zunächst allgemein erläutert werden.

Wir verfolgen die Bewegung eines beliebigen Stabes ab (Fig. 181) irgend eines Fachwerkes während dessen Formänderung. Der Endpunkt a des Stabes bewege sich von a nach a_1, und aufserdem finde eine Richtungsänderung ψ und eine Längenänderung Δs des Stabes statt. Die Lage des Punktes b nach eingetretener Formänderung findet sich dann wie folgt: Man denkt sich den Stab zunächst parallel mit sich selbst in die Lage $a_1 b'$ verschoben, fügt die Längenänderung $\Delta s = b'b''$ hinzu und dreht den verlängerten Stab im Punkte a_1 um den Winkel ψ in die Lage $a_1 b_1$. Es ist dann der Kreisbogen $b'' b_1 = \psi(s + \Delta s)$. Bei der Kleinheit der in Frage kommenden Bewegungen kann man mit hinreichender Genauigkeit den Kreisbogen durch ein Lot $b'' b_1$ gegen $a_1 b''$ ersetzen und das Produkt der beiden sehr kleinen Gröfsen ψ und Δs gegen $\psi \cdot s$ vernachlässigen. Bezeichnet man die Länge des Lotes mit ϱ, so ist

Fig. 181.



16) $$\varrho = \psi \cdot s.$$

Nachdem die Gröfsen $\varDelta s$, ψ und ϱ ermittelt sind, kann die Lage des Punktes b_1 ohne Zeichnung der Fig. 181 a in der aus Fig. 181 b ersichtlichen Weise bestimmt werden. Wir tragen, von irgend-einem Pole O ausgehend, den Weg des Punktes a nach Richtung und Gröfse $o\,a_1 = a\,a_1$ an, fügen in a_1 unter Beachtung des Richtungssinns die Verlängerung $\varDelta s$ an und errichten in deren Endpunkte das Lot ϱ. Die Verschiebung des Punktes b ist dann nach Richtung und Gröfse gleich dem Polstrahl $O\,b_1$. Der Richtungssinn der Strecke ϱ hängt vom Vorzeichen der Richtungsänderung ψ des Stabes ab und ist leicht zu erkennen und zu berücksichtigen.

Nach dieser allgemeinen Darlegung entwickelt sich der Verschiebungsplan des Stabzuges der oberen Gurtung des Trägers (Fig. 180 a) wie folgt: Die Änderungen der in den Knoten b', c', d', e' und f' zusammentretenden Winkel sind in der Form $\varDelta\alpha \cdot E$ in Atmosphären in die rechte Hälfte der symmetrischen Fig. 180 a eingetragen, und zwar ist $\varDelta\vartheta_{b'} = \varDelta\vartheta_{f'} = 795^{\text{at}}$, $\varDelta\vartheta_{c'} = \varDelta\vartheta_{e'} = 710^{\text{at}}$ und $\varDelta\vartheta_{d'} = 2 \cdot 720 = 1440^{\text{at}}$. Um die wirklichen Winkeländerungen zu erhalten, sind diese Zahlen durch E zu teilen. Wir wollen uns nun den Stab 4′ in seiner Richtung und in seinem Endpunkte d' festgehalten denken, so dafs seine Richtungsänderung $\psi_{4'} = 0$ wird. Die übrigen Stäbe erleiden folgende Richtungsänderungen:

$$\psi_{5'} = \varDelta\vartheta_{e'} : E = 710 : E,$$
$$\psi_{6'} = (\psi_{5'} + \varDelta\vartheta_{f'}) : E = (710 + 795) : E = 1505 : E,$$
$$\psi_{3'} = \varDelta\vartheta_{d'} : E = 1440 : E,$$
$$\psi_{2'} = \psi_{3'} + \varDelta\vartheta_{c'} : E = (1440 + 710) : E = 2150 : E \quad \text{und}$$
$$\psi_{1'} = (2150 + 795) : E = 2945 : E.$$

Die Länge der Stäbe ist $1' = 6' = 5^{\text{m}}$, $2' = 5' = 4{,}10^{\text{m}}$, $3' = 4' = 4^{\text{m}}$. Die Längen $\varDelta s$ und die Strecken ϱ sollen nun wie die Verschiebungen $\varDelta y$ (Fig. 180 c) im Verhältnis zu dem Längenmafsstabe (Fig. 180 a) in 1000facher Vergröfserung aufgetragen werden.

Bei den in die linke Hälfte der Fig. 180 a eingetragenen Stabspannungen erhalten wir danach

$$\varDelta 1' = \varDelta 6' = -\frac{5 \cdot 280 \cdot 1000}{2\,000\,000} = -0{,}7^{\text{m}},$$
$$\varDelta 2' = \varDelta 5' = -\frac{300 \cdot 4{,}1 \cdot 1000}{2\,000\,000} = -0{,}615^{\text{m}} \quad \text{und}$$
$$\varDelta 3' = \varDelta 4' = -\frac{4 \cdot 320 \cdot 1000}{2\,000\,000} = -0{,}64^{\text{m}}.$$

Ferner wird nach Gl. 16

$$\varrho_{1'} = \frac{5 \cdot 2945 \cdot 1000}{2000000} = 7{,}36^{\text{m}}, \quad \varrho_{2'} = \frac{2150 \cdot 4{,}1 \cdot 1000}{2000000} = 4{,}4^{\text{m}},$$

$$\varrho_{3'} = \frac{1440 \cdot 4 \cdot 1000}{2000000} = 2{,}88^{\text{m}}, \quad \varrho_{4'} = 0, \quad \varrho_{5'} = \frac{710 \cdot 4{,}10 \cdot 1000}{2000000} = 1{,}46^{\text{m}},$$

$$\varrho_{6'} = \frac{1505 \cdot 5 \cdot 1000}{2000000} = 3{,}75^{\text{m}}.$$

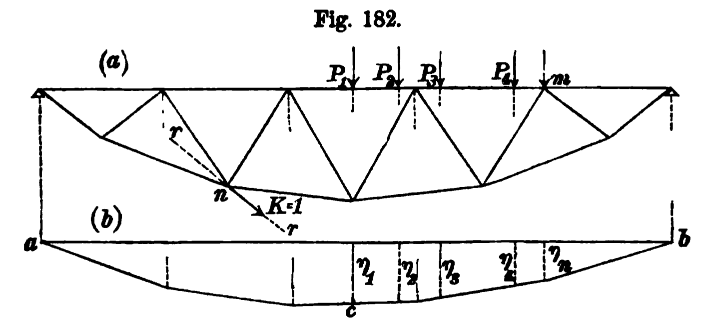
Bei Aufzeichnung des Verschiebungsplanes (Fig. 180*d*) ist von einem beliebigen Pol O ausgegangen, der mit d_1' zusammenfällt, weil d' zunächst als festliegend angenommen wurde. Der Punkt e' bewegt sich wagerecht um $\Delta 4'$ nach links; es ist $d_1' e_1' = \Delta 4'$. In e_1' wird $\Delta 5' \parallel 5'$ angetragen und im Endpunkte ein Lot von der Länge $\varrho_{5'}$ errichtet, wodurch f_1' festliegt. In gleicher Weise wird $\Delta 6'$ und $\varrho_{6'}$ hinzugefügt und g_1' erhalten. Ebenso erhält man für den Teil des Stabzuges links von d' im Verschiebungsplane die Punkte c_1', b_1' und a_1'. Der Stabzug ist noch so zu verschieben, dafs die Stützbedingungen erfüllt werden. Das feste Stützgelenk a verharrt an seiner Stelle; der Punkt a_2 des wirklichen Verschiebungsplanes (Fig. 180*d*) fällt mit a_1' zusammen. g_2 liegt lotrecht unter a_2, und da das Stützgelenk g nur wagerecht verschieblich ist, in der Wagerechten durch g_1'. Wir zeichnen nun zwischen die Punkte a_2 und g_2 den dem wirklichen Stabzuge $a\,d'\,g$ ähnlichen Streckenzug $a_2 d_2' g_2$ und erhalten in den Polstrahlen $O a_2$, $O b_2$ usw. die Verschiebungen der einzelnen Knotenpunkte des Stabzuges. Aus dem wirklichen Verschiebungsplane entwickeln wir in der auf S. 349 dargelegten Weise die Biegungslinie $a'' d'' g''$ (Fig. 180*e*) des Stabzuges $a\,d'\,g$.

Die beiden Biegungslinien des Ober- und Untergurtes (Fig. 180*c* und Fig. 180*e*) hätte man auch einfach durch Berücksichtigung der Längenänderungen der Ständer auseinander entwickeln können, woraus sich eine wirksame Kontrolle ergibt. Im Mittelständer sind z. B. die Spannung und Längenänderung gleich Null, d und d' bewegen sich lotrecht um dasselbe Mafs $9{,}4^{\text{mm}}$. Für den Verschiebungsplan (Fig. 180*d*) ergibt sich noch daraus eine Kontrolle, dafs die Strecke $g_2 g_1'$ die auch anderweit leicht zu berechnende gesamte Längenänderung des Stabzuges der unteren Gurtung darstellt.

d) Die Biegungslinie als Einflufslinie für elastische Verschiebungen.

Die elastische Verschiebung, welche irgend ein Punkt n eines Fachwerks in einer bestimmten Richtung unter der Wirkung einer Gruppe P von Parallelkräften, etwa lotrechter Lasten, erfährt, kann unter Umständen vorteilhaft mit Hülfe einer Einflufslinie ermittelt werden. Es soll hier die Einflufslinie für die Verschiebung des Knotens n des in Fig. 182a dargestellten Fachwerkträgers in der Richtung rr für lotrechte Lasten entwickelt werden. Wir lassen

Fig. 182.



im Knoten n in der Richtung rr eine Kraft $K = 1$ angreifen, ermitteln in bekannter Weise die dadurch entstehenden Stabkräfte S, die Stabspannungen und die Längenänderungen Δs der Stäbe und bestimmen nach einem der unter b erläuterten Verfahren die den Δs-Werten entsprechende Biegungslinie abc (Fig. 182b) des belasteten Gurtes für die Verschiebungen in der Richtung der Lasten.

Nach dem Maxwell'schen Satze ist dann die Verschiebung, welche eine in irgend einem Knoten m angreifende Kraft $P = 1$ im Knoten n in der Richtung rr erzeugt, ebenso grofs wie die lotrechte Verschiebung η_m, welche die in n in der Richtung rr wirkende Kraft $K = 1$ im Knoten m hervorbringt. Die Verschiebungsordinate η_m des Punktes m gemessen in der Richtung der Lasten ist daher zugleich Einflufsordinate für die Verschiebung δ_n^r des Punktes n in der Richtung rr und die Gesamtverschiebung δ_n^r erhält man in der Form

$$\delta_n^r = P_1 \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 + \ldots = \Sigma P \cdot \eta\,.$$

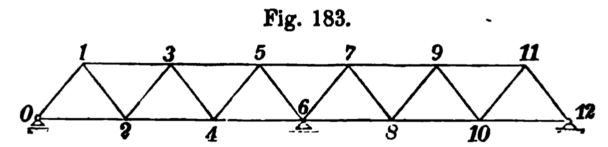
Haben die angreifenden äufseren Kräfte P verschiedene Richtung, so läfst sich ihr Einflufs auf die Verschiebung δ_n^r nicht durch eine

Einflußlinie darstellen. Man erkennt aber leicht, daß der Einfluß einer jeden Kraft verhältnisgleich ist der Verschiebung, welche ihr Angriffspunkt in ihrer Richtung durch die Kraft Eins in dem Punkte n angreifend, erfährt und die man als Einflußzahl der Kraft in Bezug auf die gesuchte Verschiebung bezeichnen kann.

e) Anwendung auf statisch unbestimmte Fachwerke.

Ein statisch unbestimmtes Fachwerk entsteht, wenn im Gleichgewicht der an und im Fachwerk tätigen äußeren und inneren Kräfte ein oder mehrere statische Zwecke doppelt erfüllt werden, d. h. wenn ein oder mehrere bereits unverschieblich festliegende Knotenpunkte des Fachwerks noch weiter festgehalten werden. Geschieht dies, indem in ein statisch bestimmtes Fachwerk von $2n - 3$ Stäben über diese Zahl hinaus noch weitere Stäbe hineingefügt, also gewisse Knoten des Fachwerks gegenseitig mehr als einfach festgehalten werden, so nennen wir das Fachwerk „innerlich“, d. h. in sich, statisch unbestimmt, oder kinematisch überbestimmt. Erfährt dagegen ein in sich statisch bestimmtes und in statisch bestimmter Weise gestütztes Fachwerk in einem oder mehreren Knoten weitere Stützung, so ist das Fachwerk äußerlich statisch unbestimmt. Naturgemäß kann ein Fachwerk auch gleichzeitig „innerlich“ und „äußerlich“ statisch unbestimmt sein. Andererseits kann, wie man leicht erkennt, ein statisch nicht steifes in sich verschiebliches Fachwerk mit weniger als $2n - 3$ Stäben durch entsprechende Vermehrung der äußeren Stützen oder Stützwiderstände in ein unverschiebliches, steifes Fachwerk verwandelt werden. Beispielsweise würde der Fachwerkbalken (Fig. 183) beim Fehlen des Stabes $\overline{46}$ in sich nicht steif, und wenn er in den Knoten 0 und 12 lediglich durch ein festes und

Fig. 183.



ein bewegliches Stützgelenk gestützt würde, gegen einen äußeren Kräfteangriff nicht unverschieblich, nicht standsicher sein. Durch weitere Stützung etwa vermittelst eines verschieblichen Stützgelenkes

im Knoten 6 oder durch unverschiebliche Anordnung *beider* Stützgelenke in O und 12 würde die Standsicherheit erreicht werden. Fehlte neben dem Stab $\overline{46}$ etwa auch der Stab $\overline{57}$, so würde durch die weitere Anbringung eines verschieblichen Stützgelenkes in 6 allein die Standsicherheit *nicht* herbeigeführt, wohl aber würde dieser Zweck durch gleichzeitige Umwandlung des verschieblichen Stützgelenkes in O in ein festes, d. h. durch Hinzufügung zweier Stützwerte oder Stützwiderstände erreicht werden. Bei derartigen Umgestaltungen des statischen Zustandes von Fachwerken ist indes insofern Vorsicht geboten, als nicht in allen Fällen jeder Stab eines Fachwerkes durch Hinzufügung eines Stützwiderstandes statisch vollwertig ersetzt werden kann. Bei Fortnahme des Stabes $\overline{57}$ (Fig. 183 *a*) und Umwandlung des beweglichen Stützgelenkes O in ein festes würde beispielsweise, wie man sich leicht überzeugt, der Zustand des nur in O und 12 gestützten Balkens gleichzeitig kinematisch und statisch unbestimmt werden.

Endlich kann ein innerlich statisch bestimmtes, äufserlich aber ein- oder mehrfach statisch unbestimmtes Fachwerk durch Beseitigung eines oder mehr Stäbe stets auch in ein statisch bestimmtes Bauwerk übergeführt werden. Beispielsweise würde der *in sich statisch bestimmte, äufserlich aber statisch unbestimmte* Fachwerkbalken (Fig. 184 *a*) durch Beseitigung des Stabes 57 in einen statisch bestimmten Zustand übergehen, ohne dafs seine statische Steifheit aufgehoben würde. Derselbe Zweck würde durch Beseitigung des Stabes 46 erreicht werden.

Jedoch ist auch hierbei wieder Vorsicht geboten und nicht durch Beseitigung eines beliebigen Stabes wird der Zweck immer erreicht. Bei parallelen Gurtungen, wie sie der Träger (Fig. 184) aufweist, würde z. B. durch Beseitigung eines Wandgliedes, etwa des Stabes 45 ein Stabgebilde entstehen, das weder statisch steif noch statisch bestimmt wäre.

Von dem Verfahren, ein *äufserlich* ein- oder mehrfach statisch unbestimmtes Fachwerk durch Ausschaltung eines oder mehr Stäbe für die Berechnung statisch bestimmt zu machen, wird unter Umständen mit Vorteil Gebrauch gemacht bei der Bestimmung der Stabkräfte in statisch unbestimmten Fachwerken.

Einfach statisch unbestimmtes Fachwerk.

Die Frage der Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke ist im wesentlichen eine Frage der Formänderung. Ist das Fachwerk nur äufserlich einfach statisch unbestimmt, so ist der nächstliegende Weg zu seiner Berechnung der, dafs man eine Stütze, bezw. einen Stützwiderstand als beseitigt annimmt und dadurch den Zustand des Bauwerkes statisch bestimmt macht. Unter der Wirkung der Belastung wird der Stützpunkt, der hier allgemein mit n bezeichnet werden möge, dann in entgegengesetzter Richtung des beseitigten Stützwiderstandes eine elastische Verschiebung δ_{n_P} erfahren. Ist die Stützung des Bauwerkes in n und in der Richtung des beseitigten Widerstandes eine starre, so hat dieser die Verschiebung δ_{n_P} aufzuheben oder zu verhindern, wodurch seine Gröfse bestimmt ist.

Bezeichnen wir das Mafs, um welches der statisch unbestimmte Stützwiderstand X, als aktive Kraft gedacht, den Stützpunkt n zu verschieben vermag mit δ_{n_X}, so mufs nach vorstehendem die Gleichung bestehen

1) $$\delta_{n_P} - \delta_{n_X} = 0 .$$

Bleiben die entstehenden Spannungen innerhalb der Proportionalitätsgrenze, so ist δ_{n_X} verhältnisgleich der Kraft X und $\delta_{n_X} = X \cdot \delta_{nn}$, wenn δ_{nn} die elastische Verschiebung ist, die eine Kraft $X = 1$ in ihrer Richtung dem Punkte n mitzuteilen vermag. Ersetzt man in Gl. 1 δ_{n_X} durch $X \cdot \delta_{nn}$, und löst für X auf, so folgt

2) $$X = \delta_{n_P} : \delta_{nn} .$$

Ist die Stützung in n nicht starr, sondern um ein dem Stützwiderstande X verhältnisgleiches Mafs $\Delta = \alpha \cdot X$ verschieblich, worin α eine von der Natur der Stütze abhängige konstante Zahl ist, so lautet Gl. 1

1a) $$\delta_{n_P} - \delta_{n_X} = \Delta \quad \text{und Gl. 2}$$

2a) $$X = \delta_{n_P} : (\delta_{nn} + \alpha) .$$

Um den statisch unbestimmten Stützwiderstand nach Gl. 2 oder 2a berechnen zu können, hat man zunächst die nach seiner vorläufig angenommenen Beseitigung in dem dann statisch bestimmten Fachwerk durch die Belastung entstehenden Stabkräfte S_0 und ebenso die durch die Kraft $X = 1$ hervorgerufenen Stab-

kräfte S' getrennt zu bestimmen und danach die entsprechenden Verschiebungen δ_{np} und δ_{nn} entweder mit Hülfe der Gl. 8 S. 341 oder je durch einen Verschiebungsplan zu ermitteln, wobei die Stabquerschnitte gegeben sein, oder vorläufig angenommen werden müssen. Ist X bekannt, so erhält man die im statisch unbestimmten Fachwerk unter der Wirkung der Belastung wirklich herrschenden Stabkräfte zu

3) $$S = S_0 - X \cdot S'.$$

Handelt es sich um parallele Lasten, so kann δ_{np} auch vorteilhaft vermittelst der unter *d* erläuterten Einflufslinie für elastische Verschiebungen in der Form $\delta_{np} = \Sigma \eta \cdot P$ bestimmt werden, wobei die Einflufslinie als Biegungslinie der belasteten Gurtung, erzeugt durch die Kraft $X = -1$, erhalten wird, denn der Punkt n wird durch die Belastung im entgegengesetzten Sinne des Stützwiderstandes X bewegt. Da nach Gl. 2 der Stützwiderstand X verhältnisgleich ist der Verschiebung δ_{np}, so ist die Einflufslinie für diese gleichzeitig auch Einflufslinie für X mit dem konstanten Multiplikator $1 : \delta_{nn}$.

Es ist

4) $$X = \Sigma P \cdot \eta : \delta_{nn}.$$

Wirken nicht parallele, sondern äufsere Kräfte verschiedener Richtung auf das Fachwerk ein, so läfst sich der Einflufs aller auf den statisch unbestimmten Stützwiderstand X nicht durch eine Einflufslinie darstellen. Die Gl. 3 behält aber dennoch ihre Gültigkeit, und zwar in dem Sinne, dafs unter η jetzt die ihrer Richtung nach verschiedenen Verschiebungen verstanden werden, welche die Angriffspunkte der einzelnen Kräfte jeder in der Richtungslinie der ihn angreifenden Kraft erfahren würden, wenn das spannungslos festgehaltene, aber im Stützpunkte n frei bewegliche Fachwerk in n von einer Kraft $X = -1$ ergriffen würde.

Die Richtigkeit der Gl. 4 auch für diesen allgemeinen Fall erweist sich wie folgt: Wir denken uns das in bezeichneter Weise festgehaltene Fachwerk zunächst nur von einer einzigen Kraft $P_a = 1$ an irgend einem Knoten a ergriffen. Diese würde dem Stützpunkt n in entgegengesetzter Richtung des dort tätigen Stützwiderstandes X eine elastische Verschiebung δ_{na} erteilen. Starrheit der Stütze vorausgesetzt, mufs X diese Verschiebung in seiner Richtung wieder aufheben, also die Bedingung erfüllen $\delta_{na} = X \cdot \delta_{nn}$, wenn

δ_{nn} die oben bezeichnete Bedeutung hat. Die Kraft $P_a = 1$ erzeugt also ein $X = \delta_{na} : \delta_{nn}$. Nach Maxwell ist aber $\delta_{na} = \delta_{an} = \eta$, gleich der Verschiebung, welche die Kraft $X = -1$ dem Punkte a in der Richtung der ihn angreifenden Kraft erteilen würde. Den durch die Kraft $P_a = 1$ erzeugten Stützwiderstand erhält man also auch zu $X = \eta : \delta_{nn}$ und den durch die Lastengruppe P hervorgerufenen zu $X = \Sigma P \cdot \eta : \delta_{nn}$.

Der Verschiebungsweg η des Angriffspunktes einer Kraft in ihrer Richtung hervorgerufen durch $X = -1$ ist also Einflufszahl der Kraft in Bezug auf X. Bewegt sich der Angriffspunkt einer Kraft P infolge der Formänderung des Fachwerkes durch die Kraft $X = -1$ so, dafs die Projektion η seines wirklichen Weges auf die Richtungslinie der in ihm tätigen Kraft mit dieser gleichen Pfeilsinn hat, so ist η für diese Kraft positiv, im entgegengesetzten Falle negativ. Ist die wirkliche Bewegungsrichtung des Kraftangriffspunktes senkrecht zur Kraftrichtung, oder ruht der Angriffspunkt einer Kraft bei der Formänderung infolge $X = -1$, so ist η für diese Kraft gleich Null.

Ist die Pfeilrichtung des statisch unbestimmten Stützwiderstandes X von vornherein nicht ersichtlich, so nimmt man sie beliebig an. War die Annahme verkehrt, so erhält man X negativ, weil mit einer Umkehrung des Pfeilsinnes von X auch ein Wechsel der Vorzeichen aller Verschiebungen η verbunden ist.

Das hier in seinem allgemeinen Verlaufe dargelegte Rechnungsverfahren soll nun an einem einfachen Beispiele näher erläutert werden.

Der in Fig. 184*a* dargestellte, in sich statisch bestimmte Fachwerkbalken trage nur lotrechte, in seiner unteren Gurtung angreifende Lasten und ruhe auf drei Stützen ACB, von denen eine, etwa C, fest, die beiden anderen beweglich seien. Sein Zustand ist also äufserlich einfach statisch unbestimmt. Wir wollen den Stützdruck X der Mittelstütze als statisch unbestimmte Gröfse ansehen und diese zunächst bestimmen. Nach Beseitigung der Stütze C wird der jetzt bei A und B allein gestützte Träger statisch bestimmt. Seine Stäbe haben nun im Gleichgewicht mit der Lastengruppe P Stabkräfte S_0 zu leisten, die, wie die gleichzeitig eintretende Formänderung des Fachwerkes, in bekannter Weise zu ermitteln sind. Sind dabei die Stabquerschnitte nicht von vornherein bekannt, so pflegt man sie zunächst schätzungsweise anzunehmen und hat dann event. je nach dem Ergebnis die Untersuchung zu wiederholen.

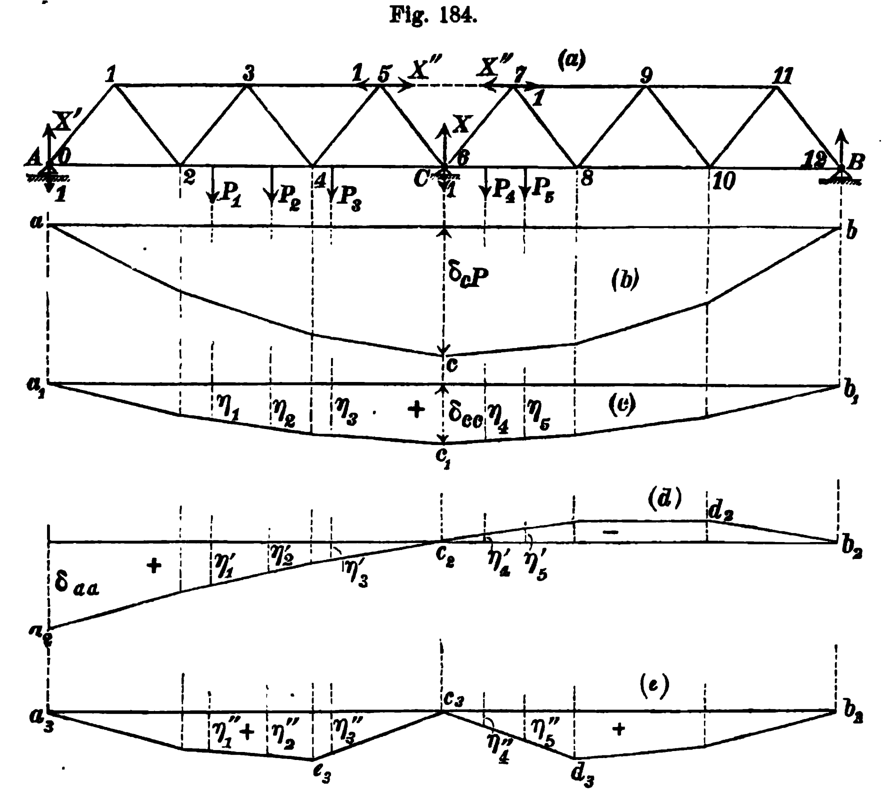
Die unter der Wirkung der Lastengruppe P eintretende Biegungslinie des belasteten Untergurtes sei acb (Fig. 184*b*) und

die damit festliegende Senkung von C gleich δ_{cp}. Eine in C angreifende aufwärts gerichtete Kraft $X = 1$ erzeuge Stabkräfte S' und eine gleichgerichtete Verschiebung δ_{cc}. Nach Gl. 1 ist dann bei starrer Stütze C

5) $$X = \delta_{cp} : \delta_{cc}.$$

Die durch den Stützdruck X für sich allein erzeugten Stabkräfte erhält man in der Form $S' \cdot X$; sie sind den durch die

Fig. 184.



Belastung erzeugten Kräften S_0 entgegengesetzt und die wirklich im statisch unbestimmten Balken herrschenden Stabkräfte S ergeben sich zu

6) $$S = S_0 - X \cdot S'.$$

Ermittelt man die unter der Wirkung der Lastengruppe P nach Beseitigung des Stützwiderstandes X entstehende Senkung δ_{cp} des

Punktes C, indem man in C eine abwärts gekehrte Kraft $X = -1$ anbringt (vergl. unter d S. 361) und ist $a_1 c_1 b_1$ (Fig. 184c) die dadurch entstehende Biegungslinie des belasteten Untergurtes, so erhält man $\delta_{cp} = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + \ldots = \Sigma P \cdot \eta$ und

$$7) \qquad X = \Sigma P \cdot \eta : \delta_{cc}.$$

Die Linie $a_1 c_1 b_1$ ist also Einflufslinie des statisch unbestimmten Stützwiderstandes X mit dem Multiplikator $1 : \delta_{cc}$. Die Verschiebungsgröfse δ_{cc} kann ihrem Absolutwerte nach gleichfalls der Fig. 184c entnommen werden, so dafs also nur die Zeichnung der der Kraft $X = -1$ entsprechenden Biegungslinie des Lastgurtes für die Lösung der statisch unbestimmten Aufgabe erforderlich wird.

Wählt man statt des Stützwiderstandes X der Mittelstütze den X' einer der Endstützen etwa A, so erhält man die Einflufslinie für X' in der Biegungslinie der belasteten Gurtung, welche eine in A angreifende Kraft $X' = -1$ (abwärts gerichtet) erzeugt. (Vergl. Fig. 184d). Die Einflufsordinaten sind jetzt teils positiv (links von C), teils negativ (rechts von C), was auch in freier Anschauung erkenntlich ist. Wir erhalten

$$8) \quad \begin{cases} \ldots X' = (P_1 \eta_1' + P_2 \eta_2' + P_3 \eta_3' - P_4 \eta_4' - \ldots) : \delta_{aa} \\ \qquad = \Sigma P \cdot \eta' : \delta_{aa}. \end{cases}$$

Es soll hier an diesem einfachen Beispiele noch der Rechnungsgang erläutert werden, den man zu befolgen hat, wenn man den äufserlich statisch unbestimmten Balken durch Beseitigung eines Stabes, etwa des Stabes $\overline{57}$ in ein statisch bestimmtes Bauwerk umwandelt, die Stabkraft X'' des Stabes also als statisch unbestimmte Gröfse einführt. Die zunächst als positiv angenommene Stabkraft X'' in den Punkten 5 und 7 je als äufsere Kraft angebracht, steht dann mit den übrigen äufseren Kräften, den lotrecht angenommenen Lasten und Stützdrücken, im Gleichgewicht. Dabei rufen sowohl die Gruppe der Lasten P als die Kräfte X'' je eine elastische Abstandsänderung des Punktpaares 57 hervor und zwar beide naturgemäfs in entgegengesetztem Sinne. Der Unterschied beider mufs gleich sein der elastischen Längenänderung Δs des Stabes $\overline{57}$. Bezeichnen wir die im vorliegenden Falle positive Abstandsänderung des Punktpaares 57, hervorgerufen durch die

Lastengruppe P mit $\delta_{57 \cdot P}$ und die durch die Kräfte X'' erzeugte negative mit $\delta_{57 \cdot X''}$, so gelangen wir zu der Gleichung

$$9) \quad \ldots \delta_{57 \cdot P} - \delta_{57 \cdot X''} = \Delta s.$$

Wäre der Stab 57 starr, so träte an Stelle von Δs in Gl. 9 der Wert Null. Eine etwaige Temperaturänderung der Stäbe würde sich in den beiden Gliedern linksseits der Gl. 9 aufheben, in Δs aber, wenn dieser Stab allein davon betroffen würde, zu berücksichtigen sein. Wir wollen hier konstante Temperatur voraussetzen und die Gröfsen $\delta_{57 \cdot X''}$ und Δs auf X'' zurückführen. Ist nämlich $\delta_{(57)(57)}$ die Abstandsänderung des Punktpaares 57, welche Kräfte $X'' = 1$ erzeugen würden, so bringen die Kräfte X'' eine solche $X'' \cdot \delta_{(57)(57)}$ hervor. Aufserdem ist $\Delta s = \frac{X''}{F} \cdot \frac{s}{E}$, also nach Gl. 9, wenn man sie für X'' löst,

$$10) \quad X'' = \delta_{57 \cdot P} : \left(\delta_{(57)(57)} + \frac{s}{F \cdot E}\right).$$

Zur Berechnung von X'' nach Gl. 10 sind zunächst wieder die Stabkräfte S_0, welche nach Beseitigung des Stabes 57 durch die Lastengruppe P und diejenigen S', welche durch die Kräfte $X'' = 1$ hervorgerufen werden, zu ermitteln und danach die Verschiebungen $\delta_{57 \cdot P}$ und $\delta_{(57)(57)}$ zu bestimmen.

Die Stabspannkräfte der übrigen Stäbe erhält man dann wieder in der Form

$$11) \quad S = S_0 - X'' \cdot S'.$$

Die positive Abstandsänderung $\delta_{57 \cdot P}$ des Punktpaares 57 und damit auch die statisch unbestimmte Stabkraft X'' kann man wieder mit Hülfe einer Einflufslinie bestimmen, die als Biegungslinie der belasteten Gurtung entsteht, wenn man in den Punkten 5 und 7 je eine Kraft $X'' = -1$ anbringt und für den entstehenden Spannungszustand die Biegungslinie $a_3 e_3 c_3 d_3 b_3$ (Fig. 184 *e*) des Untergurtes zeichnet.

Die statisch unbestimmte Stabkraft X'' erhält man daraus zu

$$12) \quad X'' = \Sigma P \cdot \eta'' : \left(\delta_{(57)(57)} + \frac{s}{F \cdot E}\right).$$

Ermittelt man die Biegungslinie mittels eines Verschiebungsplanes, so kann man demselben auch gleich den Wert der Gröfse

$\delta_{(67)(67)}$ entnehmen. Genauer aber fällt das Ergebnis aus, wenn die Biegungslinie mit Hülfe der berechneten w-Gewichte gezeichnet und auch die Verschiebung $\delta_{(67)(67)}$ durch Rechnung ermittelt wird.

In gleicher Weise würde der etwa auf zwei Endstützen in statisch bestimmter Weise gelagerte Balken zu berechnen sein, wenn er etwa durch Hinzufügung noch eines Stabes 58 oder 49 usw. innerlich einfach statisch unbestimmt gemacht würde. Es würde dann die Stabkraft irgend eines Stabes, ohne den das Fachwerk aber wieder steif und statisch bestimmt sein müſste, als statisch unbestimmte Gröſse zu behandeln und bei deren Ermittelung wie oben dargelegt zu verfahren sein. Für den Richtungssinn der statisch unbestimmten Stabkraft X findet das auf S. 366 über den Richtungssinn statisch unbestimmter Stützwiderstände Gesagte sinngemäſse Anwendung.

Es möge hier nun noch kurz die Berechnung des einfach statisch unbestimmten Bogenfachwerkträgers (Fig. 185*a*) mit zwei festen Kämpfergelenken angedeutet werden. Die unter der Voraussetzung nur lotrechter Belastung in beiden Kämpferpunkten gleichen wagerechten Seitenkräfte X der Kämpferdrücke, der Horizontalschub, soll als statisch unbestimmte Gröſse gelten. Wir erkennen sie nach innen gerichtet und bringen in den Kämpferpunkten Kräfte $X = -1$, nach auſsen gerichtet, an. Sind dann S' die dabei entstehenden Stabkräfte (Fig. 185*b*) und S_0 die durch die Lastengruppe P hervorgerufenen (Fig. 185*c*), so ist nach Gl. 8 S. 341 die positive Abstandsänderung δ_P der Kämpferpunkte lediglich unter der Wirkung der lotrechten Belastung mit $X = 0$ $\delta_P = \Sigma \frac{S_0 \cdot S' s}{EF}$ und die negative des unbelasteten Trägers lediglich durch die Kräfte X erzeugt $\delta_X = X \cdot \delta_{X=1} = X \cdot \Sigma \frac{S'^2 \cdot s}{EF}$. Sind die Kämpferpunkte starr, so müssen die positive Abstandsänderung der Kämpferpunkte durch die Belastung und die negative

Fig. 185 *a*.

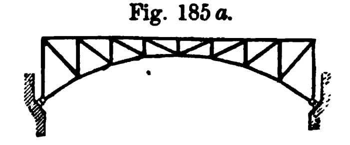


Fig. 185 *b*.

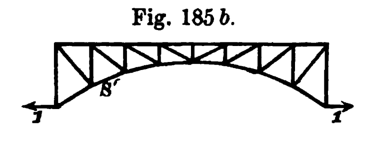
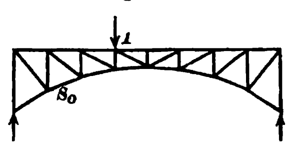


Fig. 185 *c*.



infolge des wirklichen Horizontalschubes X sich aufheben und es mufs die Gleichung bestehen

$$\Sigma \frac{S_0 \cdot S' \cdot s}{EF} - X \cdot \Sigma \frac{S'^2 \cdot s}{EF} = 0, \text{ deren Lösung ergibt}$$

13) $$X = \Sigma \frac{S_0 \cdot S' \cdot s}{EF} : \Sigma \frac{S'^2 \cdot s}{EF}.$$

Ist der Träger bei einer bestimmten mittleren Temperatur spannungslos eingebaut, so würden beim Fehlen des Horizontalwiderstandes X der Kämpfer, diese infolge einer etwaigen Temperaturerhöhung t noch eine positive Abstandsänderung $l \cdot \varepsilon \cdot t$ erfahren und der Horizontalschub X hätte die Bedingung zu erfüllen

$$\Sigma \frac{S_0 \cdot S' \cdot s}{EF} + \varepsilon \cdot l \cdot t - X \cdot \Sigma \frac{S'^2 \cdot s}{EF} = 0, \text{ woraus folgt}$$

14) $$X = \left(\Sigma \frac{S_0 \cdot S' \cdot s}{EF} + \varepsilon \cdot t \cdot l \right) : \Sigma \frac{S'^2 \cdot s}{EF}.$$

Würden die Kämpferpunkte noch durch einen Stab verbunden, der Träger aber sonst statisch bestimmt gelagert, also nun innerlich statisch unbestimmt sein, so würde der positiven Stabkraft X eine positive elastische Abstandsänderung $\Delta l = \frac{l \cdot X}{EF_1}$ entsprechen und X müfste nun die Gleichung erfüllen

$$\Sigma \frac{S_0 \cdot S' \cdot s}{EF} + \varepsilon \cdot t \cdot l - X \Sigma \frac{S'^2 \cdot s}{EF} = \frac{lX}{EF_1}, \text{ woraus folgt}$$

15) $$X = \left(\Sigma \frac{S_0 S' \cdot s}{EF} + s \cdot t \cdot l \right) : \left(\Sigma \frac{S'^2 \cdot s}{EF} + \frac{l}{EF_1} \right).$$

Darin bezeichnet F_1 den Querschnitt des Verbindungsstabes der Kämpferpunkte.

Die wirklichen Stabkräfte S sind in allen drei Fällen

16) $$S = S_0 - S' \cdot X.$$

Eine Einflufslinie des Horizontalschubes X erhält man wieder in der dem Spannungszustande $X = -1$ entsprechenden Biegungslinie des belasteten Obergurtes mit dem Multiplikator $1 : \delta_{X=-1} = 1 : \Sigma \frac{S'^2 \cdot s}{EF}$.

Mehrfach statisch unbestimmtes Fachwerk.

Die allgemeine Methode zur Behandlung statisch unbestimmter Fachwerke soll hier unter der Voraussetzung äufserlich statischer

24*

Unbestimmtheit erläutert werden. X_a, X_b, X_c usw. seien die in den Knoten A, B, C usw. angreifenden Stützwiderstände, durch deren Beseitigung das Fachwerk statisch bestimmt werden würde. Das Fachwerk werde durch eine beliebige Gruppe P von äufseren Kräften belastet. Der Stützpunkt A des statisch bestimmt und spannungslos gedachten Fachwerks erfahre in entgegengesetzter Richtung des dort angreifenden Stützwiderstandes X_a unter der Wirkung der Lastengruppe P allein die elastische Verschiebung δ_{aP}, lediglich durch die Kraft $X_a = 1$ in der Richtung von X_a eine Verschiebung δ_{aa}, durch die Kraft $X_b = 1$ eine solche δ_{ab}, durch $X_c = 1$ δ_{ac} usw. Ebenso werde der Stützpunkt B in entgegengesetzter Richtung des dort angreifenden Stützwiderstandes X_b durch die Lastengruppe P um δ_{bP}, durch die Kraft $X_b = 1$ um δ_{bb}, durch die Kraft $X_a = 1$ um δ_{ba} usw. elastisch verschoben. Ähnliche Bezeichnungen gelten für die elastischen Verschiebungen der anderen Stützpunkte.

Die im ganzen bei der tatsächlichen Unterstützung und Belastung wirklich eintretenden Verschiebungen der Stützpunkte in der Richtung der an ihnen tätigen Stützwiderstände seien durch die Natur der Stützen oder sonstigen Umstände, Temperatur usw., irgendwie bestimmt und betragen für die einzelnen Stützpunkte δ_a, δ_b, δ_c usw. Dann gelten für diese Verschiebungen folgende Gleichungen

$$17)\qquad \begin{cases} \delta_a = \delta_{aP} - \delta_{aa} \cdot X_a - \delta_{ab} \cdot X_b - \delta_{ac} \cdot X_c - \ldots \\ \delta_b = \delta_{bP} - \delta_{ba} \cdot X_a - \delta_{bb} \cdot X_b - \delta_{bc} \cdot X_c - \ldots \\ \delta_c = \delta_{cP} - \delta_{ca} \cdot X_a - \delta_{cb} \cdot X_b - \delta_{cc} \cdot X_c - \ldots \end{cases}$$

Da sich für die Verschiebung des Angriffspunktes eines jeden statisch unbestimmten Stützwiderstandes eine Gleichung ergibt, so ist die Zahl der Unbekannten ebenso grofs als die der Gleichungen und die Lösung kann in bekannter Weise erfolgen. Bei Ermittelung der Verschiebungsgröfsen kann man von dem Maxwell'schen Satze vorteilhaften Gebrauch machen und δ_{ab} durch δ_{ba}, δ_{ac} durch δ_{ca} usw. ersetzen.

Ist die Stützung in einzelnen oder in allen Punkten eine starre und werden Temperaturänderungen ausgeschlossen, so tritt an Stelle der betreffenden Verschiebungsgröfse δ_a, δ_b usw. der Wert Null.

Es seien nun S_o, S_a', S_b' usw. die in dem statisch bestimmten Fachwerk unter der Wirkung der Lastengruppe, der Kraft $X_a = 1$, $X_b = 1$ usw. entstehenden Spannkräfte. Dann ist nach Gl. 8 S. 341

$$18)\begin{cases} \delta_{aP} = \Sigma \dfrac{S_o \cdot S_a' \cdot s}{EF}, & \delta_{bP} = \Sigma \dfrac{S_o \cdot S_b' \cdot s}{EF}, \quad \delta_{cP} = \Sigma \dfrac{S_o \cdot S_c' \cdot s}{EF} \quad \text{usw.} \\ \delta_{aa} = \Sigma \dfrac{S_a'^2 \cdot s}{EF}, & \delta_{bb} = \Sigma \dfrac{S_b'^2 \cdot s}{EF}, \quad \delta_{cc} = \Sigma \dfrac{S_c'^2 \cdot s}{EF} \quad \text{usw.} \\ \delta_{ab} = \Sigma \dfrac{S_a' \cdot S_b' \cdot s}{EF}, & \delta_{ac} = \Sigma \dfrac{S_a' \cdot S_c' \cdot s}{EF}, \quad \delta_{bc} = \Sigma \dfrac{S_b \cdot S_c' \cdot s}{EF} \quad \text{usw.} \end{cases}$$

Sind die angreifenden äufseren Kräfte einander parallel, etwa lotrechte Lasten, so kann man die Verschiebungsgröfsen δ_{aP}, δ_{bP} usw. mit Hülfe von Einflufslinien ermitteln, die als Biegungslinien des belasteten Gurtes entstehen, wenn man in den Knoten A, B, C usw. nacheinander die Kräfte $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$ usw. angreifen läfst. Man erhält dann $\delta_{aP} = \Sigma P \cdot \eta_a$, $\delta_{bP} = \Sigma P \cdot \eta_b$, $\delta_{cP} = \Sigma P \cdot \eta_c$ usw., worin die Verschiebungsgruppen η_a, η_b, η_c usw. die Ordinaten der Biegungslinien in den Richtungslinien der Lastengruppe P gemessen, bezeichnen.

Sind die statisch unbestimmten Stützwiderstände X_a, X_b, X_c usw. bestimmt, so erhalten wir die in dem statisch unbestimmten Fachwerk unter der Wirkung der Lastengruppe P wirklich eintretenden Stabkräfte zu

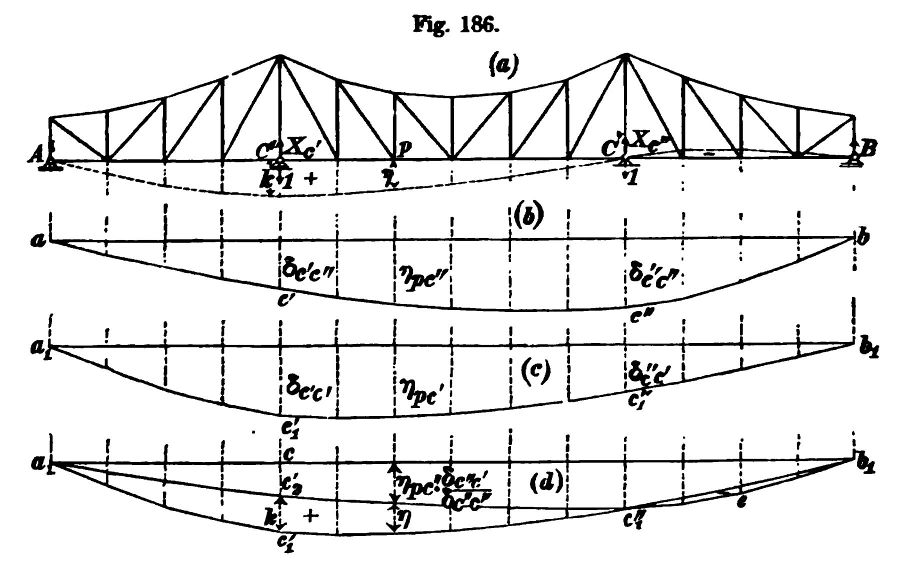
$$19) \qquad S = S_o - S_a' \cdot X_a - S_b' \cdot X_b - \ldots$$

Das hier in seinem allgemeinen Verlaufe dargelegte Rechnungsverfahren soll wieder an einem einfachen Beispiel näher erläutert werden.

Der in sich statisch bestimmte Fachwerksbalken (Fig. 186 *a*) sei in seinem Untergurt lotrecht belastet und in den Knoten A, C' und B je durch ein bewegliches, im Knoten C'' durch ein festes Stützgelenk gestützt. Sein Zustand ist also zweifach statisch unbestimmt. Wir denken uns zwei der Stützwiderstände etwa $X_{c'}$ in C' und X'' in C'' beseitigt und erhalten dann das in A und B statisch bestimmt gestützte System. Die in diesem unter der Lastengruppe P eintretenden elastischen Senkungen der Knoten C' und C'' werden in bekannter Weise ermittelt und seien gleich $\delta_{c'P}$ und $\delta_{c''P}$ gefunden. Ebenso die unter der Wirkung der Kraft $X_{c'} = -1$ eintretenden Senkungen $\delta_{c'c'}$ und $\delta_{c''c'}$ der Punkte C' und C''

(Fig. 186c), sowie die durch die Kraft $X_{c''} = -1$ in C' und C'' hervorgerufenen Senkungen $\delta_{c'c''}$ und $\delta_{c''c''}$ (Fig. 186b). Wir setzen nun starre Stützen und gleichbleibende Temperatur, bezw. alle Glieder gleichmäßig umfassende Temperaturänderungen voraus und erhalten

Fig. 186.



die wirklichen lotrechten Verschiebungen $\delta_{c'} = 0$ und $\delta_{c''} = 0$. Damit wird nach Gl. 17

$$20)\quad \begin{cases} O = \delta_{c'P} - \delta_{c'c'} \cdot X_{c'} - \delta_{c'c''} \cdot X_{c''} \text{ und} \\ O = \delta_{c''P} - \delta_{c''c'} \cdot X_{c'} - \delta_{c''c''} \cdot X_{c''}. \end{cases}$$

Die Lösung der Gleichungen für $X_{c'}$ und $X_{c''}$ ergibt, wenn man nach dem Satze von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen (Maxwell) $\delta_{c'c''}$ mit $\delta_{c''c'}$ und umgekehrt vertauscht

$$21)\quad \begin{cases} X_{c'} = \dfrac{\delta_{c'P} - \delta_{c''P} \cdot \dfrac{\delta_{c''c'}}{\delta_{c''c''}}}{\delta_{c'c'} - \delta_{c'c''} \cdot \dfrac{\delta_{c''c'}}{\delta_{c''c''}}} \text{ und} \\[2em] X_{c''} = \dfrac{\delta_{c''P} - \delta_{c'P} \cdot \dfrac{\delta_{c'c''}}{\delta_{c'c'}}}{\delta_{c''c''} - \delta_{c''c'} \cdot \dfrac{\delta_{c'c''}}{\delta_{c'}\delta_{c'}}}. \end{cases}$$

Sollen die Senkungen $\delta_{c'P}$ und $\delta_{c''P}$ mit Hülfe von Einflußlinien ermittelt werden, so erhalten wir erstere in der der Kraft $X_{c'} = -1$

in C' entsprechenden Biegungslinie $a_1 c_1' c_1'' b_1$ (Fig. 186 *c*) und letztere in der der Kraft $X_{c''} = -1$ in C'' entsprechenden Biegungslinie $a\,c'\,c''\,b$ (Fig. 186 *b*). Ist $\eta_{pc'}$ eine Ordinate der ersteren in der Richtungslinie irgend einer Last P, $\eta_{pc''}$ eine solche der letzteren in derselben Lastlinie, so liefert die Last P einen Beitrag $P \cdot \eta_{pc'}$ zu $\delta_{c'p}$ und einen solchen $P \cdot \eta_{pc''}$ zu $\delta_{c''p}$ und im ganzen erhalten wir

$$\delta_{c'p} = \Sigma P \cdot \eta_{pc'}, \quad \delta_{c''p} = \Sigma P \cdot \eta_{pc''}.$$

Um eine Einflufsfläche für jede der statisch unbestimmten Gröfsen $X_{c'}$ und $X_{c''}$ zu erhalten, ersetzen wir die Lastengruppe P durch eine wandernde Einzellast P und erhalten

$$\delta_{c'p} = P \cdot \eta_{pc'} \text{ und } \delta_{c''p} = P \cdot \eta_{pc''}.$$

Der Beitrag der Einzellast P in beliebiger Lage zu $X_{c'}$ ist somit

$$X_{c'} = \frac{\eta_{pc'} - \eta_{pc''} \cdot \dfrac{\delta_{c''c''}}{\delta_{c''c'}}}{\delta_{c'c'} - \delta_{c'c''} \cdot \dfrac{\delta_{c''c'}}{\delta_{c''c''}}} \cdot P. \tag{22}$$

Setzen wir die mit der Lage der Einzellast P veränderliche Differenz $\eta_{pc'} - \eta_{pc''} \dfrac{\delta_{c''c'}}{\delta_{c''c''}} = \eta$ und die von ihr unabhängige konstante $\delta_{c'c'} - \delta_{c'c''} \cdot \dfrac{\delta_{c''c'}}{\delta_{c''c''}} = k$, so wird

$$X_{c'} = P \cdot \frac{\eta}{k}. \tag{23}$$

In Fig. 186 *d* erscheint η als Differenz der Ordinaten $\eta_{pc'}$ der Biegungslinie $a_1 c_1' c_1'' b_1$ des Untergurtes, hervorgerufen durch die Kraft $X_{c'} = -1$ und der im Verhältnis $\delta_{c''c'} : \delta_{c''c''}$ reduzierten Ordinaten $\eta_{pc''}$ der der Kraft $X_{c''} = -1$ entsprechenden Biegungslinie $a\,c'\,c''\,b$, dargestellt durch die Linie $a_1 c_2' c_1'' e\, b_1$. Die Fläche $a_1 c_1' c_1'' b_1 e\, c_2' a_1$ ist also Einflufsfläche für $X_{c'}$ mit dem Multiplikator $1 : k$. Ruht die wandernde Last P über der Stütze C'', so ist $\eta_{pc'} = \delta_{c''c'}$ und $\eta_{pc''}\delta = {}_{c''c''}$, also $\eta = \delta_{c''c'} - \delta_{c''c''} \cdot \dfrac{\delta_{c''c'}}{\delta_{c''c''}} = 0$. In Fig. 186 *d* ist ferner $c_1' c_2' = c\,c_1' - c\,c_2' = \delta_{c'c'} - \delta_{c'c''} \cdot \dfrac{\delta_{c''c'}}{\delta_{c''c''}} = k$. Werden, wie es sich der gröfseren Genauigkeit wegen empfiehlt, die Biegungslinien als Seilecke zu den den Belastungs- und Spannungszuständen $X_{c'} = -1$ und $X_{c''} = -1$ entsprechenden w-Gewichten

ermittelt (vergl. S. 350 u. f.), so findet man die Linie $a_1 c'_1 c''_1 e b_1$ als Seileck durch die drei bekannten Punkte a_1, c''_1 und b_1. Bei der Anwendung des entwickelten Verfahrens bedarf es also der besonderen Zeichnung der Biegungslinien (Fig. 186*b* u. 186*c*) nicht, sondern es genügt, zu den dem Belastungszustande $X_{c'} = -1$ entsprechenden w-Gewichten mit beliebiger Polweite das Seileck $a_1 c'_1 c''_1 b_1$, und dann zu den aus dem Belastungszustande $X_{c''} = -1$ zu berechnenden w-Gewichten ein Seileck durch die Punkte a_1, b_1 und den Schnittpunkt c''_1 des Stützlotes durch C' mit der Seillinie $a_1 c'_1 c''_1 b_1$ zu zeichnen.

Ist der Träger symmetrisch, so bedarf es einer besonderen Einflußfigur für den Stützdruck $X_{c''}$ naturgemäß nicht. Vor allen Dingen aber ist bei etwaiger Zeichnung der Biegungslinie als Seileck größtmöglichste Genauigkeit geboten. In wichtigen Fällen verdient die rechnerische Ermittelung der Verschiebungen δ bezw. der Ordinaten η den Vorzug.

Zum Schluß möge die hier befolgte Methode zur Ermittelung statisch unbestimmten Stützwiderstände aus den Formänderungsvorgängen noch einmal in freier Anschauung überblickt werden.

Wird eine der Stützen etwa C' des mit der Gruppe P belasteten Trägers beseitigt, so senkt sich der Stützpunkt um irgend ein Maß Δ. Starrheit der Stütze vorausgesetzt, muß der Stützdruck $X_{c'}$ diese Senkung wieder aufheben, wodurch seine Größe bestimmt ist. Vermag eine Kraft $X_{c'} = 1$ eine lotrechte Bewegung k des Stützpunktes herbeizuführen, so erfordert die völlige Zurückführung des Punktes C' auf seine ursprüngliche Höhe eine Kraft $X_{c'} = \frac{\Delta}{k}$. Mit den Verschiebungsgrößen Δ und k ist also auch $X_{c'}$ bekannt.

Eine Last Eins in C' bringt dem Untergurt des spannungslos auf den Stützen A, C'' und B ruhenden Trägers eine durch die punktierte Linie (Fig. 186*a*) angedeutete Biegung bei, deren Ordinate η ersichtlich links von C'' abwärts, rechts aufwärts zeigt und unter C' gleich k ist. Ist η die Ordinate in irgend einem Punkte p, so würde nach dem Satze von Maxwell eine Last Eins in p eine Senkung η des Punktes C' hervorbringen, also in der starren Stütze bei C' einen Stützwiderstand $X_{c'} = \eta : k$ erzeugen. Die punktierte Biegungslinie ist also zugleich Einflußlinie von $X_{c'}$ mit dem Multiplikator $1 : k$.

Die Entstehung der punktierten Biegungslinie kann man mathematisch verfolgen, indem man zunächst die durch die Last Eins in C' erzeugte Biegungslinie $a_1 c'_1 c''_1 b_1$ des nur in A und B gestützten Trägers entstehen läfst, wobei der Punkt C'' um das Mafs $\delta_{c''c'}$ sinkt. Durch eine bestimmte aufwärts gekehrte Kraft kann der Punkt C'' wieder auf seine ursprüngliche Höhe gehoben werden, wobei die Linie $a_1 c'_1 c''_1 b_1$ (Fig. 186 c) in die punktierte Form (Fig. 186 a) übergeht. Zu der dadurch bedingten Verkleinerung ihrer Ordinaten $\eta_{pc'}$ gelangt man durch die Überlegung, dafs eine Last Eins in C'' den nur in A und B gestützten Träger nach einer Linie $a c' c'' b$ (Fig. 186 b) durchbiegen würde, deren Ordinate unter C'' gleich $\delta_{c''c''}$ ist. Die Kraft, welche den durch die Last Eins in C' um $\delta_{c''c'}$ gesenkten Punkt C'' wieder auf seine ursprüngliche Höhe zu heben vermag, mufs also sein gleich $1 \cdot \frac{\delta_{c''c'}}{\delta_{c''c''}}$. Die Last **Eins** in C'' verschiebt nun irgend einen Punkt p des Untergurtes um $\eta_{pc''}$ abwärts, die aufwärts gekehrte Kraft $1 \cdot \frac{\delta_{c''c'}}{\delta_{c''c''}}$ vermag daher den Punkt um $\eta_{pc''} \cdot \frac{\delta_{c''c'}}{\delta_{c''c''}}$ aufwärts zu bewegen und verkleinert dadurch seine Ordinate $\eta_{pc'}$ (Fig. 186 c) um ein gleiches Mafs, wodurch die Linie $a_1 c'_1 c'_2 b_1$ in die Form der punktierten Linie (Fig. 186 a) übergeht. Die von letzterer und der geraden Untergurtlinie eingeschlossene Fläche stellt also die auf die gerade Untergurtlinie umgeformte Einflufsfläche $a_1 c'_1 c''_1 b_1 e c'_2 a_1$ des Stützdruckes $X_{c'}$ dar.

Fünfter Abschnitt.

Erddruck und Stützmauern.

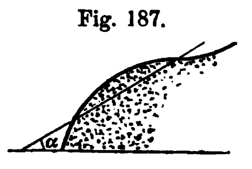
a) Allgemeines und Voraussetzungen.

Während die freie Oberfläche einer im Gleichgewichte befindlichen vollkommenen Flüssigkeit eine wagerechte Ebene bilden muſs, kann ein fester Körper bei jeder beliebigen Neigung seiner Auſsenfläche im Gleichgewichte sein. Zwischen beiden Körperarten stehen die sog. Erdkörper, welche als Anhäufungen vieler kleinen Steine aufzufassen sind, zu denen aber hinsichtlich der Gleichgewichtsbedingungen auch die Aufschüttungen von Getreidekörnern, von Bleischrot u. dgl. gezählt werden können. Diese (teilweise flüssigen) Körper lassen sich auf einem wagerechten Boden ohne Seitenwände aufschütten, doch ist die Neigung der freien Oberfläche gewissen Beschränkungen unterworfen.

Während die Teilchen einer vollkommenen Flüssigkeit nur Normaldrücke ausüben können, tritt zwischen den Körnern einer reinen Sandmasse oder sonstiger Schüttungskörper ohne Kohäsion erzeugende Bindemittel neben dem Normaldrucke noch ein Reibungswiderstand auf. Nennt man φ den entsprechenden Reibungswinkel und $f = \operatorname{tg} \varphi$ die zugehörige Reibungsziffer, so ergibt sich φ als der für Gleichgewicht eben noch mögliche obere Grenzwert des Neigungswinkels der freien Oberfläche einer solchen Erdmasse ohne Bindemittel, und φ heiſst deshalb auch der natürliche Böschungswinkel. Macht man nämlich, um die Bedingungen für den Gleichgewichtszustand eines Erdkörpers zu finden, die Annahme, daſs das Gleichgewicht bestehe, so würde

dieser Zustand keine Störung erfahren, wenn irgend ein Teil der Erdmasse in einen starren Körper überginge. Führt man daher durch den Erdkörper (Fig. 187) einen ebenen Schnitt mit dem Neigungswinkel α gegen die Wagerechte und betrachtet die Teile zu beiden Seiten des Schnittes als erstarrt, so würde der obere Teil beschleunigt abgleiten, falls $\alpha > \varphi$ wäre. Hat demnach die freie Oberfläche des Erdkörpers an irgend einer Stelle eine Neigung, größer als der Reibungswinkel, so ist eine solche Gleitebene möglich, und es wird die Erdmasse nicht im Ruhezustande sein können. Ist die Neigung der freien Oberfläche aber durchweg kleiner als φ, so ist eine derartige Gleitfläche nicht möglich und das Gleichgewicht der Masse ein sicheres, während eine unter den Winkel φ geneigte Oberfläche dem **Grenzzustande der Ruhe** entspricht.

Fig. 187.



Die Ermittelung dieses natürlichen Böschungswinkels φ kann daher erfolgen, indem man eine aufgeschüttete Erdmasse mit einem Lineale von unten nach oben abstreicht, so dafs die Böschung allmählich steiler wird und endlich einstürzt; die dabei erreichte Grenze vor dem Einsturze gibt den gesuchten Winkel. Man kann auch die zu untersuchende Erdmasse auf einem beweglichen Boden zunächst mit flacherer ebener Böschung aufschütten und dann den Boden vorsichtig neigen, so dafs dadurch die Böschung allmählich steiler wird.

Das Wasser und andere völlig flüssige Körper sind als besondere Fälle einer Erdmasse mit dem natürlichen Böschungswinkel Null zu betrachten.

Ist den Körnern der Schüttung ein Bindemittel beigemengt (z. B. Ton oder Lehm), so kann an einer Schnittebene auch ein Abscherungswiderstand (eine Kohäsion) c für die Flächeneinheit auftreten. Bei lockeren Erdarten wie Sand, Kies, frisch geschütteter Erde, ist dieser Widerstand gering und zu vernachlässigen; erheblich ist er aber bei sog. gewachsenem Boden, bei Erde, die lange gelagert hat, oder die durch Stampfen in einen ähnlichen Zustand gebracht wurde. Infolge einer solchen Scherfestigkeit kann ein Erdkörper auch im Gleichgewichte sein bei einer Böschung, deren Neigungswinkel gröfser ist als der Reibungswinkel φ; doch kann ein solcher Zustand, soweit er die Standsicherheit von Bauwerken bedingt, nicht als ein sicherer gelten.

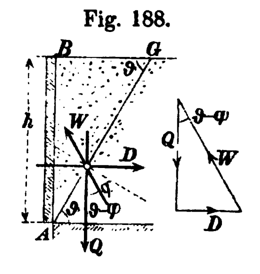
Dichtigkeit γ (Gewichte in kg/cbm) und Reibungswinkel φ einiger Schüttungsmassen.

	γ	φ	$f = \operatorname{tg} \varphi$
Trockener Lehmboden	1500	40—46°	0,839—1,036
Nasser Lehmboden	1900	20—25°	0,364—0,466
Trockener Tonboden	1600	40—50°	0,839 - 1,192
Nasser Tonboden.	1950	20—25°	0,364—0,466
Feuchte Ackererde	1650	30—35°	0,577—0,700
Sand oder Kies	1600—1860	30°	0,577
Steinschotter	1600	35—40°	0,700—0,839
Roggen	750	25—30°	0,466—0,577
Bleischrot	6800	23—27°	0,424—0,510

b) Normaldruck einer wagerecht begrenzten Erdmasse gegen eine lotrechte Ebene.

Eine Erdmasse mit wagerechter Oberfläche sei durch eine lotrechte Wand AB von der Höhe h gestützt, deren Reibung gegen den Erdkörper hier zunächst außer Acht bleiben soll, so daſs zwischen beiden nur ein Normaldruck D auftreten kann (Fig. 188). Wir betrachten ein Stück der Wand und des Erdkörpers von der Länge Eins. Nehmen wir an, daſs die Wand zur Aufnahme des Druckes nicht im stande sei, so würde im Augenblicke ihres Zurückweichens irgend ein Teil ABG des Erdkörpers sich von den hinterliegenden zunächst in Ruhe bleibenden Erdmassen trennen und abwärts gleiten. Die Trennungs- oder Gleitfläche AG werde als eben mit dem Neigungswinkel ϑ vorausgesetzt. Um die für den Grenzzustand der Ruhe des Erdkörpers erforderliche Gröſse dieses Druckes D zu ermitteln, bestimme man diejenige Kraft D, welche eben ausreicht, um das Abgleiten des Erdkörpers ABG zu verhindern. Die Scherfestigkeit (Kohäsion) werde zunächst vernachlässigt, so daſs der Gesamtwiderstand W der Gleitebene um den Reibungswinkel φ von der Normalen zu AG abweicht, mit dem Gewicht Q des Erdprismas also den Winkel $\vartheta - \varphi$ einschlieſst. Die Kräfte Q, D und W müssen sich im Gleichgewicht halten, mithin sich in einem

Fig. 188.



Punkte schneiden und ein geschlossenes Kräftedreieck bilden, woraus sich

$$D = Q \operatorname{tg}(\vartheta - \varphi)$$

ergibt, oder, weil

$$Q = \gamma \cdot ABG = \frac{\gamma h^2}{2 \operatorname{tg} \vartheta},$$

$$D = \gamma \frac{h^2}{2} \frac{\operatorname{tg}(\vartheta - \varphi)}{\operatorname{tg} \vartheta}. \tag{1}$$

Die Gröfse D ist von ϑ abhängig; für $\vartheta = \varphi$ und für $\vartheta = 90^0$ wird $D = 0$; dazwischen mufs ein Maximum liegen, und dieser gröfste Wert ist dann erst der Druck, welchen die Wand auf den Erdkörper ausüben mufs, damit längs keiner der möglichen, durch A gehenden Schnittebenen ein Abgleiten stattfinde. Diejenige Schnittebene, welche diesem Maximum entspricht, ist die Gleitebene. An ihr mufs ein Widerstand W auftreten, der um den vollen Reibungswinkel von der Normalen abweicht, d. h. es mufs an ihr der volle Reibungswiderstand wirksam werden, damit kein Abgleiten eintrete; an allen übrigen durch A gedachten Schnittebenen kommt dann tatsächlich nicht der volle Reibungswiderstand zur Wirkung.

Von Gl. 1 braucht nur der veränderliche Teil $\frac{\operatorname{tg}(\vartheta - \varphi)}{\operatorname{tg} \vartheta}$ auf Maximum untersucht zu werden; setzt man die Abgeleitete nach ϑ gleich Null, so entsteht, da ϑ zwischen φ und 90^0 liegt, also $\operatorname{tg} \vartheta$ endlich ist,

$$\frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\cos^2(\vartheta - \varphi)} - \frac{\operatorname{tg}(\vartheta - \varphi)}{\cos^2 \vartheta} = 0 \quad \text{oder}$$

$$\sin \vartheta \cos \vartheta = \sin(\vartheta - \varphi) \cos(\vartheta - \varphi), \quad \text{mithin}$$

$$\sin 2\vartheta = \sin(2\vartheta - 2\varphi).$$

Da nun die Winkel 2ϑ und $2\vartheta - 2\varphi$ nicht einander gleich sein können, so müssen sie sich zu 180^0 ergänzen, damit ihre Sinus gleich werden. Aus $4\vartheta - 2\varphi = 180^0$ wird dann

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}(90^0 + \varphi). \tag{2}$$

Dies bedeutet, dafs die Gleitebene den Winkel zwischen der Wand und der natürlichen Böschung halbiert. $\vartheta - \varphi$ wird dann

$= {}^1/_2(90^0 - \varphi)$. Da sich hiernach ϑ und $\vartheta - \varphi$ zu 90^0 ergänzen, so wird $1 : \operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}(\vartheta - \varphi)$, mithin

$$\frac{\operatorname{tg}(\vartheta-\varphi)}{\operatorname{tg}\vartheta} = \operatorname{tg}^2(\vartheta-\varphi) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{90^0-\varphi}{2}\right)$$

und

$$D = {}^1/_2\,\gamma\, h^2 \operatorname{tg}^2(45^0 - {}^1/_2\,\varphi). \tag{3}$$

Setzt man

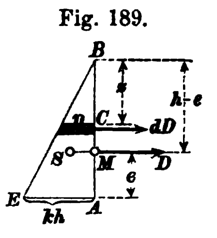
$$\gamma \operatorname{tg}^2(45^0 - {}^1/_2\,\varphi) = \gamma\,\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi} = k, \tag{4}$$

so kann man kürzer schreiben

$$D = {}^1/_2\, k h^2. \tag{5}$$

Nachdem Richtung und Größe des Druckes bestimmt sind, muß nun noch seine Lage ermittelt werden, oder die Höhe e desjenigen Punktes M (Fig. 189), in welchem D die Wandfläche schneidet; man nennt ihn den Angriffspunkt. Dabei ist zu bedenken, daß zwischen der Wand und dem Erdkörper eine stetige Druckverteilung stattfindet und daß D die Mittelkraft unendlich vieler gleichgerichteten Parallelkräfte darstellt.

Fig. 189.



Um den Druck dD auf ein in der Tiefe z unter der Oberkante B gelegenes Flächenteilchen von der Höhe dz zu erhalten, bedenke man, daß der ganze Druck D_z auf den oberen Teil $BC = z$ der Wand sich aus Gl. 5 ergibt, indem man h mit z vertauscht. $D_z = {}^1/_2\, k z^2$ gibt dann durch Differentiation

$$dD = k z\, dz.$$

Es muß nun in Bezug auf den Punkt B das Moment der Mittelkraft D gleich der Momentensumme der Einzelkräfte dD sein, oder

$$D(h-e) = \int dD \cdot z = k\int_0^h z^2\, dz.$$

Das gibt

$$\frac{k h^2}{2}(h-e) = \frac{k h^3}{3} \quad \text{und} \quad h - e = {}^2/_3\, h,$$

mithin

$$e = {}^1/_3\, h. \tag{6}$$

Die Abgeleitete $\frac{dD}{dz} = kz$ bedeutet den in der Tiefe z herrschenden Druck auf die Flächeneinheit und werde mit p bezeichnet. Es entspricht dann die Gleichung $p = kz$ ganz dem

Ausdrucke für den hydrostatischen Druck, nur ist k statt der Dichte γ gesetzt. Für $\varphi = 0$ wird $\operatorname{tg}^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) = \operatorname{tg}^2 45^\circ = 1$, und die Formeln 3—6 gelten dann für Wasserdruck.

Die Darstellung von $p = kz$ liefert die Gerade BE mit dem Ansteigungsverhältnisse k gegen BA, und $dD = kz\,dz = p\,dz$ ist dann ein wagerechter Flächenstreifen von der Höhe dz. Die wagerechten Ordinaten von BE geben daher das Gesetz der Verteilung des Druckes über die Wandhöhe. Es ist $AE = kh$, der Inhalt des Druckdreiecks ABE (nämlich $\frac{1}{2}kh \cdot h) = D$, gleich dem Gesamtdrucke, und da dies Dreieck als Belastungsfläche für die Wand betrachtet werden kann, so mufs die Höhe des Schwerpunkts S des Dreiecks zugleich die Höhe des Angriffspunktes M sein, woraus sich $e = \frac{1}{3}h$ ergibt.

Aktiver und passiver Erddruck. Die im vorstehenden berechnete Kraft

$$D = \tfrac{1}{2}\gamma h^2 \operatorname{tg}^2 (45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)$$

genügte gerade, um das Abgleiten der Erde zu verhindern. Die im Inneren des Erdkörpers auftretenden Reibungswiderstände unterstützten die von der Wand auf den Erdkörper ausgeübte Kraft D in der Erhaltung des Gleichgewichtes. Läfst man aber nun die Kraft D allmählich gröfser werden, so wird endlich der Fall eintreten, dafs die Wand sich nach der Seite des Erdkörpers in Bewegung setzt, indem ein gewisser Teil desselben nach oben hinausgeschoben wird. Für den Grenzfall, dafs die Erde im Begriff ist, nachzugeben, wollen wir den Druck der Platte mit D_1 bezeichnen und seine Gröfse berechnen. Man verfährt dabei in derselben Weise, wie bei der vorigen Untersuchung, legt durch A (Fig. 190) eine beliebige Schnittebene und hat nun den Reibungswiderstand an derselben abwärts gerichtet anzubringen, so dafs der Gesamtwiderstand W jetzt in die entgegengesetzte Grenzlage kommt (gegenüber dem früheren Falle) und mit der Lotrechten den Winkel $\vartheta + \varphi$ einschliefst. Es wird dann

Fig. 190.

$$7)\qquad D_1 = Q \operatorname{tg}(\vartheta + \varphi) = \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\operatorname{tg}(\vartheta + \varphi)}{\operatorname{tg}\vartheta}.$$

Für $\vartheta = 90^0 - \varphi$ und für $\vartheta = 0$ wird $D_1 = \infty$, während für Zwischenwerte von ϑ sich im allgemeinen endliche Gröfsen für D_1 ergeben. Man hat nun denjenigen Wert von ϑ zu suchen, für welchen D_1 ein Minimum wird. Die hierdurch bestimmte Schnittfläche AG ist die Gleitebene, an welcher am leichtesten ein Aufwärtsschieben möglich ist, an welcher es daher auch wirklich eintreten wird, wenn D_1 entsprechend zunimmt. Diesen Minimalwert der Gl. 7 darf also der Druck der Wand nicht überschreiten, wenn der Erdkörper in Ruhe bleiben soll. Zur Berechnung desselben mufs $dD_1 : d\vartheta = 0$ gesetzt werden, und da nun Gl. 7 sich von Gl. 1 nur durch das Vorzeichen von φ unterscheidet, so mufs (mit Rücksicht auf Gl. 2 und 3) jetzt

8) $$\vartheta = \tfrac{1}{2}(90^0 - \varphi) \quad \text{und}$$

9) $$D_1 = \tfrac{1}{2}\gamma h^2 \operatorname{tg}^2(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi)$$

werden. Um die Neigung der Gleitebene durch Zeichnung zu finden, müfste man jetzt den Reibungswinkel φ an die Wagerechte durch A nach unten auftragen und den stumpfen Winkel zwischen der so erhaltenen natürlichen Böschung AF und der Wand halbieren. Die Lage von D_1 stimmt mit derjenigen von D überein, weil ja D_1 ebenfalls in der Form $D_1 = \frac{1}{2} k_1 h^2$ geschrieben werden kann, wenn man nur in Gl. 4 für k das Vorzeichen von φ umkehrt.

Der Wert von D nach Gl. 3 heifst der **aktive Erddruck**, weil der Erdkörper nur diese Kraft auf die Platte ausübt, wenn er im Begriff ist, vorzurücken und die Platte vor sich herzuschieben, also gegen die Platte aktiv zu wirken.

Der gröfsere Wert D_1 aber nach Gl. 9 heifst der **passive Erddruck** oder der **Erdwiderstand**, weil bei dem Vorgange, der zur Berechnung von D_1 angenommen ist, der Erdkörper sich widerstehend oder passiv gegen die Platte verhält. Er kommt in Frage, wenn sich ein Pfosten, eine Strebe, ein Bogenträger oder ein Gewölbe gegen einen Erdkörper stützt. Zwischen diesen beiden Grenzwerten, dem aktiven und dem passiven Erddrucke, wird die Gröfse der Kraft stets liegen, die ein Erdkörper ausübt. Für $\varphi = 30^0$ wird

$$k = \gamma \operatorname{tg}^2 30^0 = \tfrac{1}{3}\gamma, \quad k_1 = \gamma \operatorname{tg}^2 60^0 = 3\gamma,$$

der passive Erddruck also 9 mal so grofs wie der aktive, und es ist zuweilen recht schwierig, die Gröfse des wirklichen Erddruckes in bestimmten Fällen anzugeben.

Berücksichtigung der Scherfestigkeit (Kohäsion) der Erde. Tritt zu der Reibung an der Schnittebene noch die Scherfestigkeit hinzu, so mufs man Normal- und Tangentialwiderstand einzeln einführen; es müssen daher (Fig. 191) D, Q, N und $fN + cl$ im Gleichgewichte sein, wenn wiederum

$$l = AG = h : \sin\vartheta$$

ist. In der Richtung von AG ergibt sich

Fig. 191. Fig. 192.

$$D\cos\vartheta = Q\sin\vartheta - fN - cl,$$

rechtwinklig dazu: $N = Q\cos\vartheta + D\sin\vartheta$, mithin wird

$$D(\cos\vartheta + f\sin\vartheta) = (Q\sin\vartheta - f\cos\vartheta) - cl$$

oder, wenn man f mit $\sin\varphi : \cos\varphi$ vertauscht,

$$D\cos(\vartheta - \varphi) = Q\sin(\vartheta - \varphi) - ch\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta},$$

also

$$10) \qquad D = \frac{\gamma h^2}{2}\frac{\operatorname{tg}(\vartheta - \varphi)}{\operatorname{tg}\vartheta} - \frac{ch\cos\varphi}{\sin\vartheta\cos(\vartheta - \varphi)}.$$

Das erste Glied der rechten Seite wird (nach S. 381) für $\vartheta = 45^\circ + \frac{1}{2}\varphi$ zum Maximum, und man überzeugt sich leicht, dafs der Nenner des zweiten Gliedes, nämlich $\sin\vartheta\cos(\vartheta - \varphi)$, für $\vartheta = 45^\circ + \frac{1}{2}\varphi$ ebenfalls seinen gröfsten Wert $\cos^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$ erreicht; hierdurch wird also das zweite Glied selbst ein Minimum und mit Einbeziehung seines negativen Vorzeichens ebenfalls ein Maximum. Die Neigung der Gleitebene ist hiernach dieselbe wie ohne Berücksichtigung der Schubfestigkeit, der aktive Erddruck aber wird

$$11) \qquad D = \frac{\gamma h^2}{2}\operatorname{tg}^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi) - \frac{ch\cos\varphi}{\cos^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}.$$

Dieser Druck wird zu Null für eine Wandhöhe $h = h_0$, wenn

$$\frac{\gamma h_0}{2}\operatorname{tg}^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{c\cos\varphi}{\cos^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)} \quad \text{oder}$$

$$12) \qquad h_0 = \frac{2c\cos\varphi}{\gamma\sin^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)} = \frac{4c\cos\varphi}{\gamma(1 - \sin\varphi)};$$

d. h. auf diese Höhe hält sich der Erdkörper mit lotrechter Vorderfläche ohne eine stützende Wand. Setzt man den aus letzter Gleichung gefundenen Wert

$$c\cos\varphi = \tfrac{1}{2}\gamma h_0\sin^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)$$

in Gl. 11 ein, so entsteht

$$D = \tfrac{1}{2}\gamma h^2 \operatorname{tg}^2(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) - \tfrac{1}{2}\gamma h h_0 \operatorname{tg}^2(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) \quad \text{oder}$$

13) $$D = \tfrac{1}{2}\gamma h(h - h_0)\operatorname{tg}^2(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) = \tfrac{1}{2} k h (h - h_0),$$

wenn wiederum $\gamma \operatorname{tg}^2(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) = k$ eingeführt wird.

Dieser Druck verteilt sich nicht auf die ganze Höhe der Wand, sondern nur auf $h = h_0$, weil der obere Teil h_0 keinen Druck erfährt. Um das Gesetz der Verteilung zu finden, vertausche man in Gl. 13 die Höhe h mit $z + h_0$ (Fig. 192), dann ergibt sich $D_z = \tfrac{1}{2} k (z + h_0) z$ und

$$p = \frac{dD}{dz} = k(z + \tfrac{1}{2} h_0). \quad \text{Für}$$

$$z = 0 \text{ wird } p = k \cdot \tfrac{1}{2} h_0 = CD, \quad \text{für}$$

$$z = h - h_0 \text{ wird } p = k(h - \tfrac{1}{2} h_0) = AE,$$

und man erhält das Drucktrapez $ACDE$, dessen nicht parallele Seiten sich bei F in der Mitte der Standhöhe h_0 schneiden. Die Neigung der Geraden DE gegen CA ist dieselbe wie im vorigen Falle (ohne Scherfestigkeit) (S. 382), es ist nur der Schnittpunkt beider von B nach F gerückt. Die Höhe e des Schwerpunktes des Trapezes über der Grundlinie, gleichbedeutend mit der Höhe des Angriffspunktes von D, findet man leicht zu

$$e = \frac{h}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{h_0}{h} - \frac{1}{2}\frac{h_0^2}{h^2}\right).$$

Da $e < \tfrac{1}{3} h$, so folgt, daſs die Scherfestigkeit nicht nur die Gröſse des aktiven Erddrucks D vermindert, sondern auch seinen Angriffspunkt senkt. Diese günstige Wirkung der Scherfestigkeit ist indes eine unsichere, weil die Kohäsion innerhalb des Erdkörpers, auf der sie beruht, keine unveränderlich dauernde ist und beispielsweise bei Austrocknung oder starker Durchnässung fast völlig verschwinden kann. Bei der Beurteilung der Standsicherheit von Bauwerken, die nicht etwa nur vorübergehenden unwichtigen Zwecken dienen, muſs daher die statische Wirkung der Scherfestigkeit auſser Acht bleiben.

c) Normaldruck eines Erdkörpers mit abfallender Oberfläche gegen eine lotrechte Ebene.

Zum Zwecke einer Bauausführung sei eine lotrechte Bohlwand AB von der Höhe h hergestellt und auf einer Seite (Fig. 193)

mit einem Erdkörper ABC hinterfüllt, der unter der natürlichen Böschung abfällt. Es sollen der aktive Erddruck gegen die Wand und der Widerstand des Erdkörpers gegen Verschiebung durch gegen die Wand drückende Streben u. dergl., d. h. der passive Erddruck berechnet werden. Der allgemeine Rechnungsgang ist der gleiche wie vorstehend entwickelt; nur die abweichende Form des Erdkörpers bedingt ein anderes Ergebnis.

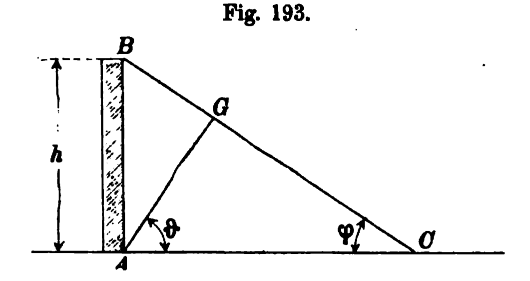


Fig. 193.

1. Aktiver Erddruck. AG sei die Gleitebene mit dem noch unbekannten Neigungswinkel ϑ. Dann ergibt sich, da der Winkel $AGB = \vartheta + \varphi$ ist,

$$BG = h \cdot \frac{\sin(90^0 - \vartheta)}{\sin(\vartheta + \varphi)} = h \frac{\cos\vartheta}{\sin(\vartheta + \varphi)}$$

und das Gewicht des Erdkörpers ABG zu

$$1) \qquad Q = \frac{\gamma}{2} \cdot h \cos\varphi \cdot BG = \gamma \frac{h^2}{2} \frac{\cos\vartheta \cdot \cos\varphi}{\sin(\vartheta + \varphi)}.$$

Die wagerechte Kraft D, welche Wand und Erdkörper im gegenseitigen Gleichgewicht aufeinander ausüben, ist daher nach S. 381

$$2) \qquad D = Q \cdot \operatorname{tg}(\vartheta - \varphi) = \gamma \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\cos\vartheta \cdot \cos\varphi}{\sin(\vartheta + \varphi)} \cdot \operatorname{tg}(\vartheta - \varphi).$$

D erscheint als Funktion von ϑ und wird für einen bestimmten Winkel ϑ zu einem Maximum, das den wirklich herrschenden Erddruck darstellt. Wandelt man Gl. 2 so um, dafs darin ϑ nur in der Funktion $\operatorname{tg}\vartheta$ vorkommt, so erhält man

$$D = \gamma \frac{h^2}{2} \frac{1}{\operatorname{tg}\vartheta + \operatorname{tg}\varphi} \cdot \frac{\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\vartheta \cdot \operatorname{tg}\varphi}.$$

Setzt man zur Abkürzung $\operatorname{tg}\vartheta = x$ und $\operatorname{tg}\varphi = f$, so wird

$$3) \quad \vartheta = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \frac{1}{(x+f)} \cdot \frac{x-f}{(1+x \cdot f)} = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \frac{x-f}{x+f+f \cdot x^2 + f^2 \cdot x}.$$

Soll die gebrochene Funktion $\frac{x-f}{x+f+f\cdot x^2+f^2\cdot x}=\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ ein Maximum werden, so mufs

$$\varphi(x)F'(x)-\varphi'(x)F(x)=0 \text{ oder}$$

$$4)\qquad \frac{F(x)}{\varphi(x)}=\frac{F'(x)}{\varphi'(x)} \text{ sein.}$$

Setzt man die Werte für $F(x)$ und $\varphi(x)$, sowie $\frac{F'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{1}{1+2f\cdot x+f^2}$ in Gl. 3 ein und löst für x auf, so folgt

$$5)\qquad x=f+\sqrt{2(1+f^2)}, \text{ oder}$$

$$6)\qquad \operatorname{tg}\vartheta=\operatorname{tg}\varphi+\frac{\sqrt{2}}{\cos\varphi}=\frac{\sin\varphi=\sqrt{2}}{\cos\varphi}.$$

Den Gröfstwert von D könnte man nun erhalten durch Einfügung des Wertes von x Gl. 5 in Gl. 3. Weil für D_{max} Gl. 4 gilt, darf man den Quotienten $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ in Gl. 3 ersetzen durch

$$\frac{F'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{1}{1+2f\cdot x+f^2}$$

und erhält dann mit Berücksichtigung der Gl. 5 und 6

$$D=\frac{\gamma h^2}{2}\cdot\frac{1}{1+2f\cdot x+f^2}=\frac{\gamma h^2}{2}\cdot\frac{1}{1+2f^2+2f\sqrt{2(1+f^2)}+f^2}$$

$$=\frac{\gamma h}{2}\cdot\frac{1}{1+3f^2+2f\cdot\sqrt{2(1+f^2)}}=\frac{\gamma h^2}{2}\,\frac{1}{1+3\operatorname{tg}^2\varphi+2\operatorname{tg}\varphi\sqrt{2(1+\operatorname{tg}^2\varphi)}}$$

$$=\frac{\gamma h^2}{2}\cdot\frac{1}{\sec^2\varphi+2\operatorname{tg}^2\varphi+2\operatorname{tg}\varphi\sec\varphi\cdot\sqrt{2}}=\frac{\gamma h^2}{2}\,\frac{1}{(\sec\varphi+\sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi)^2}$$

d. i.

$$7)\qquad D=\frac{\gamma h^2}{2}\left(\frac{\cos\varphi}{1+\sqrt{2}\sin\varphi}\right)^2.$$

2. Passiver Erddruck. Das Gewicht des Erdkörpers ABG (Fig. 195) ist wie in Gl. 1

$$Q=\frac{\gamma h^2}{2}\cdot\frac{\cos\vartheta\cdot\cos\varphi}{\sin(\vartheta+\varphi)}=\frac{\gamma h^2}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\vartheta+\operatorname{tg}\varphi}.$$

Diejenige Kraft aber, welche im stande ist, diesen Körper längs der Gleitfläche AG gleichmäfsig aufwärts zu bewegen, mufs nach Gl. 7 S. 383 sein

$$8)\qquad D_1=Q\cdot\operatorname{tg}(\vartheta+\varphi)=\frac{\gamma h^2}{2}\,\frac{\operatorname{tg}(\vartheta+\varphi)}{\operatorname{tg}\vartheta+\operatorname{tg}\varphi}=\frac{\gamma h^2}{2}\cdot\frac{1}{1-\operatorname{tg}\vartheta\cdot\operatorname{tg}\varphi}.$$

In Gl. 8 ist D_1 abhängig von ϑ. Der Erdkörper ABG wird sich nun in einer Gleitfläche von solcher Neigung ϑ verschieben, daſs der Widerstand D_1 am kleinsten ausfällt, d. h. nach Gl. 8 in der kleinstmöglichen Neigung ϑ, also bei wagerechter Sohle des Dammes ABC bei $\vartheta = 0$. Der passive Erddruck ist daher

$$D_1 = \frac{\gamma h^2}{2}. \tag{9}$$

Beispiel: Für $\varphi = 30^\circ$, $\sin\varphi = 0{,}5$, $\cos\varphi = 0{,}866$ wird nach Gl. 6 $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{0{,}5 + \sqrt{2}}{0{,}866} = 2{,}21$, $\vartheta = 65^\circ\,39'$ und nach Gl. 7

$$D = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \left(\frac{0{,}866}{1 + \sqrt{2 \cdot 0{,}5}}\right)^2 = 0{,}257\,\frac{\gamma h^2}{2}$$

gegen $D_1 = \frac{\gamma h^2}{2}$, während für den in Fig. 188 dargestellten Fall des wagerecht begrenzten Erdkörpers nach S. 380 u. f. $\vartheta = 60^\circ$, $D = \frac{1}{3}\,\frac{\gamma h^2}{2}$, $\vartheta_1 = 30^\circ$ und $D_1 = 3 \cdot \frac{\gamma h^2}{2}$ sein würde.

d) Druck eines überhöhten Erdkörpers gegen eine Stützmauer.

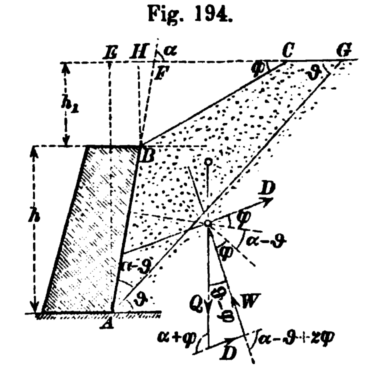
Wird eine Mauer, die zur Stützung eines Erdkörpers bestimmt ist, mit Erde hinterfüllt, so muſs sie durch den Druck derselben eine Formänderung erfahren und (wenn auch nur in geringem Maſse) ausweichen. Dadurch wird an einer vom Fuſspunkte des Erdkörpers ausgehenden Gleitebene eine abwärts gerichtete Bewegung eingeleitet, welcher sich der volle Gleitwiderstand entgegensetzt. Es folgt daraus, daſs, solange dieser anfängliche Zustand erhalten bleibt, die Stützmauer nur den aktiven Erddruck auszuhalten hat. Auf die durchaus unsichere Scherfestigkeit der Erde soll im folgenden keine Rücksicht genommen werden, so daſs wir an der Gleitebene nur mit dem Normalwiderstande N und der Reibung fN, oder mit dem Gesamtwiderstande W zu tun haben, welcher von der Normalen um den Reibungswinkel φ abweicht. Wenn sich aber durch Nachgeben der Mauer der Raum an ihrer Rückseite vergröſsert, so wird das Erdprisma auch an der Wand etwas abwärts gleiten, wodurch auch an dieser der volle Reibungswiderstand hervorgerufen wird. Die Rückseite der Mauer bildet daher eine zweite Gleitfläche. Dieselbe werde als eben vorausgesetzt, dann wird der an ihr auftretende Gesamtdruck, d. h. der gegen die Stützmauer zur Wirkung kommende Erddruck D um den vollen Reibungswinkel von der Normalen zur Wand abweichen. Die

Kräfte W und D müssen nun dem Gewichte Q des Erdprismas das Gleichgewicht halten.

Ist die Reibungsziffer für Erde gegen Mauerwerk gröfser als die für Erde gegen Erde, so wird dieser Umstand der Sicherheit der Mauer nicht zu statten kommen, weil in solchem Falle eine sehr dünne Erdschicht sich an der Mauer festhängen, das Gleiten aber unmittelbar dahinter in dem Erdkörper stattfinden kann. Bei geringerer Reibung dagegen zwischen Mauer und Erde müfste auch der entsprechende kleinere Reibungswinkel in Ansatz gebracht werden. Wir machen hier die Annahme, dafs der letztere Fall nicht vorliegt, dafs also derselbe Reibungswinkel φ für die Gleitebene und für die Mauer zur Anwendung kommt.*)

Die Rückwand AB der Mauer (Fig. 194) habe eine Neigung α gegen die Wagerechte und eine Höhe h; von dem Punkte B steige der Erdkörper unter dem natürlichen Böschungswinkel φ noch um eine Höhe h_1 an und sei dann wagerecht begrenzt.

Fig. 194.



Man führe nun einen Schnitt AG, so dafs Q das Gewicht des Erdkörpers $ABCG$ bedeutet. Die Kräfte D, Q und W müssen dann ein geschlossenes Dreieck bilden. Der Winkel zwischen Q und W ist wiederum $\vartheta - \varphi$ wie in Fig. 188, S. 380. Bezüglich des Winkels zwischen D und W ist zu bedenken, dafs, wenn beide Kräfte Normaldrücke wären, sie denselben Winkel $\alpha - \vartheta$ miteinander bilden müfsten wie die betreffenden Ebenen AB und AG; dadurch aber, dafs jede der Kräfte von der Normalen um φ abweicht, vergröfsert sich ihr Schnittwinkel um 2φ, beträgt daher $\alpha - \vartheta + 2\varphi$. Zur Abkürzung werde

1) $$\alpha + 2\varphi = \varepsilon \text{ gesetzt,}$$

*) Nach Versuchen von Müller-Breslau (vergl. dessen „Erddruck auf Stützmauern", 1906, Leipzig, Verlag von A. Kröner) ist die Annahme, dafs der Reibungswinkel für die Abwärtsbewegung des Erdkörpers an der Mauerfläche gleich dem natürlichen Böschungswinkel φ sei, selbst bei rauhen Mauerflächen nicht ratsam, vielmehr erscheint eine Annahme desselben zu etwa $^3/_4\ \varphi$ zweckmäfsiger.

so dafs $\alpha - \vartheta + 2\varphi = \varepsilon - \vartheta$. Der Aufsenwinkel des Dreiecks zwischen den Richtungen Q und D ergibt sich als Summe der beiden gegenüber liegenden Dreieckswinkel zu $\alpha + \varphi$. Nach dem Sinus-Satze wird nun

2) $$\frac{D}{Q} = \frac{\sin(\vartheta - \varphi)}{\sin(\varepsilon - \vartheta)}.$$

Zur Berechnung der Fläche $ABCG$ zerlegt man sie in rechtwinklige Dreiecke:

$$ABCG = AEG - AEF - (BCH - BFH)$$
$$= {}^1/_2\,(h + h_1)^2 (\cot\vartheta - \cot\alpha) - {}^1/_2\, h_1^2 (\cot\varphi - \cot\alpha);$$

dann wird

$$Q = \gamma \frac{(h + h_1)^2}{2} \left\{ \cot\vartheta - \cot\alpha - \frac{h_1^2}{(h + h_1)^2} (\cot\varphi - \cot\alpha) \right\}.$$

Die drei letzten Glieder sind von ϑ unabhängig, weshalb zur Abkürzung

3) $$\cot\alpha + \frac{h_1^2}{(h + h_1)^2} (\cot\varphi - \cot\alpha) = m$$

gesetzt werden möge, dann wird nach Gl. 2:

$$D = \gamma \frac{(h + h_1)^2}{2} \frac{(\cot\vartheta - m)\sin(\vartheta - \varphi)}{\sin(\varepsilon - \vartheta)}.$$

Es empfiehlt sich nun wiederum, den Winkel ϑ nur mit einer trigonometrischen Funktion auftreten zu lassen; man entwickele daher $\sin(\vartheta - \varphi)$ und $\sin(\varepsilon - \vartheta)$, führe durch geeignete Division und Multiplikation mit $\sin\vartheta$, $\sin\varphi$ und $\sin\varepsilon$ alles möglichst auf Kotangenten zurück und erhält

4) $$D = \gamma \frac{(h + h_1)^2}{2} \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} \frac{(\cot\vartheta - m)(\cot\varphi - \cot\vartheta)}{\cot\vartheta - \cot\varepsilon}.$$

Der letzte Teil dieser Gleichung ist eine gebrochene Funktion von ϑ; schreibt man dieselbe $\frac{f(\vartheta)}{F(\vartheta)}$, so ist die Bedingung für Maximum:

5) $$F(\vartheta) f'(\vartheta) - f(\vartheta) F'(\vartheta) = 0 \qquad \text{oder}$$

6) $$\frac{f(\vartheta)}{F(\vartheta)} = \frac{f'(\vartheta)}{F'(\vartheta)}.$$

Führt man die in Gl. 5 angedeuteten Ableitungen aus und berücksichtigt, dafs $d(\cot\vartheta) = -\frac{d\vartheta}{\sin^2\vartheta}$ ist, so entsteht nach geeigneter Zusammenziehung:

7) $$\cot\vartheta = \cot\varepsilon + \sqrt{(\cot\varphi - \cot\varepsilon)(m - \cot\varepsilon)}.$$

(Da $\vartheta < \alpha$, also auch $\vartheta < \alpha + 2\varphi = \varepsilon$, mithin $\cot\vartheta > \cot\varepsilon$ sein mufs, so ist nur das positive Zeichen vor der Wurzel brauchbar.)

Den Wert von $\cot\vartheta$ nach Gl. 7 hätte man nun in Gl. 4 einzusetzen. Weil aber in dieser die Gröfse $\cot\vartheta$ dreimal vorkommt, so ist es bequemer, nach Gl. 6 statt der ursprünglichen Bruchfunktion den Bruch der Abgeleiteten von Zähler und Nenner zu benutzen. Es wird dann

$$D = \gamma \frac{(h+h_1)^2}{2} \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} \frac{f'(\vartheta)}{F'(\vartheta)}$$

$$= \gamma \frac{(h+h_1)^2}{2} \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} \frac{\dfrac{\cot\vartheta - m}{\sin^2\vartheta} - \dfrac{\cot\varphi - \cot\vartheta}{\sin^2\vartheta}}{-\dfrac{1}{\sin^2\vartheta}}$$

oder

$$D = \gamma \frac{(h+h_1)^2}{2} \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} (\cot\varphi + m - 2\cot\vartheta).$$

Hierin kommt $\cot\vartheta$ nur einmal vor, ist daher leicht einzusetzen und gibt

$$D = \gamma \frac{(h+h_1)^2}{2} \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} \left\{\cot\varphi + m - 2\cot\varepsilon - 2\sqrt{(\cot\varphi - \cot\varepsilon)(m - \cot\varepsilon)}\right\}.$$

was sich kürzer schreiben läfst*):

$$8) \qquad D = \gamma \frac{(h+h_1)^2}{2} \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} \left\{\sqrt{\cot\varphi - \cot\varepsilon} - \sqrt{m - \cot\varepsilon}\right\}^2.$$

Darin ist $\varepsilon = \alpha + 2\varphi$ und

$$m = \cot\alpha + \frac{h_1^2}{(h+h_1)^2} (\cot\varphi - \cot\alpha).$$

Erdkörper ohne Überhöhung (Fig. 195). Für $h_1 = 0$ wird $m = \cot\alpha$, daher (Gl. 7)

$$9) \qquad \cot\vartheta = \cot\varepsilon + \sqrt{(\cot\varphi - \cot\varepsilon)(\cot\alpha - \cot\varepsilon)}$$

und

$$10) \qquad D = \gamma \frac{h^2}{2} \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} \left\{\sqrt{\cot\varphi - \cot\varepsilon} - \sqrt{\cot\alpha - \cot\varepsilon}\right\}^2.$$

Jetzt kann D wieder in der einfachen Form

$$D = \tfrac{1}{2} k h^2$$

geschrieben werden; daher wird das Gesetz der Verteilung des Druckes D über die Höhe der Wand wieder ein Dreieck von der

*) K. v. Ott, Vorträge über Baumechanik, 1. Aufl., I. Teil, S. 27.

Grundlinie kh, und es mufs der **Angriffspunkt** M von D wieder in der Höhe

11) $e = {}^1/_3 h$ liegen.

Fig. 195.

Steht die gedrückte Wandfläche auch noch lotrecht, ist also $\alpha = 90^0$, so wird

$$\cot\alpha = 0, \quad \varepsilon = 90^0 + 2\varphi,$$

mithin

$$\cot\varepsilon = -\operatorname{tg}(2\varphi), \quad \sin\varepsilon = \cos 2\varphi \quad \text{und}$$

$$D = \gamma\frac{h^2}{2}\frac{\sin\varphi}{\cos 2\varphi}(\sqrt{\cot\varphi + \operatorname{tg} 2\varphi} - \sqrt{\operatorname{tg} 2\varphi})^2,$$

was sich aber auch zu

12) $$D = \frac{\gamma h^2}{2}\frac{\cos\varphi}{(1 + \sqrt{2}\sin\varphi)^2}$$

oder zu $$D = \frac{\gamma h^2}{2}\frac{\sqrt{1+f^2}}{2(f + \sqrt{{}^1/_2(1+f^2)})^2}$$

zusammenziehen läfst, worin $f = \operatorname{tg}\varphi$.

Für $\varphi = 30^0$ wird nach Gl. 12:

$$k = \gamma\frac{\cos\varphi}{(1 + \sqrt{2}\sin\varphi)^2} = 0{,}297\,\gamma$$

und $D = {}^1/_2 \cdot 0{,}297\,\gamma h^2$, während sich **ohne** Reibung an der Wand $D = {}^1/_2 \cdot {}^1/_3\,\gamma h^2$ ergibt (S. 383).

Die Gl. 10—12 müssen auch für Wasserdruck gelten. Es wird dann zunächst $\varepsilon = \alpha$ und nach Gl. 10

$$D = \gamma\frac{h^2}{2}\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}(\cot\varphi - \cot\alpha) = \frac{\gamma h^2}{2}\frac{\cos\varphi - \sin\varphi\cot\alpha}{\sin\alpha};$$

setzt man hierin $\varphi = 0$, so entsteht richtig

$$D = \frac{\gamma h^2}{2\sin\alpha}.$$

Unbegrenzt ansteigender Erdkörper. Für $h_1 = \infty$ wird $\frac{h_1}{h + h_1} = 1$, mithin $m = \cot\varphi$ und (Gl. 7, S. 391)

13) $\cot\vartheta = \cot\varphi$, oder $\vartheta = \varphi$,

Fig. 196.

d. h. die Gleitfläche ist in diesem Falle mit der natürlichen Böschung parallel (Fig. 196). In Gl. 8 wird für $m = \cot\varphi$ der letzte Klammerausdruck Null, der Faktor $(h + h_1)^2$ aber unendlich, so dafs D zunächst in der unbestimmten

Form $\infty \cdot 0$ erscheint. Um hierfür eine bestimmte Gröfse zu erhalten, mufs man für m den ursprünglichen Wert (Gl. 3, S. 391) einführen und mufs den Faktor $(h+h_1)^2$ durch den Divisor $1:(h+h_1)^2$ ersetzen, damit die Form $0:0$ entsteht. Es ist dann

$$D = \frac{\gamma}{2} \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} \left\{ \frac{\sqrt{\cot\varphi - \cot - \varepsilon}\sqrt{\cot\alpha + \left(\frac{h_1}{h+h_1}\right)^2 (\cot\varphi - \cot\alpha) - \cot\varepsilon}}{\frac{1}{h+h_1}} \right\}^2.$$

In dem (bis jetzt unbestimmten) Klammerausdrucke sind nun Zähler und Nenner mit ihren Abgeleiteten nach der Gröfse h_1 zu vertauschen; führt man dann wiederum $h_1 = \infty$ ein, so entsteht nach entsprechender Kürzung der bestimmte Wert

$$D = \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} \frac{(\cot\varphi - \cot\alpha)^2}{\cot\varphi - \cot\varepsilon},$$

wofür man mit $\varepsilon = \alpha + 2\varphi$ auch schreiben kann

$$D = \frac{\gamma h^2}{2} \frac{1 - \cos 2(\alpha - \varphi)}{(1 - \cos 2\alpha)\sin(\alpha + \varphi)}. \tag{14}$$

Wiederum erscheint D in der Form $\frac{1}{2} k h^2$, so dafs die Druckverteilung wieder durch ein Dreieck darstellbar ist und der Angriffspunkt M in der Höhe $e = \frac{1}{3} h$ liegt.

Für eine lotrechte Wandfläche oder $\alpha = 90^0$ wird

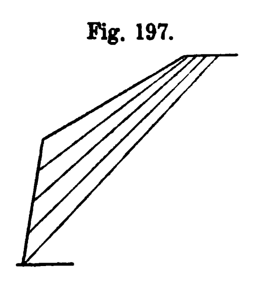
$$D = \frac{1}{2} \gamma h^2 \cos\varphi, \tag{15}$$

was für $\varphi = 30^0$ $D = 0{,}433 \gamma h^2$ gibt (etwa 3 mal soviel wie bei $h_1 = 0$).

Endliche Überhöhung des Erdkörpers. Hat h_1 irgend einen endlichen Wert, so gilt für den Erddruck die Gl. 8 (S. 392). Bei der Ableitung derselben wurde in Fig. 194 vorausgesetzt, dafs die Gleitebene AG rechts von dem Punkte C liegt, denn andernfalls würde das abgleitende Erdprisma nicht durch ein Viereck dargestellt. Von der Richtigkeit dieser Voraussetzung (falls BC unter dem natürlichen Böschungswinkel φ ansteigt) kann man sich in jedem besonderen Falle leicht überzeugen, indem man ϑ nach Gl. 7 berechnet und mit der Neigung einer Geraden AC vergleicht. Man wird dann stets finden, dafs die Annahme zutreffend war. Nimmt man nämlich eine bestimmte Überhöhung h_1 an, läfst aber die in Betracht kommende Mauerhöhe h von Null an stetig zunehmen, indem man den Fufspunkt A an der Wandfläche allmählich nach

unten verschiebt, so ergibt sich für $h = 0$ die Gleitfläche parallel der natürlichen Böschung (weil dann Gl. 13 gilt), mit wachsendem h wird aber $\cot \vartheta$ kleiner und ϑ langsam gröfser, wobei sich jedoch die verschiedenen Gleitebenen innerhalb des Erdkörpers nicht durchschneiden (Fig. 197).

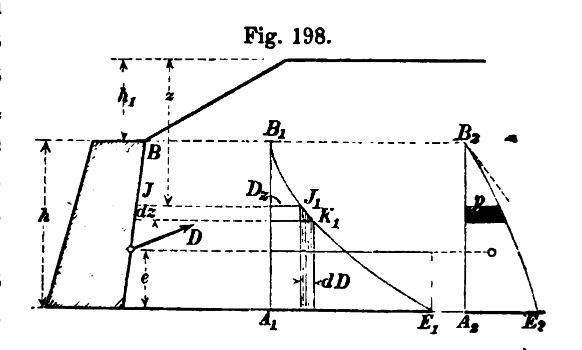
Fig. 197.



Angriffspunkt des Erddruckes. Die Beziehung zwischen D und h in Gl. 8 ist eine verwickelte, weil in m auch noch die Gröfse h vorkommt; die Druckverteilung geschieht daher nicht mehr nach einer Dreiecksfläche, und der Angriffspunkt des Erddruckes liegt infolgedessen auch nicht mehr im unteren Drittelspunkte der Wand; man kann ihn aber stets in folgender Weise bestimmen:

Betrachtet man von der Wand nur das Stück $BJ = z - h_1$ (Fig. 198), so kann man den auf BJ kommenden Druck D_z berechnen, indem man in Gl. 8 $h + h_1$ mit z vertauscht. Trägt man diese Werte D_z in der Wagerechten durch die zugehörigen Punkte J der Wand von einer Lotrechten $A_1 B_1$ ab, so erhält man eine Kurve $B_1 E_1$, welche man, zum Unterschiede von der Druckverteilungsfigur, die Gesamtdruck-Kurve nennen kann, und welche als Integralkurve jener zu bezeichnen ist. Zur Ermittelung des Angriffspunktes von D kann man sich diesen Druck und die sämtlichen Teile dD desselben um ihre Angriffspunkte an der Wand gedreht denken, bis sie wagerecht liegen. Dann gilt die Momentengleichung

Fig. 198.



$$15)\qquad De = \int_{z = h_1}^{z = h + h_1} dD\,(h + h_1 - z)\,.$$

Läfst man aber z um dz wachsen, so entspricht der Abszisse $z + dz$ ein Kurvenpunkt K_1, und der Grundrifs von $J_1 K_1$ stellt dD dar, während $h + h_1 - z$ die Höhe des Punktes J_1 über der

Grundlinie $A_1 E_1$ ist. Der in der Figur schraffierte lotrechte Flächenstreifen hat daher den Inhalt $dD(h+h_1-z)$, und das Integral in Gl. 15 bedeutet den Flächeninhalt von $A_1 B_1 E_1$. Verwandelt man diese Fläche in ein Rechteck von der Breite $A_1 E_1 = D$, so ist dessen Höhe nach Gl. 15 das gesuchte e. Man kann hiernach auch schreiben:

16) $$De = \int_{h_1}^{h+h_1} D_z \, dz \, .$$

In allen Fällen, wo die einfache Beziehung $D = {}^1/_2 k h^2$ gilt, ist die Kurve $B_1 E_1$ eine Parabel mit dem Scheitel B_1, das Parabeldreieck hat dann den Inhalt ${}^1/_3 h \cdot \overline{A_1 E_1}$, und es wird $e = {}^1/_3 h$.

Setzt man in Gl. 8

$$\gamma \frac{\sin \varphi}{2 \sin \varepsilon} (\cot \varphi - \cot \varepsilon) = B \, ,$$

$$\frac{\cot \varphi - \cot \alpha}{\cot \varphi - \cot \varepsilon} = C, \quad \text{mithin}$$

$$\frac{\cot \alpha - \cot \varepsilon}{\cot \varphi - \cot \varepsilon} = 1 - C, \quad \text{so wird}$$

$$D = B(h+h_1)^2 \left(1 - \sqrt{1 - C + \frac{h_1^2}{(h+h_1)^2} C}\right)^2 \quad \text{und}$$

$$D_z = B\left(z - \sqrt{z^2(1-C) + h_1^2 C}\right)^2 ; \quad \text{daher}$$

$$p = \frac{dD}{dz} = 2B\left(z - \sqrt{z^2(1-C) + h_1^2 C}\right)\left(1 - \frac{z(1-C)}{\sqrt{z^2(1-C)+h_1^2 C}}\right).$$

Hiernach könnte man auch die Druckverteilungsfigur zeichnen. Besonders wichtig ist, dafs für $z = h_1$ $p = 0$ wird. dafs also diese Figur wiederum ein Dreieck $A_2 B_2 E_2$ ist, dessen eine Seite allerdings durch eine krumme Linie gebildet wird. Diese hat oben bei B_2 eine Neigung $dp:dz$, welche gleich dem Werte k für unendliche Ueberhöhung sein mufs; nach unten nähert sich diese Neigung mehr und mehr demjenigen Werte von k, welcher dem Falle $h_1 = 0$ entspricht.

Weil für $z = h_1$ die Abgeleitete $dD:dz = 0$, so ist die Kurve $B_1 E_1$ bei B_1 lotrecht gerichtet.

Führt man die angedeuteten Ermittelungen durch, so findet man, dafs die Höhe e des Angriffspunktes von D je nach der Gröfse der Überhöhung h_1 und des Reibungswinkels φ zwischen ${}^1/_3 h$ und etwa ${}^3/_8 h$ schwankt. (Für $h_1 = 0$ hatte sich ja ${}^1/_3 h$ ergeben und für $h_1 = \infty$ gilt nach S. 394 dasselbe.) Man darf dafür in allen Fällen mit genügender Annäherung

$$e = {}^1/_3 h$$

setzen und kann sich die mühsame Berechnung des richtigen Wertes

ersparen, weil ja das Erdreich fast immer etwas Scherfestigkeit besitzt, deren günstige Wirkung hier ganz vernachlässigt wurde.

Lotrechte Wand mit überhöhtem Erdkörper. Für $\alpha = 90^0$ wird $\cot \alpha = 0$, $\varepsilon = 90^0 + 2\varphi$, $m = \frac{h_1^2}{(h+h_1)^2} \cot \varphi$, daher (Gl. 8)

$$17)\quad D = \frac{\gamma h^2}{2}\left(1+\frac{h_1}{h}\right)^2 \frac{\sin\varphi}{\cos 2\varphi}\left\{\sqrt{\cot\varphi + \operatorname{tg} 2\varphi} - \sqrt{\frac{h_1^2}{(h+h_1)^2}\cot\varphi + \operatorname{tg} 2\varphi}\right\}^2.$$

Setzt man $D = \frac{1}{2} k h^2$, so erhält man für $\varphi = 30^0$ und für verschiedene Verhältnisse $h_1 : h$ folgende Werte für k:

$\frac{h_1}{h}$	$k = \frac{2D}{h^2}$	$\frac{h_1}{h}$	$k = \frac{2D}{h^2}$
0	0,297 γ	1	0,608 γ
0,1	0,353 γ	2	0,702 γ
0,2	0,400 γ	3	0,746 γ
0,3	0,440 γ	4	0,771 γ
0,4	0,475 γ	5	0,789 γ
0,5	0,505 γ	6	0,799 γ
0,6	0,531 γ	10	0,822 γ
0,7	0,554 γ	∞	0,866 γ
0,8	0,574 γ		
0,9	0,595 γ		

e) Zeichnerische Bestimmung des Erddruckes.

Die Berechnung des Erddruckes nach den vorstehenden Formeln ist verhältnismäßig umständlich; daher ist das nachfolgende, von Rebhann*) angegebene zeichnerische Verfahren sehr wertvoll.

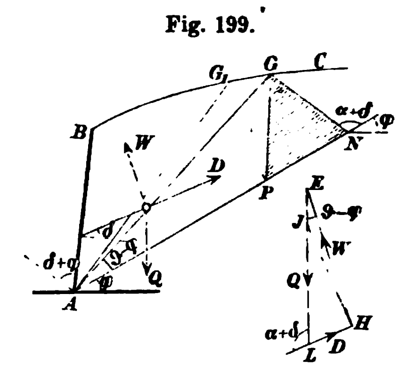
Die Wand sei eben, der Erdkörper oben durch eine beliebige, rechtwinklig zur Bildebene stehende gekrümmte BC begrenzt. Der Winkel, um welchen der Erddruck D von der Normalen zur Wandfläche abweicht, kann noch unbestimmt (von φ verschieden) gelassen und mit δ bezeichnet werden**) (wobei die Richtung der Abweichung so gedacht ist, wie sie bei abgleitendem Erdkörper

*) Rebhann, Theorie des Erddrucks und der Futtermauern. Wien 1870, S. 309.

**) Vergl. die Fußnote auf S. 390.

auftritt). AG sei die Gleitebene (Fig. 199), dann halten sich an dem Erdprisma ABG die Kräfte Q, D und W im Gleichgewicht und bilden das Kräftedreieck ELH, welches sich dadurch von dem entsprechenden Dreieck in Fig. 194, S. 390 unterscheidet, dafs der linksseitige Aufsenwinkel hier $\alpha + \delta$ ist.

Fig. 199.



Die für die Gleitfläche mafsgebende Bedingung $dD : d\vartheta = 0$ oder $dD = 0 \cdot d\vartheta$ kann nun so gedeutet werden, dafs, wenn die Schnittebene (nebst dem daran auftretenden Widerstande W) um $d\vartheta$ verdreht wird, die Kraft D ihre Gröfse beibehält. GAG_1 sei dieser Winkel $d\vartheta$, im Kräftedreieck durch EHJ dargestellt; dann ist JLH das Kräftedreieck für das Gleichgewicht des Körpers ABG_1. Das Stück EJ, um welches Q sich vermindert hat, ist hiernach gleich $dQ = \gamma \cdot AGG_1$.

EHJ und AGG_1 können als unendlich kleine Ausschnitte mit dem Zentriwinkel $d\vartheta$ angesehen werden und verhalten sich daher wie die Quadrate der Radien, d. h.

$$1) \qquad \frac{EHJ}{AGG_1} = \frac{EH^2}{AG^2}.$$

EHJ und EHL verhalten sich aber wie die Grundlinien EJ und EL oder wie dQ und Q, also

$$\frac{EHJ}{EHL} = \frac{dQ}{Q} = \frac{AGG_1}{ABG};$$

verbindet man dies mit Gl. 1, so entsteht

$$\frac{EHL}{ABG} = \frac{EH^2}{AG^2}.$$

Man kann aber leicht ein dem Kräftedreieck ähnliches Dreieck zeichnen, welches zu ihm in dem linearen Verhältnisse $AG : EH$ steht; man lege nämlich durch A die natürliche Böschung AN, so dafs $\measuredangle GAN = \vartheta - \varphi$ wird, ziehe dann GN so, dafs $\alpha + \delta$ bei

N als Außenwinkel des Dreiecks AGN erscheint, dann ist dieses mit dem Kräftedreieck winkelgleich und ähnlich, und für ihre Inhalte gilt

$$\frac{EHL}{AGN}=\frac{EH^2}{AG^2}.$$

Die Verbindung der beiden letzten Gleichungen führt auf

2) $$AGN=ABG.$$

Die Gleichheit der Flächen AGN und ABG ist also die Bedingung für die Gleitebene AG.

Im Kräftedreieck ist

$$\frac{D}{Q}=\frac{LH}{EL};$$

in demselben Verhältnisse stehen aber in dem ähnlichen Dreiecke AGN die Seiten GN und AN, so daſs

$$D=Q\cdot\frac{GN}{AN}=\gamma\cdot ABG\cdot\frac{GN}{AN}=\gamma\cdot AGN\cdot\frac{GN}{AN}$$

wird. Das Dreieck AGN läſst sich aber leicht in dem Verhältnisse $GN:AN$ verkleinern: Macht man $NP=NG$ und zieht PG, so ist $PGN:AGN=PN:AN$

$$=GN:AN,$$

also ist

3) $$D=\gamma\cdot PGN,$$

d. h. der Erddruck D ist gleich dem Gewichte eines Erdprismas von Querschnitt PGN.

Bei beliebiger oberer Begrenzung BC zeichne man hiernach die natürliche Böschung durch A, ziehe nach dem Augenmaſse AG und prüfe nun die Gleichheit der Flächen ABG und AGN, welche man nach einigen kleinen Verschiebungen von G mit genügender Genauigkeit erreichen kann.

Die Gerade GN, welche mit AN den Winkel $\alpha+\delta$ bildet, schneidet die Wagerechte offenbar unter dem (um φ gröſseren) Winkel $\alpha+\delta+\varphi$. Die Richtung von GN ergibt sich daher leicht, indem man an die Wandfläche AB (Fig. 199) (welche gegen die Wagerechte die Neigung α hat) bei A den Winkel $\delta+\varphi$ nach auſsen anträgt (für $\delta=\varphi$ also 2φ). Zu dieser Stellungslinie ist dann GN parallel zu ziehen.

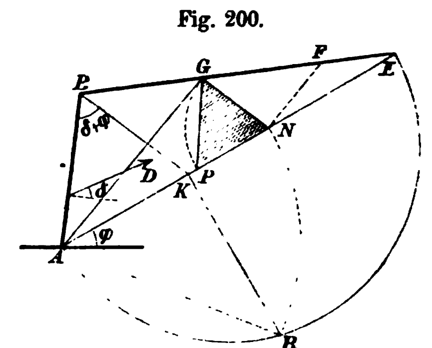
Bei ebener Erdoberfläche läſst sich die Gleitebene unmittelbar finden (Fig. 200). Hat sie nämlich die Lage AG, und muſs also

$ABG = AGN$ sein, so ist die Höhe dieser beiden Dreiecke mit gemeinsamer Grundlinie AG die gleiche. Daraus folgt, daſs, wenn $NF \parallel AG$ gezogen wird,

$$BG = GF$$

sein muſs. Trägt man den Winkel $\delta + \varphi$ dies Mal bei B an die innere Seite der Wand, so daſs BK die Stellungslinie wird (zu welcher GN parallel sein muſs), so erhält die Figur nun 2 Paare von Parallelen, woraus sich folgende Verhältnisse ergeben:

Fig. 200.



$$\frac{GF}{GE} = \frac{AN}{AE} \quad \text{und} \quad \frac{BG}{GE} = \frac{KN}{NE},$$

oder, weil $BG = GF$,

$$\frac{AN}{AE} = \frac{KN}{NE} = \frac{AN - AK}{AE - AN}.$$

Dies gibt $AE \cdot AN - AN^2 = AE \cdot AN - AE \cdot AK$ oder

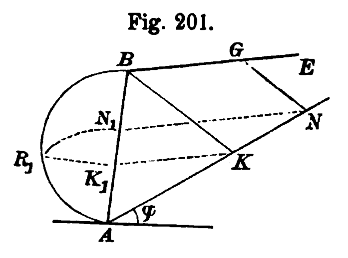
$$4) \qquad AN^2 = AE \cdot AK, \qquad \text{d. h.}$$

der Punkt N ist so zu bestimmen, daſs AN die mittlere Proportionale zu AE und AK ist. Man beschreibe daher über AE einen Halbkreis und ziehe durch K die Rechtwinklige KR zu AE, dann ist $\overline{AR^2} = AE \cdot AK$. Man braucht sonach nur $AN = AR$ zu machen; zieht man dann $NG \parallel BK$, so ist AG die Gleitebene. Das Erddruckdreieck PGN ergibt sich, wie vorher.

Wählt man auf der Wandfläche einen anderen Punkt an Stelle von A, so entsteht eine mit Fig. 200 völlig ähnliche Figur. Bei ebener Oberfläche BE sind demnach die Gleitebenen für alle Stellen der Wand miteinander parallel; die Fläche des Dreiecks PGN ist mit AB^2 proportional, der Erddruck also von der Form $D = \frac{1}{2} k h^2$. Hiernach ist die Darstellung der Verteilung des Druckes über die Wandhöhe ein Dreieck, dessen Grundlinie kh man erhält, indem man PGN in ein Dreieck von der Höhe h verwandelt.

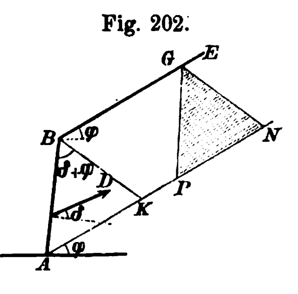
Ist der Punkt E für die Zeichnung nicht verwendbar (Fig. 201), so zieht man durch K eine Parallele KK_1 zu BE und kann nun den Halbkreis über AB zeichnen und $K_1R_1 \perp AB$ legen; dann ist $\overline{AR_1}^2 = AB \cdot AK_1$. Macht man daher $AN_1 = \overline{AR_1}$, so sind die Strecken zwischen den Punkten A, K_1, N_1 und B proportional denen zwischen A, K, N und E, so daſs eine Parallele N_1N zu BE den Punkt N liefert. Bei dieser Vergröſserung der proportionalen Teile wachsen aber auch die Fehler, so daſs es rätlich ist, zu prüfen, ob auch N und B gleich weit von der Gleitebene AG abstehen.

Fig. 201.



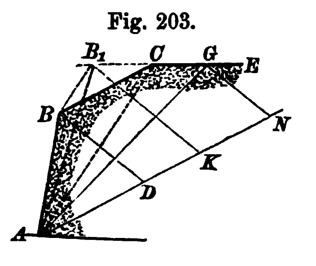
Hat die Oberfläche die natürliche Böschung φ (Fig. 202), so fällt E (Fig. 200) in unendliche Ferne, und es wird auch $AN = \infty$, mithin auch $BG = \infty$. Die Gleitfläche AG ist also von A nach dem unendlich fernen Punkte der Geraden BE zu ziehen, fällt sonach mit AK zusammen. Es findet hiermit Gl 13 S. 393, wonach $\vartheta = \varphi$ wird, ihre Bestätigung. Das Erddruckdreieck würde nun nach dem bisherigen Verfahren in unendliche Ferne rücken, kann aber, weil GN und BK (Fig. 202) jetzt zwischen Parallelen liegen, also gleich sind, an jeder beliebigen Stelle zwischen diesen Parallelen gezeichnet werden (Fig. 202).

Fig. 202.



Ist der Querschnitt des durch die Gleitebene abzutrennenden Erdprismas nicht ein Dreieck, sondern ein Viereck (Fig. 203), so kann man, weil es (Fig. 199) nur auf die Gröſse, nicht auf die Form der Fläche ABG ankommt, das Dreieck ABC (in Fig. 203) in ein solches AB_1C verwandeln, dessen Spitze B_1 auf der Verlängerung von EC liegt. Damit nun $AB_1G = AGN$ werde, hat man durch B_1 eine Parallele B_1K zur Stellungslinie BD zu ziehen und nun den Punkt K wie in Fig. 200 zu benutzen. In diesem Falle findet die auf S. 400 besprochene Gleichheit der Verhältnisse bei anderer Wahl des Punktes A auf der Wandfläche nicht mehr statt, und es ist nicht mehr $D = \frac{1}{2} k h^2$ (vergl. S. 395).

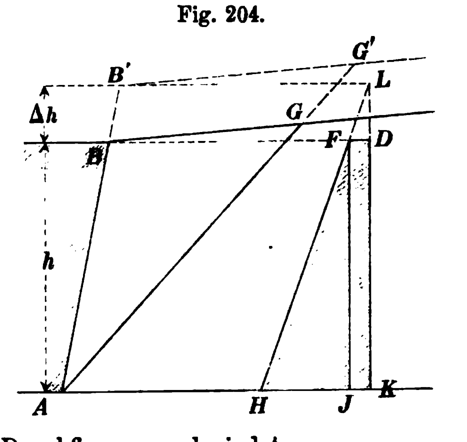
Fig. 203.



Einfluſs einer Belastung der Oberfläche. Wir denken uns die über die Oberfläche gleichmäſsig

verteilte Belastung q f. d. m² auf die Dichte γ der Erde reduziert, so dafs die entsprechende Belastungshöhe $\varDelta h = q:\gamma$ wird und diese Erdschicht durch die Linie $B'G' \parallel BG$ (Fig. 204) begrenzt erscheint. Reichte die stützende Wand AB über B hinaus bis B', so würde der Erddruck D in bekannter Weise zu ermitteln sein und seine Verteilung über die Fläche AB' sich durch das Dreieck KLH (Fig. 204) darstellen lassen. Denkt man sich nun den der Belastung entsprechenden Teil des Erdkörpers oberhalb BG bis zur Gleitfläche AG' erstarrt, so übt er einen Druck auf das Stück BB' der Wand nicht mehr aus; der Druck auf die Wand AB bleibt aber ungeändert und seine Verteilung wird durch das Trapez $DFHK$ ausgedrückt, während das Dreieck DLF der Druckfigur verschwindet.

Fig. 204.



Ohne die Belastung würde das Dreieck FHJ die Verteilung des Erddruckes D auf die Wand AB darstellen, durch die Belastung kommt das Rechteck $DFJK$ zu der Druckfläche hinzu. Ist die Druckfigur JFH ohne Belastung schon bestimmt, so erhält man diejenige mit Belastung, indem man die Seite HF bis zum Schnitt S mit der Belastungslinie verlängert und $SK \parallel JF$ zieht.

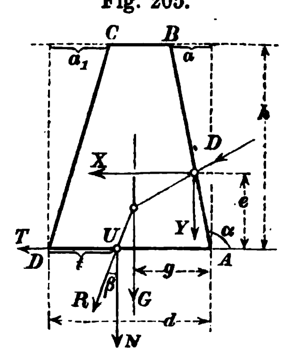
f) Anwendung auf die Berechnung von Stützmauern.

Für die Standsicherheit von Stützmauern ist mafsgebend, dafs in den Fugen weder ein Abgleiten noch ein Überschreiten der zulässigen Druckspannung vorkomme. In den meisten Fällen ist die unterste Fuge des freistehenden Teiles der Mauer die am meisten gefährdete; diese möge daher betrachtet werden; doch gilt das Rechnungsverfahren auch für jede höher liegende Fuge. Die Richtung der Fugen ist einstweilen wagerecht gedacht (Fig. 205).

Der Erddruck D möge nach dem vorhergehenden vollständig ermittelt sein und von der Normalen zur Wandfläche um den vollen

Reibungswinkel φ abweichen. Mit ihm setzt sich das Gewicht G der Mauer, dessen Richtungslinie in dem Abstande g an A vorbeigehen möge, zu der Mittelkraft R zusammen. Letztere schneide die Fuge in dem Punkte U mit dem Abstande t von der Aufsenkante D und bilde mit der Lotrechten den Winkel β.

Fig. 205.



Zerlegt man D in wagerechte und lotrechte Seitenkräfte X und Y, so ist, wenn α den (in der Figur stumpfen) Neigungswinkel der Wand bedeutet,

$$X = D \sin(\alpha + \varphi)$$

und $$Y = -D \cos(\alpha + \varphi)$$

(weil D mit der Lotrechten den Winkel $\alpha + \varphi$ bildet). Die wagerechte Seitenkraft von R ist dann $T = X = D \sin(\alpha + \varphi)$, die lotrechte $N = G + Y = G - D\cos(\alpha + \varphi)$ und

$$1) \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{T}{N} = \frac{D \sin(\alpha + \varphi)}{G - D \cos(\alpha + \varphi)}.$$

Die Lage des Spannungsmittelpunktes U der Fuge findet man mittels der Momentengleichung in Bezug auf A. Das Moment von R ist gleichbedeutend mit dem von N, nämlich $N(d - t)$, das Moment von D gleichwertig mit dem der normalen Seitenkraft gegen die Wandfläche, nämlich $D \cos\varphi \cdot \frac{e}{\sin\alpha}$. Daher wird

$$N(d - t) = D \cos\varphi \frac{e}{\sin\alpha} + Gg \quad \text{oder}$$

$$2) \qquad d - t = \frac{Gg + De\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}}{G - D\cos(\alpha + \varphi)}.$$

Legt man einen trapezförmigen Mauerquerschnitt zu Grunde, wobei a und a_1 die Grundrisse der Seiten AB und CD sind, so kann das Trapez als Unterschied des vollen Rechtecks dh und der Dreiecke $\frac{1}{2}ah$ und $\frac{1}{2}a_1h$ betrachtet werden, so dafs für ein Mauerstück von der Länge Eins

$$G = \tfrac{1}{2}\gamma_1 h (2d - a - a_1) \quad \text{und}$$

$$Gg = \tfrac{1}{2}\gamma_1 h (d^2 - \tfrac{1}{3}a^2 - a_1[d - \tfrac{1}{3}a_1])$$
$$= \tfrac{1}{2}\gamma_1 h (d^2 - a_1 d + \tfrac{1}{3}[a_1^2 - a^2])$$

ist, wenn γ_1 die Dichte und das Gewicht der Raumeinheit des Mauerwerkes bezeichnet. Hiernach wird aus Gl. 1 und 2:

$$3)\qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{D \sin(\alpha+\varphi)}{{}^1/_2\,\gamma_1 h (2d - a - a_1) - D\cos(\alpha+\varphi)}$$

$$4)\qquad d - t = \frac{\gamma_1 \frac{h}{2}(d^2 - a_1 d + {}^1/_3[a_1^2 - a^2]) + D e \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}}{{}^1/_2\,\gamma_1 h (2d - a - a_1) - D\cos(\alpha+\varphi)}.$$

Die Gefahr des Gleitens ist meist nicht maſsgebend für die Sicherheit der Mauer, weil man ihr leicht durch Neigung der Fugen entgegenwirken kann; bestimmend ist vielmehr die Lage des Spannungsmittelpunktes U und die Gröſse des Normaldruckes N, aus welchen dann die Verteilung der Normalspannungen sich ergibt. Es ist bei Stützmauern meistens nicht erforderlich, daſs der Punkt U innerhalb des Kernes, also des mittleren Drittels der Fuge, bleibe; die Erfahrung lehrt, daſs der Punkt U etwas auſserhalb des mittleren Drittels der Fuge DA liegen kann, ohne daſs die stärkste Druckspannung σ_d das zulässige Maſs überschreitet. Aus diesem Grunde läſst sich für Mauern trapezförmigen Querschnittes nicht eine ganz bestimmte Formel für die unter allen Umständen erforderliche oder zweckmäſsige Mauerstärke angeben, vielmehr werden meist einige Proberechnungen erforderlich sein, bis man diejenige Stärke gefunden hat, welche in Bezug auf die Gröſsen $d - t$, σ_d und β nach allen Richtungen befriedigt.

Man kann die probeweise Rechnung mit zunächst als wahrscheinlich angenommenen Mauerstärken beginnen; für mittlere Fälle erhält man übrigens ziemlich befriedigende Verhältnisse, wenn man die Bedingung stellt, daſs der Punkt U um ${}^1/_5\,d$ von der äuſseren Kante D liege, daſs also $d - t = {}^4/_5\,d$ sei. Setzt man diesen Wert für $d - t$ in Gl. 4 ein, so erhält man die nach d quadratische Gleichung

$$5)\quad d^2 + 2d\left(\frac{a_1}{6} - \frac{2}{3}a - \frac{4}{3}\frac{D\cos(\alpha+\varphi)}{\gamma\cdot h}\right) = \frac{5}{9}(a_1^2 - a^2) + \frac{10}{3}\frac{D\cos\varphi}{\gamma\cdot\sin\alpha}\frac{e}{h}.$$

Die stärkste Kantenpressung ist nach Bd. 1 S. 235 Gl. 15

$$6)\qquad \sigma_d = \frac{2}{3}\frac{N}{t} = \frac{2}{3}\frac{G - D\cos(\alpha+\varphi)}{t}.$$

Beispiel: Eine Stützmauer kehre einem überhöhten Erdkörper eine lotrechte Fläche zu (es sei $\alpha = 90°$, $a = 0$). Der Reibungswinkel φ des Erdreiches betrage 30°. Mauerhöhe und Überhöhung h_1 seien beide gleich 5 m und der äuſsere Anlauf a_1 der Mauer ${}^1/_5\,h = 1$ m (Fig. 206).

Dann ist nach der Tabelle auf S. 397

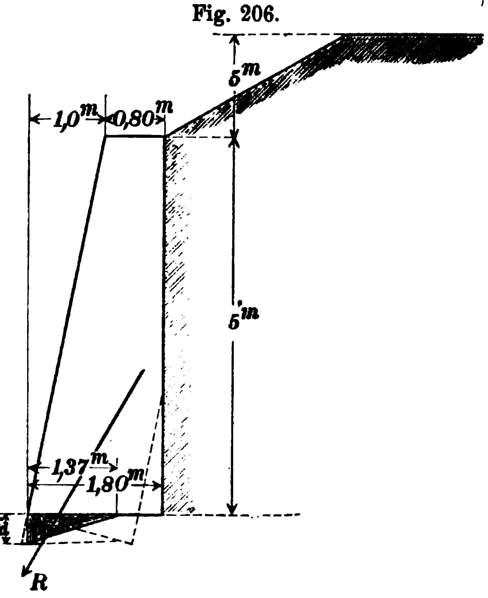
$D = 7{,}6\,\gamma$; $\cos(\alpha+\varphi) = -\sin 30^\circ = -0{,}5$; $\sin(\alpha+\varphi) = \cos\varphi = 0{,}866$.

Nach Gl. 5 wird, wenn man $e = {}^1/_3 h$ setzt (vergl. S. 396)

$$d^2 + 2\,d\,({}^1/_6 + {}^4/_5)\,\frac{7{,}6\cdot\gamma\cdot 0{,}5}{\gamma_1\, 5} = {}^5/_9 + {}^{10}/_3 \cdot \frac{7{,}6\cdot\gamma\cdot 0{,}866}{3\,\gamma_1}.$$

Es möge 1 cbm Erde $\gamma = 1600$ kg wiegen; eine Mauer aus Ziegeln ist etwa ebenso schwer, so dafs dann $\gamma : \gamma_1 = 1$; für Bruchsteinmauerwerk kann $\gamma_1 = 2000$, also $\gamma : \gamma_1 = 0{,}8$ gesetzt werden. Die Annahme $\gamma = \gamma_1$ liefert $d = 1{,}86$ m, $\gamma = 0{,}8\,\gamma_1$ aber $d = 1{,}73$ m. (Das Gewicht G der dichteren Bruchsteinmauer liefert mit D eine Mittelkraft R, die mehr nach rechts liegt, also einer günstigeren Lage des Spannungsmittelpunktes U entspricht und deshalb eine geringere Mauerdicke d erfordert. Wählen wir hiernach Bruchstein, nehmen $\gamma = 1600$, $\gamma_1 = 2000$ und $d =$ rd. $1{,}8$ m, so wird die obere Mauerstärke gleich $0{,}8$ m. Ferner

Fig. 206.



$$G = 1{,}3\cdot 5\cdot\gamma_1 = 13\,000 \text{ kg},$$
$$D = 7{,}6\cdot 1600 = 12\,160 \text{ kg},$$
$$N = 13\,000 + 6080 = 19\,080 \text{ kg},$$
$$T = 12\,160\cdot 0{,}866 = 10\,530 \text{ kg}.$$

Hiermit wird (Gl. 1)

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1053}{1908} = 0{,}55\,,\quad \beta = 29^\circ$$

$$G\cdot g = \{5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}4 + 2{,}5\,(0{,}8 + 0{,}33)\}\,2000 = 8850 \text{ m/kg}.$$

Daher nach Gl. 2

$$d - t = \frac{8850 + 12\,160\cdot 0{,}866\cdot {}^5/_3}{19\,080} = 1{,}37 \text{ m}$$

$$t = 1{,}80 - 1{,}37 = 0{,}43 \text{ m}.$$

Mithin ist bei mangelnder Zugfestigkeit die wirksame Breite der Grundfuge gleich $3\cdot 0{,}43 = 1{,}29$ m und die gröfste Druckspannung

$$\sigma_d = \frac{19\,080\cdot 2}{1{,}29} = 29\,500 \text{ kg/m}^2 = 2{,}95 \text{ at}.$$

Die Sicherheit gegen Gleiten entspricht mit $\beta = 29^\circ$ eben den Anforderungen. Die Anstrengung des Mauerwerks ist mit rund 3 at sehr gering. Gleichwohl

ist es nicht rätlich, die Mauerstärke geringer zu wählen, weil bei einer nur geringen Verminderung von d der Spannungsmittelpunkt u sich verhältnismäfsig schnell der Aufsenkante nähert.

Vorteilhaft würde es dagegen sein, wenn man die Fugen nach rückwärts abfallend neigte, wodurch der Winkel β entsprechend kleiner ausfiele. Auch kann man den Mauerkörper im Bereich des unwirksamen Teiles der Grundfuge etwa nach der punktierten Linie (Fig. 206) verkleinern, wodurch auch die gröfste Kantenpressung noch um etwas verringert werden würde.

g) Spannungen in einem Punkte eines Erdkörpers.

Die Bd. I S. 70 ff. sowie S. 192 ff. entwickelten allgemeinen Beziehungen zwischen den Kräften an einem Teilchen eines Körpers gelten auch für Erdkörper, soweit die sich ergebenden Spannungen mit der Beschaffenheit einer Erdmasse verträglich sind.

Es soll hier nur der einfachere Fall behandelt werden, wo der Erdkörper durch Zylinderflächen begrenzt ist, deren Erzeugende rechtwinklig zur lotrechten Bildebene stehen; auch möge sich der Erdkörper zu beiden Seiten der Bildebene weit genug erstrecken, so dafs diese als eine Symmetrieebene für den Körper angesehen werden kann. Dann mufs die Spannung an jeder zur Bildebene rechtwinkligen Schnittfläche mit der Bildebene parallel sein. Läfst man daher die Schnittebene sich um eine durch P gelegte Winkelrechte zur Bildebene drehen, so werden die entsprechenden Spannungen p sämtlich in der Zeichenebene liegen und die Mittelpunktsstrahlen der Spannungsellipse bilden.

Diese Spannungen p stehen im allgemeinen schief zu den betreffenden Schnittebenen; nur die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 sind reine Normalspannungen und stellen zugleich gröfste und kleinste Spannung für alle durch die Achse P zu legenden Ebenen dar. (Die gröfsere der beiden Hauptspannungen, dem Zahlenwerte nach, soll stets σ_1 sein.)

Wir setzen zunächst voraus, dafs (Fig. 207) die Hauptspannungen bei P, nämlich $PA = \sigma_1$ und $PB = \sigma_2$, nach Richtung und Gröfse gegeben seien, u. zw. als Druckspannungen; dann soll die Spannung p an einer Schnittebene EP, die mit der Richtung σ_1 den Winkel α bildet, nach Gröfse und Richtung bestimmt werden. Schneidet man ein unendlich kleines Prisma PRS (von der Länge $= 1$ rechtwinklig zur Bildebene) aus dem Erdkörper heraus, dessen Fläche PS in der Ebene EP liegt, während PR und RS die

Richtungen der Hauptspannungen haben, so müssen an diesem Prisma die Flächenkräfte einander das Gleichgewicht halten. Ist $PS = ds$, so wird

$$PR = ds \cos \alpha, \quad RS = ds \sin \alpha.$$

Fig. 207.

An PR wirkt nun eine Normalspannung σ_2, daher eine Druckkraft $\sigma_2\, ds \cos \alpha$, an RS eine Druckkraft $\sigma_1\, ds \sin \alpha$. Mit beiden mufs die schiefe Druckkraft $p\, ds$ an PS im Gleichgewichte sein. In dem Verhältnisse der Spannungen wird nichts geändert, wenn man den gemeinsamen Faktor ds fortläfst, so dafs p mit $\sigma_2 \cos \alpha$ und $\sigma_1 \sin \alpha$ im Gleichgewichte sein, also ein geschlossenes Kräftedreieck bilden mufs. ($\sigma_1 \sin \alpha$ und $\sigma_2 \cos \alpha$ sind die rechtwinkligen Abstände der Punkte A und B von EP, daher leicht abzugreifen.) Durch das Kräftedreieck ist p nach Gröfse und Richtung völlig bestimmt und kann leicht als PQ an den Punkt P parallel verschoben werden. Aus dem Dreieck ergibt sich noch

$$1) \qquad \operatorname{tg} \lambda = \frac{\sigma_2 \cos \alpha}{\sigma_1 \sin \alpha} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Für $\alpha = 0$ ist $\lambda = 90^0$, für $\alpha = 90^0$ ist $\lambda = 0$. Nur in diesen beiden Fällen steht p rechtwinklig auf der Schnittebene, ist $\alpha + \lambda = 90^0$. Liegt α zwischen 0 und 90^0, so ist $\alpha + \lambda$ ein spitzer Winkel; denn man findet

$$\operatorname{tg}(\alpha + \lambda) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \lambda}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \lambda},$$

oder nach Gl. 1:

$$2) \qquad \operatorname{tg}(\alpha + \lambda) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1 \operatorname{tg} \alpha}}{1 - \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}},$$

was für einen positiven, endlichen Wert von $\operatorname{tg} \alpha$ (und für $\sigma_1 > \sigma_2$) auch stets positiv und endlich ist (während für einen stumpfen Winkel $\alpha + \lambda$ die Tangente negativ sein müfste).

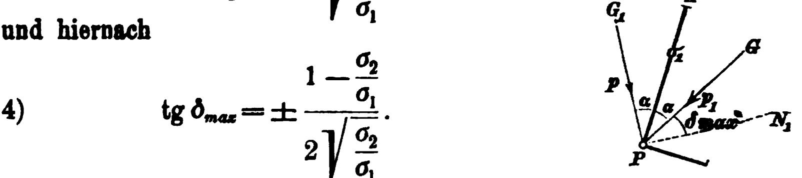
Die Richtung PQ der Spannung p weicht von der Normalen PN der Schnittebene um einen Winkel δ ab, dessen Gröfse sich

daraus ergibt, dafs $\alpha + \lambda + \delta = 90^0$ sein mufs; es wird darnach $\delta = 90^0 - (\alpha + \lambda)$, mithin

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \lambda)}.$$

Die Abweichung δ wird am gröfsten für denjenigen Neigungswinkel α der Schnittebene, welcher $\operatorname{tg}(\alpha + \lambda)$ oder in Gl. 2 den Zähler zu einem Minimum macht. Setzt man die Abgeleitete dieses Zählers (nach α), nämlich $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 \sin^2 \alpha} = 0$, so entsteht

Fig. 208.



3) $$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}$$

und hiernach

4) $$\operatorname{tg} \delta_{max} = \pm \frac{1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}}{2\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}}.$$

Zu den beiden Winkeln α nach Gl. 3 gehört dann je ein Winkel λ, für den Gl. 1 $\operatorname{tg} \lambda = \pm \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}$ ergibt, so dafs für diejenigen beiden Schnittebenen PG und PG_1 (Fig. 208), deren Spannungen p am stärksten von der Normalen abweichen, $\lambda = \alpha$ wird. Diese Schnittebenen liegen symmetrisch zur Richtung der ersten Hauptspannung σ_1; die Spannung der einen Ebene fällt in die Richtung der anderen, und umgekehrt.

Bedingungen für den Grenzzustand der Ruhe eines Erdkörpers ohne Scherfestigkeit. In einem solchen Erdkörper kann vermöge der Reibung der Druck p höchstens um den Reibungswinkel φ von der Normalen abweichen. Ist nun in irgend einem Punkte P

$$\delta_{max} = \varphi,$$

so befindet sich der Körper im Grenzzustande der Ruhe, und diejenigen beiden Flächen, für welche $\delta = \varphi$ wird, sind die G l e i t f l ä c h e n dieses Punktes. Da nach Fig. 208 der Winkel $G_1 P N_1 = 2\alpha + \delta_{max} = 2\alpha + \varphi = 90^0$, so wird für die Gleitflächen

5) $$\alpha = \tfrac{1}{2}(90^0 - \varphi).$$

Um diesen Winkel weicht jede der beiden Gleitebenen von der ersten Hauptspannung ab. Sodann gibt Gl. 3: $\sigma_2 : \sigma_1 = \operatorname{tg}^2 \alpha$ oder

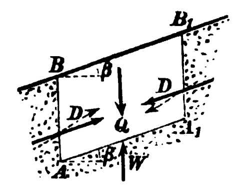
6) $$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \operatorname{tg}^2 \frac{90^0 - \varphi}{2} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}.$$

Im Grenzzustande der Ruhe haben also die beiden Hauptspannungen dieses bestimmte Verhältnis. (Für $\varphi = 30^0$ schliefsen die beiden Gleitebenen einen Winkel $2\alpha = 60^0$ ein, in dessen Mitte σ_1 liegt; es ist dann $\sigma_2 : \sigma_1 = {}^1/_3$.)

h) Spannungen in einem unbegrenzten Erdkörper mit ebener Oberfläche.

Ist β die Neigung der oberen Begrenzungsebene gegen die Wagerechte und legt man durch den Erdkörper die lotrechten parallelen Schnitte AB und A_1B_1, sowie den Schnitt AA_1 parallel der Oberfläche (Fig. 209), so wirkt auf den Körper ABB_1A_1 als Massenkraft die Schwere. Die Spannkräfte D an den lotrechten Ebenen müssen (wegen der gleichartigen Zustände in dem seitlich unbegrenzten Erdkörper) gleich und entgegengesetzt gerichtet sein und in gleichen Tiefen unter der Oberfläche angreifen; sie mögen etwa die punktierten Richtungen haben. Der Widerstand W der Ebene AA_1 mufs dem Gewichte Q gleich und entgegengesetzt sein (nach der Gleichung der wagerechten und lotrechten Kräfte), mufs sich aber auch (des gleichartigen Zustandes wegen) gleichmäfsig über AA_1 verteilen, daher in die Mitte von AA_1 fallen und sich mit Q völlig aufheben. Daraus folgt dann weiter, dafs auch die beiden D nicht ein Kräftepaar bilden können, sondern in dieselbe Richtungslinie fallen, d. h. der Oberfläche parallel sein müssen (wie die voll ausgezogenen Richtungen in der Figur darstellen). Die Richtung der Oberfläche und die Lotrechte sind also in der Weise miteinander gepaart, dafs die Spannungen an lotrechten Ebenen parallel der Oberfläche, die Spannungen an den mit der Oberfläche parallelen Ebenen aber lotrecht sind.

Fig. 209.

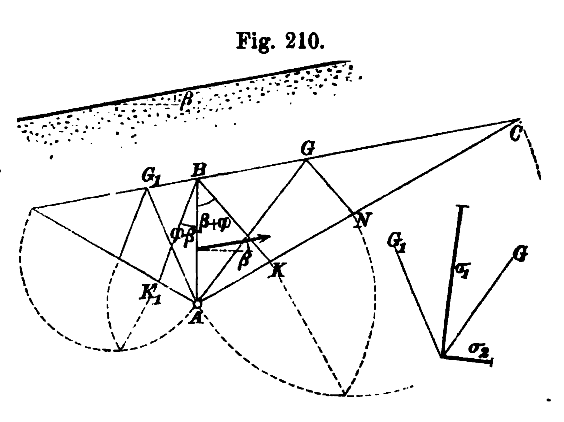


Dieser Satz gestattet die Anwendung des Rebhann'schen Verfahrens (S. 398) auf die Ermittelung der Gleitflächen eines Punktes A für den unteren Grenzzustand der Ruhe.

AB sei eine kleine lotrechte Schnittfläche im Erdkörper (Fig. 210), an welche sich BC parallel der Oberfläche anschliefst. Der an AB auftretende Druck schliefst mit der Wagerechten (der Normalen zur Schnittebene) den Winkel β ein. Der auf BC lastende

Druck der oberen Erdmasse kann als eine gleichmäfsig verteilte Last angesehen werden, welche nach S. 402 keinen Einflufs auf die Neigung der Gleitebene hat, so dafs man bei Bestimmung der letzteren BC als freie Oberfläche behandeln kann. An Stelle des auf S. 398 benutzten Winkels δ tritt hier β, und die Stellungslinie BK mufs von AB um $\beta + \varphi$ abweichen. Man findet nun den Punkt N in bekannter Weise, zieht $NG \parallel BK$ und hat damit eine Gleitfläche AG gefunden. Die zweite Gleitfläche AG_1 ergibt sich, wenn man den Erdkörper links von AB betrachtet und dasselbe Verfahren anwendet; nur ist dabei zu bedenken, dafs man den Winkel β jetzt negativ setzen mufs, oder dafs die Stellungslinie BK_1 mit AB den Winkel $\varphi - \beta$ einschliefst. Zur Prüfung der Richtigkeit kann dienen, dafs die beiden Gleitflächen um $90^0 - \varphi$ voneinander abweichen müssen. Die Richtung der ersten Hauptspannung σ_1 halbiert diesen Winkel.

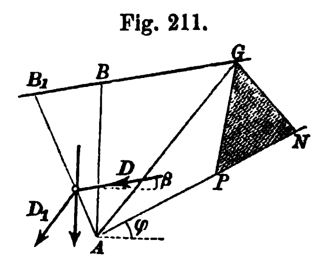
Fig. 210.



Die Neigungen der Gleitflächen hängen nur von β und φ ab, sind von der Lage des Punktes A unabhängig; im seitlich unbegrenzten Erdkörper mit ebener Oberfläche sind daher die Gleitfächen Ebenen.

Man kann nun auch die Gröfse des Druckes D an einer lotrechten Ebene bestimmen (Fig. 211), indem man die Schnittebene AB bis zur Oberfläche reichen läfst und nach gefundener Gleitfläche das Druckdreieck PGN zeichnet. Da bei einer Veränderung der Höhe $AB = h$ die Figur sich ähnlich bleibt, so ist die Dreiecksfläche PGN proportional mit h^2 und $D = {}^1/_2\, k h^2$ zu setzen. Verwandelt man PGN in ein Dreieck von der Höhe h, so ist dies die Druckverteilungsfigur für AB.

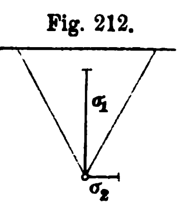
Fig. 211.



Nach Ermittelung des Druckes auf die lotrechte Ebene AB kann man nun auch den Druck D_1 gegen eine beliebig geneigte Ebene AB_1 bestimmen, denn das Gleichgewicht der Kräfte an dem Körper ABB_1 erfordert, dafs D_1 die Mittelkraft sei aus D und dem Gewichte G von ABB_1. Dieser Druck D_1 geht durch den unteren Drittelspunkt von AB_1, ist daher auch von der Form $D_1 = {}^1/_2\, k_1 h^2$.

Hiernach kann man leicht für jede Schnittebene im unbegrenzten Erdkörper mit ebener Oberfläche die Druckverteilung für den unteren Grenzzustand der Ruhe ermitteln.

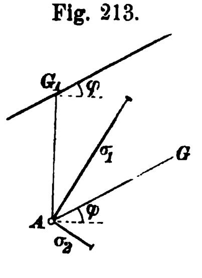
Fig. 212.



Bei wagerechter Oberfläche sind (nach dem Satze auf S. 409) die Spannungen an lotrechten und wagerechten Schnitten Normalspannungen (Fig. 212). Auf diesen Fall finden die Untersuchungen von S. 380 Anwendung, bei denen an einer lotrechten Ebene ein reiner Normaldruck vorausgesetzt war. Die dort gefundene, als eben angenommene Gleitfläche, welche mit der Wagerechten den Winkel ${}^1/_2(90^0 + \varphi)$, mit der Lotrechten den Winkel ${}^1/_2(90^0 - \varphi)$ bildete, findet bezüglich dieser Neigung hier ihre Bestätigung; die zweite Gleitebene liegt symmetrisch, und beide schliefsen den Winkel $90^0 - \varphi$ ein (wie es nach S. 408 sein mufs). In einer Tiefe y unter der Oberfläche ist die lotrechte Hauptspannung $\sigma_1 = \gamma y$, die wagerechte (nach S. 382) $\sigma_2 = ky = \gamma \operatorname{tg}^2(45^0 - {}^1/_2\varphi)\cdot y$. Für $\varphi = 30^0$ ist $\sigma_1 = \gamma y$, $\sigma_2 = {}^1/_3\gamma y$.) Das Verhältnis $\sigma_2 : \sigma_1$ stimmt mit Gl. 6 S. 408 überein.

Ist die Oberfläche unter dem natürlichen Böschungswinkel φ geneigt (Fig. 213), so weicht der Druck an lotrechter Schnittebene, weil er mit der Oberfläche parallel, um φ von der Normalen ab. Die lotrechte Ebene ist daher eine Gleitfläche. Die zweite Gleitfläche eines Punktes A liegt parallel der Oberfläche, weil der an solcher Schnittebene auftretende lotrechte Druck auch den Winkel $90^0 - \varphi$ mit der Ebene bildet. Die Richtung der Hauptspannung σ_1 ist daher gegen die Lotrechte um $45^0 - {}^1/_2\varphi$ geneigt. Während sich also die Oberfläche von der Wagerechten aus um den Winkel φ

Fig. 213.



links herum dreht, erfahren die Richtungen der Hauptspannungen und der Gleitflächen eine gemeinsame Drehung rechts herum, u. zw. um den Winkel $45^0 - \frac{1}{2}\varphi$.

Bei der Aufsuchung des Erddrucks eines unbegrenzt überhöhten Erdkörpers gegen eine lotrechte Wand (S. 393) war die Wand selbst als eine Gleitfläche angenommen, weil man an ihr den vollen Reibungswiderstand voraussetzte; die zweite ergab sich parallel der natürlichen Böschung. Diese Verhältnisse stimmen mit denen am unbegrenzten Erdkörper überein, so dafs die dort gemachte Annahme einer ebenen Gleitfläche einleuchtend erscheint. Die auf S. 394 gefundene Gröfse des Erddrucks $D = \frac{1}{2}\gamma h^2 \cos\varphi$ wird daher für den unbegrenzten Erdkörper ebenfalls richtig sein.

Für den oberen Grenzzustand der Ruhe lassen sich in entsprechender Weise die Gleitflächen finden, wenn man das, in sinngemäfser Weise für den passiven Erddruck abgeänderte, Rebhann'sche Verfahren anwendet. Die Gleitflächen haben dann im allgemeinen andere Richtungen. Von der ersten Hauptspannung σ_1 weichen sie wieder je um $45^0 - \frac{1}{2}\varphi$ ab; während aber bei wagerechter Oberfläche im unteren Grenzzustande die erste Hauptspannung σ_1 lotrecht, die zweite σ_2 wagerecht war, tritt für den oberen Grenzzustand das Entgegengesetzte ein, so dafs σ_1 wagerecht, σ_2 lotrecht steht. Bei einer Drehung der Oberfläche dreht sich die Richtung von σ_1 in dem gleichen Sinne. — Für $\beta = \varphi$ (Fig. 213) ist nur eine Stellung der Gleitflächen, also auch nur ein Gleichgewichtszustand möglich; die beiden Grenzzustände fallen zusammen.*)

i) Richtung des Erddruckes gegen eine feste Wand.

In den Untersuchungen S. 390—397 wurde die Voraussetzung gemacht, dafs an der Wand der volle Reibungswiderstand zur Wirkung komme. Dies führt in Verbindung mit der allgemein gemachten Annahme einer ebenen Gleitfläche in den meisten Fällen auf Widersprüche. Benutzt man für die Wand denselben Reibungswinkel φ wie für das Innere des Erdkörpers, so bedeutet die erstere Voraussetzung das Zusammenfallen einer Gleitfläche des Erdkörpers mit der Wand. Dann verlangt aber Gl. 5 S. 408, dafs die zweite Gleitfläche des Fufspunktes A der Wand von der ersten Gleitfläche, also der Wandebene, um $90^0 - \varphi$ abweiche. Die Bestimmung der im Erdkörper gelegenen Gleitfläche nach Gl. 7 · S. 391 führt dagegen im allgemeinen auf

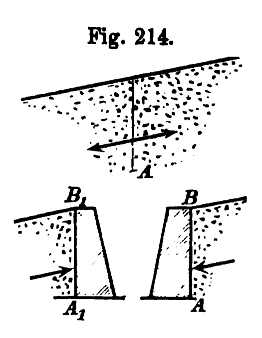
*) Mohr, Erddruck; Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins Hannover 1871, S. 357.

einen anderen Winkel. Für $\varphi = 30^0$ wird $90^0 - \varphi = 60^0$. Bei $h_1 = 0$, $\alpha = 90^0$ und $\varphi = 30^0$ liefert Gl. 9 S. 392 $\vartheta = 54^0 20'$, während die Gleitfläche im Punkte A nur $90^0 - 60^0 = 30^0$ Neigung gegen die Wagerechte haben dürfte, wenn die Wand eine Gleitfläche ist, wogegen im unbegrenzten Erdkörper mit wagerechter Oberfläche der Neigungswinkel der Gleitebenen $45^0 + {}^1/_2\,\varphi = 60^0$ beträgt. — Bei $h_1 = \infty$ liefert Gl. 13 S. 393 unabhängig von α für ϑ den Wert φ, so dafs die beiden Gleitflächen um $\alpha - \varphi$ (anstatt um $90^0 - \varphi$) gegeneinander geneigt wären; im unbegrenzten Erdkörper würde $\vartheta = \varphi$ richtig sein.

Hieraus kann man schliefsen, dafs, wenn an der Wand die volle Reibung wirkt, die andere Gleitfläche durch A im allgemeinen eine krumme Fläche sein mufs,*) welche bei A mit der Wand den Winkel $90^0 - \varphi$ bildet, bei weiterem Verlaufe aber sich der entsprechenden Gleitebene des unbegrenzten Erdkörpers mehr und mehr nähert. Mit einer solchen krummen Gleitfläche zu rechnen, würde aber sehr schwierig sein.

Es liegt der Gedanke nahe, die Spannungsverhältnisse des unbegrenzten Erdkörpers auch auf die Berechnung des Druckes gegen eine Stützmauer anzuwenden, indem man die Stützwand (welche den Erdkörper abschliefst) wie eine Schnittebene im unbegrenzten Erdkörper behandelt. Dann würden die Gleitflächen tatsächlich Ebenen sein, der Druck auf die Wand schliefst dann aber mit der Normalen einen Winkel ein, der sich nach Fig. 211 S. 410 bestimmen läfst; dieser Winkel ist Null, wenn die Wandfläche parallel mit σ_1, er ist gleich φ, wenn die Wand die Neigung einer Gleitfläche hat, und liegt sonst zwischen Null und φ. Diese Übertragung der Spannungsverhältnisse des unbegrenzten Erdkörpers auf den Druck gegen eine Wand ist aber auch nicht widerspruchsfrei. So z. B. erfährt eine lotrechte Schnittebene (Fig. 214) von beiden Seiten gleiche, aber entgegengesetzte Drücke D, doch wird man nicht zugeben können, dafs die Stützwand A_1B_1 den gleichen Druck nach Gröfse und Richtung auszuhalten

Fig. 214.



*) Vergl. Müller-Breslau, „Erddruck auf Stützmauern" 1906 S. 25 ff.

habe wie die Stützenwand AB. Unter gewissen Beschränkungen kann man allerdings wohl den Druck auf Stützmauern aus dem Verhalten des unbegrenzten Erdkörpers entnehmen und das in Fig. 211 S. 410 gezeigte Verfahren zu seiner Ermittelung anwenden*). Man bekommt dann, weil an der Wand nicht der volle Reibungswiderstand zur Anrechnung kommt, gröfsere und ungünstiger gerichtete Drücke, als wenn man nach S. 390—397 rechnet oder das Rebhann'sche Verfahren (S. 397—401) mit $\delta = \varphi$ anwendet.

Etwas Gewaltsames hat die Übertragung der Verhältnisse des unbegrenzten Erdkörpers auf einen durch eine Stützmauer begrenzten immerhin; die Gleichmäfsigkeit und Stetigkeit wird durch die Mauer doch sicherlich gestört. Wenn auch vielfältig angestellte Versuche immer noch nicht zu einem sicheren Ergebnis darüber geführt haben, in welchem Umfange die Reibung an der Wand zur Wirkung kommt, und wenn auch eine endgültig befriedigende Beantwortung dieser Frage, bei welcher so mancherlei keiner Gesetzmäfsigkeit unterliegende Umstände, Erschütterungen usw. in Betracht kommen, sobald nicht zu erwarten ist, so scheint nach den Versuchen von Müller-Breslau doch festzustehen, dafs selbst bei rauhen Wandflächen der Reibungswinkel des Erdreichs gegen dieselben kleiner anzunehmen ist als der natürliche Böschungswinkel.



*) Vergl. a. Dr. Weyrauch, Theorie des Erddruckes auf Grund der neueren Anschauungen; Allgemeine Bauzeitung 1880, S. 63; erschien auch als Sonderabdruck, Wien 1881, Verlag von R. v. Waldheim.

Verzeichnis und Bedeutung der in den Formeln benutzten Buchstaben unter Hinweis auf die erklärenden Stellen des Buches.

A Auflagerdruck des linken Endauflagers (S. 209);
„ lotrechter Kämpferdruck am linksseitigen Auflager eines Bogenträgers (S. 71);
B Auflagerdruck des rechten Endauflagers (S. 209);
„ lotrechter Kämpferdruck am rechten Auflager eines Bogenträgers (S. 71);
C Centrifugalmoment einer Bogenlinie (S. 139);
D Spannkraft in einer Strebe (Diagonalen) eines Fachwerks (S. 231);
„ aktiver Erddruck gegen eine Wand (S. 380);
D_1 passiver Erddruck oder Erdwiderstand (S. 383);
D Gesamtdruck in einer Fuge eines Gewölbes (S. 193);
F Querschnittsfläche eines Stabes oder Bogenträgers (S. 37, 70);
F_1 Querschnitt des Bandes eines Bogens (S. 105);
$F(u) = {}^1/_2(e^u + e^{-u})$ (zur Kettenlinie) (S. 171);
G Gleitziffer (S. 17);
„ ständige Knotenpunktslast (S. 297);
„ Gewicht einer Stützmauer (S. 403);
H wagerechte Seitenkraft in einem Trägergurt (S. 211);
„ Horizontalschub eines Bogenträgers oder Gewölbes (S. 72, 98, 136, 184);
„ wagerechte Spannkraft im Scheitel einer Ketten- oder Drucklinie (S. 166);
M Biegungsmoment (S. 14);
M_m Scheitelmoment eines Bogenträgers oder Gewölbes (S. 154, 195);
M_a und M_b Einspannungsmomente eines Bogenträgers oder Gewölbes (S. 136, 195);
M_k Kernmoment (S. 70);
N Längskraft, Normalkraft für einen Querschnitt (S. 35);
O Spannkraft im Obergurt eines Trägers (S. 207, 218);
P Einzellast (S. 67) besonders auch bewegliche Einzellast (S. 82, 98);
P_n Bezeichnung einer Gruppe von Kräften P_{n_1}, P_{n_2} usw. (S. 339);
Q Querkraft in einem Schnitte (S. 16, 70);
S Spannkraft eines Stabes bezw. einer Ketten- oder Drucklinie an beliebiger Stelle (S. 166, 224);
S' Spannkraft eines Fachwerkstabes infolge einer Last Eins in bestimmter Richtung (S. 341);
S_0 Spannkraft eines Stabes in einem statisch unbestimmten Fachwerk, das durch Beseitigung überzähliger Stützwiderstände oder Stäbe statisch bestimmt gemacht ist (S. 364);

U Spannkraft im Untergurt eines Trägers (S. 207, 218);
V Spannkraft in einem Ständer (einer Vertikalen) eines Fachwerks (S. 218);
W_a und W_b Widerlager- (Kämpfer-) Drücke eines Bogenträgers oder Gewölbes (S. 67, 72, 99);
X wagerechte Spannkraft an beliebiger Stelle einer Drucklinie für Erdbelastung (S. 201);
„ statisch unbestimmte Gröfse (S. 364).
Y Wandscheerkraft eines Trägers (S. 208);
$\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_a$ innere und äufsere Formänderungsarbeit (S. 11);
$\mathfrak{A}_i^V$ und $\mathfrak{A}_a^V$ innere und äufsere Verschiebungsarbeit (S. 11);
a diejenige Strecke der linken Auflager-Lotrechten eines Trägers, welche zwischen den Gurtrichtungen einer Schnittstelle liegt (S. 208, 258, 286);
b diejenige Strecke der rechten Auflagerlotrechten eines Trägers, welche zwischen den Gurtrichtungen einer Schnittstelle liegt (S. 208, 258, 286);
c Höhe des Spannungsmittelpunktes der Scheitelfuge eines Bogenträgers oder Gewölbes über der Mitte der Fuge (S. 155, 196);
„ Scherfestigkeit (Kohäsion) eines Erdkörpers (S. 155, 196);
d Länge einer Fachwerkstrebe (S. 285, 295);
„ untere Stärke einer Stützmauer (S. 403);
„ Gewölbestärke an beliebiger Stelle (S. 193);
d_0 Gewölbestärke im Scheitel (S. 192);
d_1 Gewölbestärke am Kämpfer (S. 194) bezw. an derjenigen Stelle eines Erddruckgewölbes, wo die Mittellinie lotrecht steht (S. 205);
ds Bogenteilchen einer Kurve (Mittellinie eines Stabes oder Bogenträgers) (S. 51, 100);
$d\varphi$ Kontingenz- oder Zentriwinkel eines Bogenteilchens ds (S. 51, 100);
e Abstand der am stärksten gespannten Stelle eines Querschnittes von der Biegungsachse (S. 69);
„ Höhe des Angriffspunktes des Erddrucks über der Unterkante der Wand (S. 382, 393);
f Pfeilhöhe eines Bogens oder Gewölbes (S. 72, 192);
g ständige Belastung der Längeneinheit (S. 85);
h Trägerhöhe an irgend einer Stelle (S. 208, 257);
„ Höhe einer Stützwand (S. 380);
h_0 freie lotrechte Standhöhe eines Erdkörpers (S. 385);
h_1 Überhöhung eines Erdkörpers (S. 390);
h_m Trägerhöhe in der Mitte einer Spannweite (S. 211, 283, 289);
$k = 2D:h^2$ beim Erddruck (S. 382, 392);
k vom Querschnitt abhängige Zahl bei Berechnung der Normalspannungen in krummen Stäben (S. 37);
l Spannweite eines Bogenträgers oder Gewölbes (S. 72, 97, 192);
n Anzahl der Knotenpunkte eines Fachwerks (S. 220);
p Belastung der Längeneinheit besonders bewegliche Belastung (S. 81);
p_a u. p_i äufserer und innerer Druck auf eine Gefäfswand (S. 59);
p Erddruck auf die Höheneinheit einer Wand (S. 382);

q Belastung eines Erdkörpers für die Flächeneinheit des Grundrisses (S. 402);
„ Gewicht der Bogeneinheit einer Kette (S. 168);
r Krümmungshalbmesser im Scheitel einer Ketten- oder Drucklinie (S. 167);
s Anzahl der Stäbe eines Fachwerks (S. 220);
„ Länge eines Fachwerkstabes (S. 333);
t Temperaturzunahme eines Bogens (S. 104);
t_a und t_b Tiefe des an den Kämpfern wirkenden Seitenschubes H eines Bogenträgers oder Gewölbes unter den Mitten der Kämpferfugen (S. 145, 195):
$u = x : r$ Hülfsgröfse (Kettenlinie) (S. 171);
w Abstand des Schnittpunktes der Gurtrichtungen (an einer Schnittstelle eines Trägers) von der linken Auflager-Lotrechten (S. 208, 258);
„ veränderliche Breite eines Querschnittes (S. 14);
y_0 Belastungshöhe im Scheitel (bei wagerechter Belastungslinie) (S. 176);
z Ordinate der Kämpferdrucklinie eines Bogenträgers (S. 120, 148);
„ Belastungshöhe einer Ketten- oder Drucklinie (S. 166);
z_0 Belastungshöhe im Scheitel einer Ketten- oder Drucklinie (S. 167);
Δds Vergröfserung des Bogenteilchens ds (S. 19);
$\Delta d\varphi$ Vergröfserung des Kontingenz- oder Centriwinkels eines Bogenteilchens (S. 19);
Δh Einflufs der Belastung eines Erdkörpers auf den Erddruck (S. 402);
Δl Vergröfserung der Spannweite l eines Bogenträgers (S. 100);
Δs Verlängerung eines Stabes von der Länge s (S. 333);
α Neigungswinkel eines Bogens oder einer Drucklinie am Kämpfer (S. 118, 194);
„ Neigungswinkel der Stützwand eines Erdkörpers (S. 390);
γ Dichtigkeit (Gewicht von 1 cbm) eines Erdkörpers (S. 380);
γ_1 Dichtigkeit des Mauerwerks (S. 192, 403);
δ Neigungswinkel einer Strebe D eines Fachwerks (S. 235);
„ unbestimmte Abweichung des Erddruckes D von der Normalen zur Wand (S. 397);
„ elastische Verschiebung eines Punktes eines von Kräften ergriffenen Körpers oder eines ebenen Fachwerkes (S. 13, 20, 334);
δ_{aa} elastische Verschiebung eines Punktes a infolge einer in ihm angreifenden äufsern Kraft Eins in der Richtung derselben (S. 337);
δ_{ab} elastische Verschiebung eines Punktes a in der Richtung einer in ihm angreifenden Kraft infolge einer in einem Punkte b angreifenden Kraft Eins (S. 337);
ε Dehnung (S. 36);
„ Wärmedehnung (S. 104);
$\varepsilon = \alpha + 2\varphi$ Hülfsgröfse (Erddruck) (S. 390);
ξ kleine Verhältniszahl, welche die Einwirkung der Verkürzung der Mittellinie eines Bogens oder Gewölbes, sowie der Verlängerung der Spannstange eines Bogens darstellt (S. 117, 144, 185, 193);

